VNiVERSiDAD
D SALAMANCA
CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

El Estatus de la Demostración Matemática en el Aula: De una Noción Paramatemática al Diseño de una Ingeniería Didáctica

Tesis para obtener el grado de Doctor en Educación Matemática por el Departamento de Didáctica de la Matemática y Didáctica de las Ciencias Experimentales de la Universidad de Salamanca, España

Sustenta: Angelina Alvarado Monroy

Directora de tesis: Dra. María Teresa González Astudillo

2015

VNiVERSiDAD
D SALAMANCA
CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA Y DIDÁCTICA DE LAS CIENCIAS EXPERIMENTALES

ÁREA DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

Dra. María Teresa González Astudillo, Profesora Titular del Departamento de la Matemática y Didáctica de las Ciencias Experimentales de la Universidad de Salamanca

HACE CONSTAR:

Que la presente memoria titulada “El estatus de la demostración Matemática: de una noción paramatemática al diseño de una ingeniería didáctica”ha sido realizada bajo mi dirección por Angelina Alvarado Monroy y constituye su Tesis para optar al Grado de Doctor.

Y para que conste y tenga los efectos oportunos ante el Departamento de Didáctica de la Matemática y Didáctica de las Ciencias Experimentales de la universidad de Salamanca, firmo el presente documento.

Salamanca, a 21 de Julio de 2015

Fdo.: María Teresa González Astudillo

Dedicatoria y agradecimientos

Dedico este trabajo a mis hijos: Óscar y Emilio por empujar cada día, llenar mi vida y para justificar con esta tesis un poquito mis ausencias.

También lo dedico a quien siempre de una u otra manera y en todo momento me ha dicho:
Compañera,
Usted sabe
que puede contar conmigo,
no hasta dos o hasta diez
sino contar conmigo.

Agradezco infinitamente a la Dra. María Teresa González Astudillo, por su dirección, por su paciencia, por sus enseñanzas, y por tener que señalar lo bueno y lo malo.
Agradezco también a los sinodales por el tiempo dedicado a estudiar y aprobar este trabajo.

Tabla de contenido

Introducción

La investigación presentada en este documento, se desarrolló en torno a la enseñanza y el aprendizaje de la demostración matemática, como concepto y como proceso, en la educación inicial universitaria, así como, en las posibles formas de mejorar su comprensión por parte de los estudiantes.

La elección de este tópico no fue casual. La demostración en matemáticas y en didáctica es un objeto de naturaleza extremadamente compleja, un medio para explicar, justificar y comunicar de manera convincente ideas, fenómenos, hechos, etc. Desde el punto de vista matemático e histórico ha sufrido notables cambios que han implicado grandes repercusiones en el proceso de enseñanza-aprendizaje en los diferentes niveles educativos. Esencialmente, no ha tenido el reconocimiento como objeto de estudio, no obstante su uso e importancia dentro de las matemáticas escolares. En consecuencia, la experiencia muestra que los estudiantes en su ingreso a la Universidad no alcanzan a comprender la demostración como concepto, ni como proceso de forma adecuada, ni a relacionarlo con otros conocimientos previamente estudiados, o asumidos (e.g. definiciones, manejo de ejemplos, no ejemplos y contraejemplos, lenguaje formal, formas lógicas y cuantificadores, etc).

Las herramientas y conceptos referentes a la demostración matemática se aprenden en general descontextualizados y desvinculados de otros contenidos y los estudiantes se limitan a memorizar un conjunto de criterios y técnicas que los profesores utilizan en la clase, de estar contextualizados y ser tomados como objetos de estudio en los contenidos, tendrían mucho más significado. En recientes investigaciones, se considera que entender el papel del razonamiento matemático y de la demostración en la enseñanza de las matemáticas es de las tareas más importantes que enfrentan los profesores y autoridades educativas en el área. Por esta razón, su presencia en la instrucción se debe mejorar (Hanna & De Villiers, 2012). Más aún, ahora que los planes y programas de estudio de nivel básico en México particularmente, enfatizan que es necesario dar mayor peso al razonamiento que a la memorización, así el énfasis en el desarrollo del pensamiento matemático se pone en: el planteamiento y la resolución de problemas, la argumentación, la comunicación y el manejo de técnicas. En el libro antes citado en el capítulo presentado por Selden (2012) se habla de la lucha que enfrentan los estudiantes cuando el requisito para la transición al nivel universitario es justamente que sean autónomos en la comprensión y construcción de pruebas rigurosas. Para ello, encuentran dificultades en: el uso correcto de la lógica; la necesidad de emplear definiciones formales; la necesidad de un repertorio de ejemplos, no ejemplos, y contraejemplos; la exigencia de una profunda comprensión de los conceptos y teoremas involucrados; la necesidad de conocimiento estratégico y de identificar cuáles teoremas son importantes, y la importancia de ser capaz de leer y comprobar los argumentos para su corrección. En la misma fuente se provee información de investigaciones, recursos y métodos sobre la enseñanza de la demostración y la tarea de demostrar en el nivel superior (e.g. cursos de transición, comunidades de práctica, método de Moore, la co-construcción de pruebas y el debate científico). Algunos de estos métodos son similares a los utilizados en la investigación que reportamos en esta tesis.

La transición al nivel superior es difícil para los estudiantes, dado que, pasan «desde describir hasta definir, desde convencer hasta demostrar en forma lógica basados sobre definiciones» (Tall 1991, p.20). Existen discrepancias entre las definiciones formales que los estudiantes son capaces de citar y los criterios que utilizan realmente en el trabajo práctico. Ellos, transitan «desde una posición en la cual los conceptos tienen bases intuitivas fundadas en su experiencia, hasta una [posición] donde los conceptos son especificados por definiciones formales y sus propiedades reconstruidas a través de deducciones» (Tall, 1992, p. 495). También la transición es difícil por las dificultades con el razonamiento lógico y las demostraciones, las representaciones gráficas y la conexión de las diferentes representaciones de un objeto o concepto de una forma flexible.
La comunidad de investigación en educación matemática ha propiciado la creación de espacios reservados para la investigación en enseñanza y aprendizaje de la demostración y tópicos relacionados con los mismos, principalmente estudiandos en el nivel universitario. Esto lo podemos ver, por ejemplo en *Congress of European Research in Mathematics Education (CERME)*. En este foro en la edición 8 (Turquía en 2013) y edición 9 (Praga, 2015), entre los grupos temáticos de trabajo se incluyeron: *Argumentation and Proof* y *University Mathematics Education.* En dichos foros tuvimos presencia con reportes de investigación relacionados con este trabajo de tesis (ver Alvarado & González 2013b; González & Alvarado, 2015).

El propósito principal de nuestra investigación consiste en, por una parte, analizar los procesos del pensamiento matemático avanzado involucrados en el aprendizaje y manejo de la demostración matemática, además de indagar en los obstáculos, dificultades y errores más comunes que surgen en este contexto, y por otra parte, desarrollar en el aula posteriormente una secuencia de enseñanza previamente diseñada que promueva un aprendizaje profundo en el razonamiento matemático y los contenidos necesarios para lograr construir demostraciones, leerlas y comunicarlas.

Nuestra propuesta se caracteriza, principalmente, por conjugar de forma más equilibrada, la transición desde "describir" hacia "definir" y comprender la necesidad de emplear definiciones formales. Aquí, transitamos desde las diferentes formas intuitivas y conocimiento proveniente de la experiencia previa de los estudiantes. Las diferentes formas, son posibles gracias a que el conocimiento construido proviene de la interacción entre los estudiantes organizados en equipos. De la misma manera, el uso correcto de la lógica, se propicia desde la interacción con sus pares y sus experiencias con el lenguaje cotidiano, apoyando el uso correcto con la planeación de las tareas y con la discusión en gran grupo moderada por el profesor. También, a través de las tareas que los ponen de cara al conflicto, provocamos la necesidad de buscar un repertorio o espacio de ejemplos, no ejemplos, y contraejemplos para conjeturar y/o demostrar, así como la necesidad de buscar una profunda comprensión de los conceptos y proposiciones involucradas.
Entre la necesidad de conocimiento estratégico propiciamos que identifiquen la forma de una implicación, reconozcan enunciados que lo sean, identifiquen sus componentes (hipótesis y conclusión) y comprendan su función en el proceso de demostrar. También como conocimiento estratégico, buscamos que identifiquen cuáles definiciones, proposiciones y teoremas son importantes, y, nuestra propuesta didáctica los lleva a construir una demostración a través de los métodos de avance y retroceso (avanzando al enlazar deducciones o anticipando deducciones retrocediendo desde una establecida), contradicción y contrapositivo. Para estos últimos métodos, previamente los estudiantes trabajan para lograr construir negaciones. Finalmente pretendemos que, además de construir socialmente una demostración, la lleven a una forma condensada para ser comunicada y sean capaces de leerla y comprobar los argumentos utilizados en la misma.

El marco de trabajo que hemos elegido para desarrollar nuestra metodología proviene de la Teoría de las Situaciones Didácticas y su utilización para el diseño de Ingenierías Didácticas. En nuestro caso, nuestra Ingeniería tiene un claro carácter de diagnóstico y su implementación trata también de analizar las condiciones de implementación de tal diseño.

Como marco teórico de la comprensión de los objetos matemáticos en juego en esta ingeniería, hemos seguido la línea de investigación en Educación Matemática conocida como Pensamiento Matemático Avanzado y en relación a la demostración matemática. De entre los marcos teóricos contemporáneos que nos han apoyado son los proporcionados para diferenciar *imagen del concepto* y *definición del concepto* de Vinner & Tall (1981); los de las teorías de adquisición de conceptos (Sfard con sus distinciones de concepciones operacionales y estructurales, la teoría Acción, Proceso, Objeto y Esquema de Dubinsky (1991), los símbolos y proceptos de Gray & Tall (1991;1994) y de Tall (1991) acerca de los proceptos (proceso/concepto) al Pensamiento Matemático Avanzado) y sus interconexiones; los marcos teóricos sobre la necesidad de conocimiento estratégico y las demostraciones referenciales y sintácticas de Weber (2001) y Weber & Alcock (2004) ; así como clasificaciones de las etapas de desarrollo en la comprensión de la demostración, distintos manejos de las definiciones, definiciones formalmente operables, símbolos y proceptos, proceptos formales y demostración (Tall, 2002; Tall & Chin, 2002; Chin & Tall, 2002; Chin & Tall, 2000; Pinto & Tall, 1999; Bill & Tall, 1998, entre otros); y finalmente, los procesos de abstracción desde la construcción del conocimiento en forma individual y de la construcción del conocimiento compartido en forma grupal (e.g. Schwarz, Dreyfus & Hershkowitz, 2009; Hershkowitz, Schwarz & Dreyfus, 2001; Hershkowitz, Hadas, Dreyfus & Schwarz, 2007).

Nuestra investigación se sitúa en una perspectiva de Ingeniería Didáctica clásica, por lo que hemos considerado un punto del sistema didáctico cuyo funcionamiento se muestra, por razones de naturaleza diversa, poco satisfactorio. Se desarrolló un análisis de tres dimensiones de la demostración matemática para permitirnos analizar este concepto exteriormente, pues nuestra experiencia con las Matemáticas en el mundo educativo tiende a reducirlas a los objetos enseñados y a darles forma para que sean compatibles con la forma en que viven en dicho mundo:
Dimensión socioepistemológica: relativa a las características y evolución del saber en juego, tomando en cuenta la existencia de un vínculo entre la naturaleza del conocimiento que los estudiantes producen con las interacciones entre ellos y con las actividades mediante las cuales y en razón de las cuales dichos conocimientos son producidos.
Dimensión didáctica: relativa a las características de funcionamiento del sistema de enseñanza.
Dimensión cognitiva: relativa a las características cognitivas de los individuos hacia los que se dirige la enseñanza.
El análisis realizado nos ayudó a comprender cómo se ha desarrollado la enseñanza de la demostración como concepto y proceso desde una noción paramatemática o sobreentendida en el edificio matemático, en los diferentes niveles educativos y más aún, en la institución de nivel superior con el programa de Licenciatura en Matemáticas Aplicadas en la cual se implementa la ingeniería, además de las dificultades y obstáculos que su aprendizaje genera. Tomando en cuenta estas dimensiones, nos propusimos buscar las condiciones de existencia de un punto de funcionamiento más satisfactorio, y de cara tanto a la evolución científica y tecnológica, como a la evolución del propio concepto en didáctica de la matemática desde una concepción más amplia.

Para nuestro diseño y análisis, usando como referencia la concepción más amplia de demostración, trabajamos con tres versiones reconocidas como tal, la demostración acordada y aceptada por los pequeños grupos, la versión escrita y refinada y la versión condensada como una versión para comunicar a la manera formal de la disciplina.

De nuestra revisión de la forma de enseñanza de la demostración en el medio a desarrollar la ingeniería hemos encontrado que: se da por supuesto que los estudiantes ya están familiarizados con la demostración y con algunos conceptos, procesos y razonamientos necesarios para abordarlos. El profesor dicta la clase bajo el esquema, definición, teorema, demostración y en algunos casos aplicaciones. Seguirlo puede darles alguna idea para que los estudiantes poco a poco vayan entendiendo algunas sutilezas que les permiten avanzar. Aquí no encontramos un reparto de responsabilidades que permita una implicación mayor del estudiante en el proceso de reconstrucción de la demostración. Dado que en nuestra Ingeniería pretendemos familiarizarlos con la demostración, hemos planteado, para su desarrollo, la hipótesis de que, se puede dar una responsabilidad real a los estudiantes y, en consecuencia, uno de los objetivos del trabajo de Ingeniería ha sido el de verificar esta hipótesis mediante la construcción de un escenario de enseñanza en el que se organizan primero en pequeños grupos, trabajan con sus pares en las tareas diseñadas y es desde la interacción que emergen las soluciones a las tareas, para posteriormente ser compartidas y argumentadas en gran grupo con el apoyo del profesor. Así, las responsabilidades son *a priori* compartidas de forma óptima entre el profesor y los estudiantes. Al ser una ingeniería didáctica, la verificación de la hipótesis se dará a partir de la confrontación de esta construcción con los datos obtenidos de la experimentación.

De lo que se ha descrito en cuanto a la organización de la Ingeniería, con este problema de Ingeniería nos posicionamos en una situación que nos permitió desarrollar una organización del problema inicial en una estructura de cuatro bloques que fueron apoyados por los precedentes y estos en total comprendieron diez hojas de trabajo, que aunque fueron planeadas para diez sesiones de una hora en promedio cada una, esto en la práctica se extendió de manera importante en tiempo y número de sesiones. Esto es comprensible de acuerdo a la amplitud de conceptos, razonamientos y técnicas vinculados directamente con el tópico de nuestra elección. No obstante, decidimos mantener nuestro planteamiento inicial, dado que de no abordar alguno de los contenidos estaríamos incurriendo en el mismo problema que hemos identificado de dar por supuesto que los estudiantes ya están familiarizados con alguno de ellos. Como es de esperarse, esto también provocó que el trabajo de elaboración de la tesis se extendiera notablemente y en consecuencia los tiempos.

Entre nuestras elecciones consideramos recursos tecnológicos tales como el entorno Cabri Geometry como un recurso para apoyar la construcción de definiciones. También fue utilizada la calculadora y la Hoja Electrónica de Cálculo EXCEL como apoyo para realizar programas que generaran colecciones especiales de números, además de otros lenguajes de programación elegidos por los estudiantes como tareas extras complementarias o extensivas a las propuestas en la Ingeniería. Con ello se logró enriquecer las experiencias de los estudiantes ayudando a conformar la dimensión instrumental de nuestra investigación.

A la luz del modelo teórico Abstracción en Contexto (Schwarz, Dreyfus & Hershkowitz, 2009; Dreyfus, Hershkowitz, & Schwarz, 2015), nos planteamos observar las interacciones entre los estudiantes en pequeños grupos, entre estudiantes y herramientas tecnológicas y entre los estudiantes y el profesor durante la socialización y discusión de resultados. Este marco teórico es adecuado para el estudio de los procesos de construcción del conocimiento matemático abstracto, en nuestro caso conocimiento vinculado con la demostración matemática, ya que se produce en un contexto que incluye componentes matemáticos, curriculares y sociales específicos, así como un entorno de aprendizaje en particular de los estudiantes. De esta manera fue posible analizar las interacciones en el aula y las producciones de los alumnos derivadas de las mismas, documentando la aparición de construcciones nuevas para los estudiantes de los diferentes conceptos y procesos en el trabajo, tanto en pequeños grupos, como en gran grupo, a partir del modelo RBC-C, llamado así en virtud de las cuatro acciones epistémicas observables: de reconocimiento, de edificación, de construcción y de consolidación. Se ha podido constatar que los alumnos realizan R-acciones como reconocimiento de axiomas, errores, hipótesis, conclusiones así como el papel que cumplen cada uno de estos elementos en la demostración y además son capaces de establecer conjeturas. Las B-acciones se caracterizan por la generación de ejemplos con los cuáles van avanzando en el proceso de demostración. Y en las C-acciones muestran cómo organizan las ideas para explicarlas, para comunicarlas a otros y cuál es el resultado de sus razonamientos. A pesar de ser parte del marco teórico, el modelo RBC-C también sirve como la principal herramienta metodológica de la Abstracción en Contexto.

Consideramos que nuestra investigación tiene como objetivo el de mejorar el aprendizaje de las Matemáticas, lo cual implica mejorar su enseñanza y, por tanto, aportar elementos teóricos y prácticos que permitan incrementar la eficacia de una formación inicial de los estudiantes universitarios que les facilite su desarrollo profesional.
Para lograr que los resultados sean accesibles a un mayor número de personas hemos considerado algunas acciones derivadas de este trabajo, para relacionar la investigación y la práctica. Entre otras, en la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas de la UJED se ha propiciado que se implementen las secuencias didácticas en cursos preparatorios de acceso al primer semestre, con modificaciones derivadas del análisis detallado realizado.

Los contenidos de la Tesis Doctoral que se presenta, se organizan de la forma que precisamos a continuación:

En el CAPÍTULO 1, referente al problema de investigación. Se presentan algunas cuestiones que motivan y dirigen la elección de nuestro problema de investigación, así como el diseño, organización, objetivos e hipótesis implícitas (al tratarse de una ingeniería didáctica) que guiarán su desarrollo.

El CAPÍTULO 2, se relacionan el Pensamiento Matemático Avanzado y la Demostración Matemática. Ahí presentamos una revisión de la literatura sobre los procesos de pensamiento matemático avanzado y de las investigaciones en educación matemática que se ocupan de la enseñanza-aprendizaje del proceso de demostrar y de otros procesos vinculados tales como; definir, conjeturar y construir ejemplos, no ejemplos y contraejemplos.

Para el CAPÍTULO 3 se reserva el estudio exploratorio y el diseño de la Ingeniería Didáctica. Iniciamos revisando algunas investigaciones previas que nos van a dar la clave sobre las dificultades a las que se enfrentan los alumnos cuando tienen que realizar una demostración. Posteriormente, en una segunda parte, se presenta un estudio exploratorio con estudiantes de licenciatura, para sacar a la luz algunas de esas dificultades y otras más, tratando de realizar una descripción detallada de algunos de los elementos que utilizan en su razonamiento.
También al final, en este capítulo, se presentan dos apartados relacionados con el diseño de la Ingeniería Didáctica. El primero concentra los fundamentos teóricos y las características principales del diseño de Ingenierías Didácticas. El segundo apartado expone las líneas generales

que se han seguido para el diseño de nuestra Ingeniería Didáctica, describiendo el contexto, características y restricciones de la implementación. Se finaliza con un análisis a priori de las sesiones diseñadas agrupadas en cuatro bloques de acuerdo con su propósito.

En el CAPÍTULO 4, se documenta la descripción y análisis de la implementación de la Ingeniería. Primero se concentra el análisis de datos obtenidos durante la puesta en práctica de nuestra Ingeniería Didáctica con estudiantes de nuevo ingreso a la licenciatura en Matemáticas Aplicadas. Después de describir los instrumentos de toma de datos, se realiza el análisis a posteriori de las sesiones desarrolladas organizadas en cuatro bloques y siguiendo las interacciones en pequeños grupos, sus registros escritos y finalmente la socialización conducida por el profesor.

El CAPÍTULO 5, siguiendo la Ingeniería Didáctica como metodología de investigación, se concentra la confrontación a priori de las secuencias didácticas propuestas y a posteriori con el análisis de la puesta en práctica de la propia ingeniería como diseño derivado de las necesidades detectadas en el estudio exploratorio. y las conclusiones de la misma. También, se presentan aspectos longitudinales que consideramos han sido cruciales en esta ingeniería para desarrollar competencias demostrativas en los estudiantes.
Se concluye este capítulo y este trabajo, presentando una valoración y reflexión finales acerca de la investigación realizada. Se hace un balance sobre el grado de alcance de los objetivos propuestos, remarcando algunos de nuestros resultados. Posteriormente, se realiza una evaluación global sobre nuestra propuesta de enseñanza y la viabilidad de su implementación en la enseñanza inicial Universitaria en carreras de matemáticas y áreas afines. Sigue una clasificación de las dificultades, obstáculos y errores que se han identificado en el análisis de datos, mostrando la resistencia de algunos de éstos. Finaliza el capítulo con algunas cuestiones que nuestra investigación plantea y que se pueden constituir en líneas de investigación futuras.

Este documento se cierra con el ANEXO A que concentra el material empleado durante las sesiones didácticas de la Ingeniería y con las REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS de los textos utilizados para su elaboración y con un resumen en inglés de esta Tesis Doctoral.

Capítulo 1 El problema de investigación

"La esencia de la matemática está en las demostraciones"
(Ross, 1998, p 254).

En este capítulo se presentan algunas cuestiones que motivan y dirigen la elección de nuestro problema de investigación, así como el diseño, organización, objetivos e hipótesis implícitas, al tratarse de una ingeniería didáctica, que guiarán su desarrollo.

1.1 Antecedentes y justificación

La matemática además de ser un cuerpo estructurado de conocimientos es una actividad cuyo núcleo principal lo constituye la demostración. Ésta, remonta sus orígenes al surgimiento mismo de la matemática, y toma forma con la matemática de la antigua Grecia aproximadamente en los siglos IV y III a.C., donde la deducción matemática es considerada ya como canon de la demostración estricta, especialmente en Geometría. Ejemplos en donde no es posible la verificación o comprobación directa del resultado propician la incorporación a la matemática del método deductivo como criterio de validación, en cierta forma para sustituir una comprobación que estaba ausente y con la intención filosófica de construir una ciencia teórica cuya meta era el conocimiento de la verdad [Metaphysics, citado por Vega, 1992]. Así, a lo largo de nuestra historia, ha sido característico que los que consideraban a la demostración sistemática como forma concluyente para constituir un cuerpo de conocimientos, miraban con mucho aprecio hacia las matemáticas, y que quienes no compartían esta opinión, pasaban de la matemática misma.

La demostración en matemáticas es un objeto de naturaleza extremadamente compleja. Se ha desarrollado a la par del ser humano, dada la necesidad de contar con un medio para explicar, justificar y comunicar de manera convincente ideas, fenómenos, hechos, etc. En su desarrollo ha sufrido múltiples cambios desde el nacimiento del método deductivo (cuya función era la de explicar como sinónimo de demostrar) hasta nuestros días. Estos cambios se han dado a nivel estructural abanderados por célebres matemáticos y esta labor científica ha tenido grandes repercusiones en el papel de la demostración en el aula.

En las últimas décadas la demostración ha asumido un papel cada vez menos importante en la enseñanza de matemáticas preuniversitarias. Muchos docentes creen que la demostración no es fundamental en la teoría y en la práctica de la matemática escolar y que su uso no favorece, por sí mismo el aprendizaje.

Estas creencias son atribuibles a las diferentes posturas acerca del nivel de rigor, las demostraciones asistidas por computadora, a la importancia que ha tomado la experimentación en matemáticas y a la invención de diversos tipos de prueba que se alejan de los métodos tradicionales. Por mencionar algunos, las pruebas holográficas y a conocimiento cero, que se enmarcan en los sistemas de prueba interactivos (Goldwasser, Micali, & Rackoff, 1989).

Hanna (1996) expresa su preocupación por la pérdida de valor de la demostración y manifiesta que con el actual énfasis en la enseñanza "significativa" de las matemáticas, los docentes son alentados a dedicar atención a la explicación de los conceptos matemáticos y a los estudiantes se les pide justificar los resultados propios y las afirmaciones propias. Este parecería ser el clima justo para hacer de la mayor parte de las demostraciones un instrumento de explicación y para ejercitarlas como una forma definitiva de justificación matemática. Pero para que esto suceda, los estudiantes deben familiarizarse con los criterios del razonamiento matemático: en otras palabras, se debe enseñar la demostración. Esta manifestación es una excelente respuesta a quienes piensan haber resuelto los añejos problemas de la enseñanza de la demostración limitándose simplemente a no tomarla en consideración:

En esa misma fuente se cita a Greeno (1994), en relación con los malos entendidos ligados a la naturaleza de la demostración:

> En relación a la práctica didáctica, estoy alarmado por la tendencia de hacer desaparecer la demostración en la didáctica de las matemáticas preuniversitarias y creo que a esto se podría poner remedio mediante una mayor toma de conciencia del significado epistemológico de la demostración matemática (p.270).

De la misma manera Schoenfeld (1994), contestando la pregunta *"¿Tenemos necesidad de la demostración en didáctica de las matemáticas?"*, da una respuesta contundente: *"Absolutamente. ¿Debo decir más?, Absolutamente."*

Por esta razón consideramos de gran relevancia estudiarla desde diferentes perspectivas para su manejo, comprensión y conocimiento. En las diversas teorías y prácticas de la enseñanza de la matemática hay diferentes formas de entender qué es la demostración, sus funciones y la finalidad de su enseñanza. Dhombres (1985) al enfatizar el enfoque global de Judith Grabiner en su análisis del libro de Cauchy fortalece los anteriores comentarios.

> En otras palabras, para exponer la originalidad de un matemático, no solamente tenemos que considerar las definiciones introducidas y las innovaciones específicas hechas en la terminología, sino que tenemos que ver qué usos prácticos se hacen de ellas en las demostraciones. Esta es una actitud decente y al grano que no siempre ha sido respetada por los historiadores de las matemáticas, particularmente cuando se ven enfrentados a la tarea de describir nuevas rutas en la rigorización de algunas teorías matemáticas.

Por otra parte, desde la década de los 50´s, la idea de que los estudiantes pueden, en algún sentido, pensar como matemáticos ha sido defendida por muchos educadores, psicólogos y matemáticos (Beberman, 1958; Romberg & Kaput, 1999; Schoenfeld, 1985; Schoenfeld, 1988; Lave, Smith, & Butler,1988; Brown, Collins, & Duguid, 1989; Feurzeig, 1988; Greeno, 1988; Lampert, 1990 y1990a). Un tema central es que los procesos de conocimiento de los matemáticos constituyen pensamiento matemático genuino y de manera similar se debería establecer un estandar para que los estudiantes pudieran emularlo. Por ejemplo, para Schoenfeld (1988) los estudiantes deben desarrollar la estética del matemático o bien ver el mundo con ojos de matemático. Por su parte, Lampert (1990) quiere que sus estudiantes conozcan la matemática igual que se conoce en la matemática como disciplina. Mientras que Brown, Collins, & Duguid (1989) consideran que los estudiantes pueden verse como "aprendiz cognitivo" bajo la tutela de un matemático.

Por su parte Tyson (1994), en su tesis doctoral considera problemático el grado en que la metáfora de estudiantes como matemáticos borra importantes distinciones entre ellos. No obstante, dado que el enfoque en nuestro trabajo es hacia estudiantes para matemáticos, consideramos que tales distinciones no representarían un problema.

Así pues, la motivación de este trabajo descansa en la metáfora de los estudiantes como matemáticos, en el interés de centrarnos en el pensamiento del estudiante, en la no asunción del dominio de las bases necesarias para acceder a la demostración como proceso y en dar lugar a la demostración matemática como objeto de estudio y como parte esencial para comunicar el conocimiento en matemáticas. A continuación se justifica nuestra elección de manera resumida esencialmente en los siguientes puntos:

- La principal dificultad a la que se enfrentan el grupo de docentes de matemáticas básicas de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas de la Universidad Juárez del Estado de Durango (México), UJED, es que los estudiantes ingresan con muy pocas experiencias significativas relacionadas con la demostración y al no tener la noción desarrollada, difícilmente pueden construir conocimientos en las diferentes materias de matemáticas básicas.
- La demostración matemática no aparece como objeto de estudio en el curriculum previo a la licenciatura. No obstante, las actuales reformas integrales de educación básica y de educación media superior (RIES y RIEMS), especificamente en México, demandan de los estudiantes competencias que pueden desarrollarse mediante el abordaje de la demostración matemática (e.g. la modelación, el planteamiento y la resolución de problemas, la argumentación, la comunicación y el manejo de técnicas, que provoquen la emergencia y comprensión de los conceptos poniendo en juego la intuición, a la vez que favorezcan el uso de herramientas matemáticas y científicas para generar, ampliar, reformular o rechazar las ideas involucradas, así como conjeturar, generalizar y validar el conocimiento, entre otras).
- La incapacidad de los estudiantes para comunicar demostraciones de manera comprensible es un problema tanto para los estudiantes como para los profesores del medio en que desarrolla esta investigación y seguramente en otros medios. Los estudiantes esperan realizar un curso superficial mediante el que puedan comprender algo del material presentado por el profesor o al menos un examen que no incluya demostraciones. Esta complicidad entre estudiantes y profesores llega a tener consecuencias desfavorables para ambos. Por parte de los estudiantes por la carencia de dominio y en el caso del profesor, se limita el avance y profundización en los temas, pero sin tener en cuenta que la demostración sea un elemento clave en matemáticas, probablemente el más característico, y que los estudiantes no lo tienen integrado.
- Para quienes hemos tenido la experiencia de enseñar matemáticas formales, podemos decir que hacer matemáticas involucra resolución de problemas, abstracción, invención y demostración, y seguramente podemos decir también, que comprender los elementos que constituyen una demostración matemática sólida es un obstáculo para el estudiante.
- Actualmente son muchos los investigadores en educación matemática que han prestado atención a la demostración matemática, que reclaman que se preste mayor importancia en el curriculum y que han presentado herramientas teóricas para el estudio de la construcción de conocimiento necesario para el abordaje de la demostración (e.g. Harel, Schoenfeld, Lampert, Greeno, Hanna, Tall, Vinner, Marrioti, Dreyfus, etc) y dado el reciente interés en investigar la demostración matemática Reid & Knipping (2010) clasifican las diferentes perspectivas de investigación matemática en este tópico.
- La estructura jerárquica de la demostración es apropiada para nuestros propósitos, en virtud de que, existen conceptos y procesos que pueden construirse sobre las bases de otros más básicos. Así, es posible un diseño de tareas secuenciadas que ofrezcan oportunidades para construir y consolidar un conjunto de conceptos y procesos.

Finalmente, a partir de los puntos anteriores, nuestra pretensión en esta investigación es comprender los elementos necesarios para desarrollar la noción de la demostración matemática en los estudiantes y utilizar esta comprensión para elaborar una propuesta que sea implementada de manera previa al acceso a la licenciatura.

1.2 Delimitación del problema y objetivos de investigación

El estudio de la demostración matemática se enmarca en la línea de Procesos del Pensamiento Matemático Avanzado (Advanced Mathematical Thinking Processes). De Guzmán (1997) menciona la necesidad de investigar en: 1) la utilización de modelos visuales diferentes, 2) en la aparente transparencia y en la relativa opacidad de los problemas de transmisión, 3) la demostración a lo largo del tiempo y la demostración hoy y 4) el papel de la demostración en los procesos de enseñanza y aprendizaje.
En ese sentido, y a partir de la justificación realizada en el apartado previo, consideramos pertinente tomar a la demostración matemática como objeto de estudio en este trabajo titulado:

El estatus de la Demostración Matemática (DM) en el aula: de una noción paramatemática al diseño de una situación didáctica.

Nuestro interés se centra en intervenir en el salón de clases, con estudiantes de nuevo ingreso a la licenciatura, para tratar de cambiar el estatus de la demostración. Nuestro propósito primordial es, impulsar en los estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas de la Universidad Juárez del Estado de Durango, México (UJED), el desarrollo de competencias demostrativas, procurándoles herramientas y experiencias de aprendizaje que les permitan una amplia concepción de la demostración, que la doten de significado y los acerque a la comprensión de su naturaleza y al rol que juega al "hacer" matemáticas y en el desarrollo de la misma. Por esta razón nuestra cuestión principal es: Diseñar una Ingeniería Didáctica (ID) y explorar su funcionamiento. Para ello, nos planteamos los siguientes objetivos:

Objetivos

1. Realizar una aproximación socio-epistemológica de la DM y de su lugar en la práctica profesional del matemático. 2. Aproximarnos a la naturaleza cognitiva de la DM. 3. Realizar un estudio exploratorio con estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas. 4.Diseñar e implementar una ID para impulsar el desarrollo de competencias demostrativas que respondan a las exigencias del contexto y la construcción del conocimiento base necesario.

Como es una investigación de corte cualitativo no se especifican hipótesis. No obstante, al tratarse de una ingeniería didáctica se tienen de manera implícita las hipótesis siguientes:

H1. La ID prepara al estudiante con técnicas, manejo de lenguaje y conocimiento teórico mayor que permite que se comprometan, enfrenten la tarea de demostrar y la acepten como una forma definitiva de justificación matemática. H2. Desde el diseño y organización de los estudiantes en pequeños grupos y posteriormente en gran grupo conducidos por el profesor es posible que el estudiante participe en la construcción de conocimiento compartido de la demostración. Más aún, es posible documentar la construcción y consolidación del conocimiento necesario para el manejo de la demostración.

1.3 Diseño y enfoque de la investigación

Reid & Knipping (2010) clasifican las perspectivas de investigación en educación matemática sobre enseñanza, aprendizaje, demostración (como objeto) y demostrar (como proceso), de acuerdo a tres dimensiones: *el significado, la filosofía y la amplitud de la categoría "demostrar".*

La dimensión del significado de "demostración" se conforma a su vez en: demostrar como demostraciones de texto, demostrar como proceso de razonamiento y demostrar como un discurso social.

Para la filosofía demostrar distingue tres visiones: A priorista, infalibilista, cuasi-empirista y social-constructivista. La primera se caracteriza por la creencia en objetos platónicos (objetos matemáticos reales que existen independientemente de la cognición humana) que se precisa y completa por estructuras axiomáticas, junto con la creencia de que las inferencias deductivas de esos axiomas preservan verdad. Reid & Knipping (2010)nos dicen que desde el descubrimiento de las geometrías no euclidianas "la mayoría de los matemáticos" han abandonado esta opinión. En contraste, un infalibilista, según los autores, acepta la naturaleza de la verdad, la conservación de inferencias deductivas, pero rechaza la sugerencia de que existen objetos matemáticos en algún sentido platónico. Cuasi-empiristas, por el contrario, están de acuerdo con los infalibilistas acerca de la no existencia de los objetos matemáticos, pero rechazan la visión estándar de la relación entre teoremas y axiomas: el razonamiento deductivo no transmite la verdad de los axiomas de teoremas, más bien, a raíz de Lakatos (1976), la falsedad se transmite de teoremas de axiomas. Reid & Knipping caracterizan su posición final, adoptada por los constructivistas sociales, que están asociados con el rechazo de la condición única del método deductivo. Como deducción es sólo una construcción social, en este punto de vista lo que cuenta como un argumento válido varía de una comunidad a otra y de una cultura a otra.

Finalmente la amplitud de "demostrar" posee dos sentidos: estrecho y amplio. Es decir, el sentido estrecho admite argumentos formales a la manera de los matemáticos profesionales. Mientras que el sentido amplio admite argumentos convincentes de acuerdo a la comunidad de práctica (e.g. el salón de clase).

De acuerdo con esta clasificación el enfoque de nuestro trabajo se caracteriza por el significado de "demostración" como demostraciones de texto y procesos de razonamiento, con una filosofía social-constructivista y una visión estrecha de la "demostración".

Reid y Knipping, con la intención de clarificar su clasificación, presentan diferentes ejemplos de investigaciones que combinan las diferentes categorías. Un ejemplo que presentan de nuestra combinación es el de Mariotti (2006). Su perspectiva epistemológica corresponde con la del tipo social constructivista. El concepto de demostración se visualiza envuelto en el tiempo, e integrando dos elementos: la validez lógica y la función explicativa apreciándose que en diferentes períodos históricos uno u otro de estos aspectos ha tomado fuerza.

Una idea clave de su pensamiento es que "no es posible asirse al sentido de una *demostración matemática* sin vincularla a dos elementos: una *proposición* (enunciado) y una *teoría* general " (p. 184). La teoría de referencia es el marco en el cual la demostración adquiere sentido, incluyendo las reglas lógicas, las definiciones utilizadas y los postulados asumidos.

Lo que se cuenta como una demostración (objeto) depende de sobre qué postulados está aceptada la verdad y que reglas de inferencia se aceptan como válidas. Las reglas de razonamiento varían en relación con el tiempo y de comunidad a comunidad, y la teoría de referencia de la cual forma parte debe ser entendida para un teorema y su demostración.

En su punto de vista estrecho de la demostración se puede ver que las pruebas son al menos semi-formales y un aspecto importante es la formalización de argumentos informales. Aunque las demostraciones sean parte en el discurso de la clase, un ejercicio final para los estudiantes es ensayar a producir una demostración escrita que corresponda con el discurso dado.

En esta investigación pretendemos desarrollar el significado de la demostración en los estudiantes principiantes universitarios como: medio convincente para explicar, justificar y comunicar ideas, fenómenos, hechos, etc. Tal significado será desarrollado centrado desde el pensamiento de los estudiantes, para afinar sus nociones de "medio convincente" primero buscando explicaciones para sí mismo, después para sus compañeros de equipo o pequeño grupo, luego para otros equipos que han trabajado sobre el mismo problema o idea desde otra perspectiva, seguidamente a un gran grupo y a su profesor, para finalmente lograr una versión para comunicarla a otros que no han participado de la discusión.

Para anticipar los escenarios se realizó primero una exploración de la noción de demostración en los estudiantes del contexto para la identificación de contenidos y actividades claves. En base a lo anterior se desarrolla una propuesta de enseñanza y finalmente se presentan evidencias de la vialidad de la misma y cuestiones para mejorar.

La metodología es la de la ingeniería didáctica, así los métodos utilizados para la recogida de datos, su interpretación, diagnóstico, recomendaciones para la acción y diseño e implementación de secuencias didácticas son de naturaleza cualitativa principalmente. Además de herramientas metodológicas como el Modelo de Toulmin para análisis de argumentos y el Modelo RBC para documentar la construcción del conocimiento.

1.3.1 Organización de la investigación

La organización de la investigación está estructurada de la siguiente manera:

FASE I Elección de la DM como parcela para investigar. Definición del problema de estudio. Lectura de trabajos de investigación relacionados, exploración en la línea de Pensamiento Matemático Avanzado, bibliografía base en Educación Matemática y búsqueda de artículos sobre el tema en revistas especializadas en el área.

FASE II Análisis Preliminar: En esta fase nuestro cuadro de referencia esta dado en las siguientes cuatro direcciones:

- Análisis socio-epistemológico de la DM.
- Revisión del cuadro teórico didáctico de la DM y del Pensamiento Matemático Avanzado.
- Análisis del medio; ventajas y restricciones para la realización didáctica.
- Análisis de la *imagen del concepto* que tienen los estudiantes de la DM, las dificultades y obstáculos que determinan su evolución.

FASE III Concepción y análisis a priori: En base a los resultados del estudio exploratorio que comprende los últimos dos puntos de la fase anterior se diseñará la experiencia didáctica y las situaciones problema que respondan a las necesidades demandadas en la enseñanza de la DM en el medio mencionado. Para su diseño se tomarán en cuenta a Solow (2004), De Guzmán (2004) y Franklin & Daoud (1988) quienes han presentado propuestas de enseñanza de la demostración como parte de la formación inicial universitaria. También se enriquecerá con las conclusiones y recomendaciones producto de investigaciones en esta dirección.

FASE IV Implementación de la ingeniería didáctica en un grupo de nuevo ingreso al programa de licenciatura y análisis de la construcción del conocimiento compartido del grupo sobre la demostración.
FASE V Análisis a posteriori y evaluación: Evaluación y análisis de las situaciones problema asociadas al desarrollo de las secuencias didácticas mediante el análisis de sesiones videograbadas, producciones de los estudiantes y entrevistas. Diseño, implementación y evaluación de una estrategia para caracterizar el estado final del grupo donde se aplicará la ingeniería didáctica.
FASE VI Redacción final de la memoria.

Capítulo 2. Pensamiento Matemático Avanzado y Demostración Matemática

Caricaturizando "el matemático ideal":

Descansa su fe sobre demostraciones rigurosas;
cree que la diferencia entre una demostración correcta
y una incorrecta es una inconfundible y decisiva diferencia.
Puede creer que no hay condena más crítica que decir de un estudiante:
"Él ni siquiera conoce lo qué es una demostración".
Ya él es capaz de dar una explicación no coherente de qué significa rigor,
o qué se requiere para hacer una demostración rigurosa. (Davis & Hersh, 1981, p. 34)

En este capítulo presentamos una revisión de la literatura sobre los procesos de pensamiento matemático avanzado y de las investigaciones en educación matemática que se ocupan de la enseñanza-aprendizaje del proceso de demostrar y de otros procesos vinculados tales como definir, conjeturar y construir ejemplos, no ejemplos y contraejemplos.

2.1 Estado del arte

La Educación Matemática se ocupa de investigar los problemas sobre la enseñanza y el aprendizaje proporcionando marcos teóricos explicativos para la resolución de éstos. La investigación en esta área se ha incrementado notablemente en las últimas décadas, lo que se ve reflejado en el surgimiento de nuevas líneas de investigación. Dentro de éstas, podemos destacar la de Procesos del Pensamiento Matemático Avanzado (Advanced Mathematical Thinking Processes), línea que surge para complementar el previo énfasis de *Psychology of Mathematics Education (PME)*, sobre el pensamiento matemático elemental, y que lideraron algunos de sus miembros, principalmente Gontran Ervynck y David Tall. Las primeras producciones del grupo de trabajo en Pensamiento Matemático Avanzado fueron presentadas en Tall (1991).
Harel, Selden, Selden, & Selden (2006) hacen un recorrido por las diferentes investigaciones en esta vertiente, de las ideas teóricas surgidas y consideraciones que marcan directrices para futuras investigaciones. Tomando como base este recorrido rescataremos y enriqueceremos lo que a nuestro juicio apoya este trabajo.
La búsqueda de una descripción significativa de la comprensión es sumamente joven. Se puede decir que se inicia a mediados del siglo pasado. En las últimas tres décadas se han desarrollado nuevas e integradoras perspectivas un tanto alejadas de la distinción de Richard Skemp entre la comprensión instrumental y la relacional. En la línea de Pensamiento Matemático Avanzado los progresos en esta dirección son muy notables. De entre los marcos teóricos contemporáneos intentaremos describir los proporcionados por las investigaciones que permiten diferenciar *imagen del concepto* y *definición del concepto* de Vinner & Tall (1981).
En cuanto a la adquisición de conceptos mencionamos las distinciones de Sfart entre concepciones operacionales y estructurales, la teoría APOS (APOE) de Dubinsky y sus colegas, los símbolos y proceptos de Gray y Tall y de Tall de los proceptos al PMA. Mencionamos también las interconexiones entre las distintas teorías, los elementos que las distinguen de otras según sus orígenes, organizaciones y relaciones con otros marcos teóricos.

Por otro lado, con la demostración matemática como directriz, presentamos marcos teóricos sobre la necesidad de conocimiento estratégico y las demostraciones referenciales y sintácticas de Weber y Alcock, así como clasificaciones de las etapas de desarrollo en la comprensión de la demostración, distintos manejos de las definiciones, definiciones formalmente operables, símbolos y proceptos, proceptos formales y demostración de Tall, Pinto, Bill y Chin entre otros.
Finalmente presentamos información acerca de los procesos de abstracción desde la construcción del conocimiento en forma individual y de la construcción del conocimiento compartido en forma grupal (e.g. Dreyfus, Hershkowitz, Hadas, Schwarz entre otros).

2.1.1 Distinción entre imagen del concepto y definición del concepto

A finales de los 70's principios de los 80's algunos miembros de la PME fijan su atención a la distinción entre cómo los conceptos matemáticos se definen y cómo se utilizan (Vinner & Hershkowitz, 1980). En referencia a la geometría, introducen los términos ***imagen del concepto y definición del concepto,*** para distinguir entre un concepto formal, su definición pública, y una correspondiente estructura mental individual que consiste de todos sus ejemplos asociados, no ejemplos, hechos y relaciones. Esta distinción fue más elaborada por Tall & Vinner (1981)[1]. Para ellos la ***imagen del concepto*** describe una estructura cognitiva individual asociada con un concepto; esto incluye todas las asociaciones de cuadros mentales, propiedades y procesos. La imagen de un concepto se construye con los años a través de la experiencia y cambia conforme el individuo tiene nuevos estímulos. Por otra parte *la* ***definición del concepto,*** se refiere a la forma en que las palabras se utilizan para especificar un concepto. La definición de un concepto puede ser personal o formal. Éste posee las características para ser institucionalizado a la larga por la comunidad matemática: un ejemplo es el concepto de límite en función de ε y δ.
En diferentes investigaciones se ha encontrado que realzar la imagen del concepto da sentido a la definición formal del concepto y sostienen que una forma de instrucción que se ocupe de enriquecer la imagen que tienen los estudiantes del concepto ayuda a desarrollar la habilidad para visualizar conceptos matemáticos. Dreyfus & Eisenberg (1986) y Dreyfus & Eisenberg (1990) muestran que las mayores dificultades de los estudiantes se refieren a la información visual en forma de gráficas. Más aún, cuando logran superar tal dificultad y están matemáticamente maduros y con la capacidad de pensar visualmente están poco dispuestos a visualizar conceptos matemáticos. También Dreyfus y Eisenberg (1986), comparando procesos visuales con procesos analíticos, sugieren varias razones por las que los estudiantes prefieren los procesos analíticos más tarde. Una de las razones que mencionan es que los maestros convienen con sus estudiantes –implícita o explícitamente- la creencia de que el razonamiento visual es inferior al razonamiento analítico. Otros especialistas como Presmeg (1986), Presmeg (1986a) y Vinner (1989) han llegado a conclusiones similares. Por otra parte, Zazkis, Dubinsky, & Dautermann (1996) indican que «quizás lo más dañino, más que la dificultad con la visualización, es que los estudiantes muestran una ausencia de habilidad para conectar un diagrama con su representación simbólica», un proceso que consideran un compañero esencial para la visualización.
Por su parte Dahlberg & Housman (1997) señalan que la tendencia de los estudiantes a evocar parte de su imagen del concepto, en lugar de su definición, cuando responden a una variedad de tareas matemáticas relacionadas no es necesariamente malo; establecen que, en ocasiones, es deseable tener a mano la riqueza de las imágenes de los conceptos. Por ejemplo, en las series de

[1] Este artículo fue seleccionado para incluirse en un volumen de 17 "clásicos" de la literatura en investigación en educación matemática (Carpenter, Dossey & Koehler, 2004)

funciones uniformemente convergentes que se construyen vía definiciones formales, la habilidad para usar tales definiciones, construir ejemplos y contraejemplos resulta provechoso para edificar sobre la imagen del concepto del estudiante.

2.1.2 Adquisición de conceptos

En este apartado hacemos un recorrido por tres teorías. 1) Concepciones operacionales y estructurales, 2) El modelo Acción, Proceso, Objeto y Esquema (APOS / APOE), 3) Símbolos y Proceptos.

2.1.2.1 Concepciones operacionales y estructurales

Para Ana Sfard, muchas nociones matemáticas a lo largo de la evolución histórica han sido concebidas operacionalmente mucho antes de que se formularan sus definiciones estructurales y representaciones[2] y, para ella, puede que aprender procesos siga un patrón similar. En esta dirección, Sfard (1991) nota que la formación de una concepción estructural es muy larga, a menudo un proceso extremadamente difícil y postula que esto se filtra en una jerarquía de tres etapas: *Interiorización, Condensación y Reificación.* En la etapa de *interiorización* un aprendiz llega a capacitarse con cálculos y procedimientos (por ejemplo, manipulaciones algebraicas con una variedad de funciones específicas). En la fase de *condensación,* el aprendiz se capacita más pensando el proceso como un todo, sin entrar en detalles (por ejemplo viendo una función en términos de entradas y salidas). Mientras las dos primerasetapas de adquisición ocurren gradualmente, la *reificación* requiere «un cambio ontológico - una capacidad repentina de ver algo familiar con una luz totalmente nueva» (por ejemplo las funciones llegan a ser objetos, esto es, pueden interpretarse y transformarse).
En este sentido, Sfard (1989) y Sfard (1992) ha enunciado dos principios pedagógicos: (1) Los conceptos nuevos no deben introducirse en términos estructurales. (2) Una aproximación estructural no debe adoptarse mientras el estudiante pueda enfrentar las situaciones problemáticas que involucren al concepto en juego sin ella. Más aún, observó que «las concepciones [iniciales] de los estudiantes parecen más cercanas a lo operacional que a lo estructural» y que muchos estudiantes, cuando inician el estudio de conceptos vía definiciones formales (estructural), pueden desarrollar concepciones pseudoestructurales (Sfard, 1992, pp.70-75). Por ejemplo, introduciendo funciones como conjuntos de pares ordenados, los estudiantes de secundaria tienden a asociar funciones con fórmulas algebraicas, viéndolas a ambas como algoritmos computacionales y como relaciones estáticas (Sfard,1989, p. 155).

Mientras que estos principios son razonables aplicados a estudiantes de secundaria y preparatoria, para alumnos de cursos más avanzados se introducen nuevos conceptos por la vía formal, definiciones estructurales y se debe de algún modo aprender a lidiar con esto (Alcock & Simpson, 1999). Desde la explicación de la adquisición del concepto operacional-estructural, Sfard (1998) ha observado que esta opinión es parte de una teoría más grande "metáfora de la adquisición" y lo ha contrastado con la más reciente "metáfora de participación", en la cual el discurso, la comunicación, la negociación, y la participación en una comunidad matemática son dominantes.

[2] Se hace referencia a nociones de matemáticas escolares preuniversitarias.

2.1.2.2 Acción, Proceso, Objeto y Esquema

Dubinsky, Hawks, & Nichols (1989) y Asiala, Brown , DeVries, Dubinsky, Mathews , & Thomas (1996) han investigado de manera similar a la distinción de proceso-objeto, ampliándolo para incluir cuatro clases de concepciones mentales: *Acción, Proceso, Objeto, y Esquema* (referida como APOS en la literatura en inglés y APOE en alguna literatura en español). Las cuestiones de la comprensión de conceptos por parte de los estudiantes están enmarcardas dentro de una extensión de la teoría Piagetiana de abstracción reflexiva. Además de estas concepciones mentales se pueden considerar cuatro tipos de construcciones mentales desde la abstracción reflexiva: Actos de ***interiorización*, *coordinación, encapsulación y generalización*.**
Interiorización es la traslación de una sucesión de acciones materiales o mentales en un todo repetible. ***Coordinación*** es la construcción de un nuevo proceso desde dos o más procesos existentes. ***Encapsulación*** es la conversión de un proceso dinámico en un proceso estático y su reminiscencia de reificación. ***Generalización*** es la aplicación de un esquema existente a una más amplia colección de fenómenos (Dubinsky, 1991).
Para ejemplificar tomamos el concepto de función. Una concepción de ***acción*** de función se produce cuando los estudiantes la tratan como series de comandos (acciones) para su funcionamiento; por ejemplo interpretando $f(x)=x^2 + 1$ como "primero elevar al cuadrado un número dado, y enseguida agregarle un uno". Una concepción de ***proceso*** de la función permite al individuo pensar las funciones recibiendo entradas, realizando una o más operaciones sobre éstas y regresando salidas. Una concepción de ***objeto*** de función resulta cuando un individuo, reflexiona sobre operaciones aplicadas en el proceso, "llega a ser cuidadoso del proceso como un todo, que realiza las transformaciones (si son acciones o procesos) pueden actuar sobre esto" (Asiala, Brown , DeVries, Dubinsky, Mathews , & Thomas, 1996, p. 11). Un ***esquema*** es una construcción mental individual que conecta procesos y objetos relacionados, y aparece en forma un tanto similar a la imagen del individuo acerca del concepto (Tall & Vinner, 1981), o como parte de éste. Debería notarse que la noción de "esquema" es un constructo que se ha usado extensivamente en la literatura ofreciendo modelos conceptuales para describir conductas de los estudiantes en matemáticas tanto elementales como avanzadas. De los primeros especialistas en usarlo podemos mencionar a Skemp (1985) mediante su *teoría varifocal* de conceptos cognitivos, un concepto puede concebirse como un todo global o con varios niveles detallados (Skemp, 1979), anticipando así la idea posterior de construcción objeto-esquema.
Las concepciones de acción aunque sumamente limitadas, «forman el principio crucial de entendimiento de un concepto» «y las actividades diseñadas para ayudar a los estudiantes a construir acciones» forman un importante principio del acercamiento pedagógico de Asiala, Brown , DeVries, Dubinsky, Mathews & Thomas (1996, p. 10). Para pasar de una acción a una concepción proceso de función, se necesita reflexionar e interiorizar varias acciones repetibles, como la evaluación de funciones algebraicas, hasta que se vea una función como una transformación que acepta salidas de producción y entradas. Para pasar de un proceso a la concepción de un objeto, se necesita encapsular el proceso en un objeto, esto es, para ver esto como una "cosa" y llevar a cabo acciones sobre ella. Dado que la flexibilidad de movimiento entre las concepciones proceso y objeto es importante, también hay que ser capaz de desencapsular una visión de objeto y regresarla a la visión de proceso.
La aproximación pedagógica de Dubinsky en relación con el enfoque APOS de la adquisición de un concepto se concreta en tres componentes: Actividades, discusiones de clase, ejercicios, referidos al ciclo de enseñanza ACE (activities, class, exercises). Las actividades, que usualmente tienen lugar en un laboratorio de ordenadores, son «para proveer al estudiante con una experiencia base.» Construyendo sobre esas actividades, se realizan clases con tareas a lápiz y papel en pequeños

grupos, seguidas por discusiones intergrupales para dar oportunidad a la reflexión. Finalmente, los ejercicios tradicionales se asignan para completar y reforzar la construcción de ideas fuera de clase (Asiala, Brown , DeVries, Dubinsky, Mathews , & Thomas, 1996, p. 14).

El marco teórico APOS ha sido aplicado para medir la distancia hacia los conceptos avanzados abordando diferentes aspectos como el de la teoría de grupos (Asiala, Dubinsky , Mathews, Morics, & Oktaç, 1997).

2.1.2.3 Símbolos y proceptos

¿Qué liga lo operacional (el proceso) y lo estructural (el objeto) vistos de manera conjunta? David Tall y sus colegas sugieren que esto sea, en gran parte el simbolismo matemático que permite la capacidad de regresar y avanzar flexiblemente entre estas dos concepciones en una variedad de situaciones matemáticas. Dentro de la consideración de dualidad de proceso y objeto, Gray & Tall (1991) ambos son denotados usando el mismo simbolismo y conjeturaron que esta ambigüedad de notación permite a pensadores matemáticos acertados moverse flexiblemente entre estas dos concepciones. Así, acuñan el término ***procepto*** para una amalgama de proceso y concepto (objeto). Más aún, parece ser que un estudiante en sus comienzos, suele considerar un concepto como un proceso. Posteriormente, manejan el simbolismo para el producto de aquel proceso. Finalmente el simbolismo toma el significado dual tanto de proceso como de producto (el objeto). Ilustran esto con una gama de ejemplos: desde el proceso de agregar relativo al concepto de suma (con 6+2 evocan tanto el contar como proceso y 8 como su resultado); al proceso de tender a un límite y al concepto de límite (ambos representados por la misma notación $\lim_{x \to a} f(x)$). También introducen la noción del ***procepto dividido,*** notando (en el contexto de aritmética) que todos los estudiantes son «al principio dados a los procesos para realizar tareas matemáticas, pero el eventual éxito viene no por estar bien en aquellos procesos, sino por encapsularlos como la parte de un procepto con el cual solucionan las tareas de un modo más flexible » (p.77).

Explicando aún más estas ideas en el contexto de la aritmética Gray & Tall (1994) distinguen entre ***proceso*** designándolo como "la representación cognitiva de una operación matemática" y ***procedimiento*** como "un algoritmo específico para la implementación de un proceso". Para ellos existe una «fundamental dicotomía entre procedimientos y conceptos, entre cosas por hacer y cosas por conocer.» Asímismo sugieren la resolución del enigma de cómo algo puede ser un proceso y un objeto al mismo tiempo indicando que «enfrentamos una mentira en el matemático profesional con este problema», a saber que los matemáticos simplifican los contenidos remplazando la complejidad cognitiva de la dualidad del ***proceso-concepto*** por la conveniencia de notación de la ambigüedad ***proceso-producto.*** Refinando aún más sus ideas sugieren la noción de ***procepto elemental*** *y* ***procepto,*** en contextos de aritmética, álgebra y cálculo, por el simbolismo que las caracteriza definidos en los siguientes términos:

> Un ***procepto elemental*** es la amalgama de tres componentes: un ***proceso*** el cual produce un ***objeto*** matemático y un ***símbolo***, que es usado para representar el proceso o el objeto.
> Un ***procepto*** consiste de una colección de proceptos elementales tales que tienen el mismo objeto. (Gray & Tall, 1994, pp. 3-4)

En contraste con la aproximación formal de las matemáticas sobre los llamados aspectos verbales y proposicionales de la cognición se destaca el papel que juegan los símbolos, por ejemplo en la visión de los modelos mentales de Johnson-Laird (1983) que proporciona componentes no verbales y no proposicionales de la cognición. Así también en el pensamiento proceptual, Tall y sus colegas han observado que los símbolos matemáticos poseen un especial y poderoso sentido que envuelve una compresión de conocimiento, permitiendo un cambio casi sin esfuerzo de ***hacer*** un proceso a ***pensar*** en un concepto. Más aún la noción de procepto ha incrementado sutilmente su significado desde su primera formulación. Ahora es visto principalmente como un constructo cognitivo en el cual el símbolo puede actuar como pivote, cambiando de ser el centro de atención el proceso para calcular o manipular, hacia el concepto que puede ser pensado como una entidad manipulable.

2.2 Pensamiento matemático avanzado y demostración matemática

En este apartado se realiza una visión panorámica de la línea de investigación en Pensamiento Matemático Avanzado, centrándonos en las primeras dos secciones en las investigaciones correspondientes a los tópicos del pensamiento formal: definiciones, ejemplos y demostraciones.

2.2.1 Acerca de las definiciones

Un tópico de interés para este trabajo es sin duda la construcción de demostraciones en el nivel superior. Para ello se mencionarán múltiples recursos derivados de investigaciones en el campo, como por ejemplo el conocimiento estratégico para el manejo de definiciones, teoremas y demostraciones. No obstante usualmente se parte del supuesto que en el nivel universitario se debe ser capaz de manejar los conceptos y definiciones implicadas y su estructura. A este respecto, Selden & Selden (1995) tratan de la dificultad que presentan los estudiantes para desenvolver los conceptos y definiciones, incluyendo su estructura lógica. Existe la necesidad de definir para hacer los conceptos *formalmente operables* para un individuo. Bills & Tall (1998) introducen el término, definición o teorema *formalmente operable*, proponiendo que:

Una definición (matemática) o teorema se dice que es ***formalmente operable*** para un individuo dado si dicho individuo es capaz de usarlo para crear o reproducir (significativamente) un argumento formal.

Siguiendo el desarrollo de cinco individuos en un curso de Análisis, que tratan de dar una definición de "mínima cota superior", encuentran que muchos estudiantes no poseen definiciones operables, dependen de experiencias tempranas e imágenes inoperables de los conceptos. Más aún, también es posible para un estudiante usar un concepto sin una definición operable en una demostración usando imágenes que casualmente contienen la información requerida.

Pinto & Tall (1999) también en el contexto de un estudio sobre Análisis Real, pudieron observar que los estudiantes exhiben dos modos distintos de manejo de definiciones formales, uno ***dando significado*** a través de la consideración de ejemplos (frecuentemente visuales) y otro por ***extracción de significado*** a través de la manipulación y reflexión sobre la definición misma. Para tener éxito con la primera forma de definir se requiere dirigir la reconstrucción de ideas personales y centrarse sobre las propiedades esenciales de la definición para integrarlas en la teoría formal. Mientras, la segunda forma evitó algunas dificultades respecto la primera, y los estudiantes terminaron construyendo una teoría formal no relacionada con imágenes informales. Más aún, los alumnos pueden tener éxito o no con cualquiera de las dos formas descritas. Alcock & Weber (2005) obtienen resultados similares de estas dos aproximaciones observando construcciones de demostraciones, pero las denominan *referencial* y *sintáctica*.

Dorier, Robert, Robinet, y Rogalsky, se ocupan en algunas de sus investigaciones del ***obstáculo del formalismo*** (Dorier, 2000). Reservan el término para el razonamiento erróneo de los estudiantes en relación con su insuficiente competencia principalmente en el manejo de lógica y la teoría elemental de conjuntos, pero también a la manipulación de expresiones algebraicas y del lenguaje formal. Después de varios estudios de diagnóstico entre 1987 y 1994 para determinar las dificultades de los estudiantes en el aprendizaje del Álgebra Lineal, encuentran que dicho obstáculo prevalece en diferentes generaciones sucesivas, y para casi todos los modos de enseñanza. Una de sus conclusiones es que la ausencia de conocimientos previos en lógica y teoría elemental de conjuntos contribuye a la producción de errores en Álgebra Lineal. Otra conclusión es que el tipo de respuestas revelan un mal uso de las implicaciones matemáticas, caracterizados por la confusión entre hipótesis y conclusión. En este sentido, esto está directamente relacionado con el manejo de las definiciones, ya que éstas son esencialmente dobles implicaciones.

2.2.2 Ejemplos y contraejemplos

El uso de ejemplos tiene un papel preponderante en la enseñanza y aprendizaje de la matemáticas ya sea para entender o explicar definiciones y procedimientos, para generalizar o para la construcción de argumentos y demostraciones de teoremas. Los ejemplos son un elemento importante de conocimiento matemático especializado.

Ejemplos para entender o explicar definiciones y procedimientos.

Los ejemplos juegan un papel muy importante en la formación de un concepto (Vinner, 1983) y en la clarificación del significado de nuevos conceptos (Dahlberg & Housman, 1997). Aprendemos con ejemplos más que con definiciones. Es a través de los ejemplos que las definiciones adquieren significado (Watson & Mason, 2002). A través de los ejemplos los profesores transmiten la esencia de los conceptos y técnicas matemáticas (Tall & Vinner, 1981). A la hora de presentar conceptos o explicar procedimientos, la principal razón para presentar ejemplos es que los alumnos los interiorizan como una herramienta que utilizarán posteriormente en el futuro para resolver problemas de ese tipo (Bills, et al., 2006).

Ejemplos para generalizar

Watson & Mason (2005) establecen que el uso de ejemplos ayuda al estudiante a una posterior generalización. Definen *ejemplo* como, «... algo a partir de lo cual un estudiante podría generalizar » (p. 3) y el proceso de 'ejemplificación' como « ... cualquier situación en la cual se ofrece algo específico para representar una clase general con la cual el estudiante debe familiarizarse - un caso particular de una generalidad» (pp. 3-4). Pero los ejemplos matemáticos siempre van más allá de su propia particularidad; el proceso de generación de ejemplos es, de hecho, el anverso de la generalización y se considera que «...es la búsqueda de ejemplos y no el producto final lo que promueve el aprendizaje, por ello es importante que desde el principio los estudiantes establezcan una dinámica entre ejemplificación y generalización »" (Watson & Mason, 2005, p. 100). También introducen la idea de *espacios de ejemplos* como, « ... los ejemplos que los estudiantes producen, que provienen de un pequeño fondo de ideas y que simplemente aparecen en respuesta a tareas particulares en situaciones particulares » (p.ix). Además aclaran que «…los ejemplos, por lo general, no son aislados; más bien son percibidos como casos de una clase de ejemplos potenciales. Como tales, constituyen un espacio de ejemplos, los principiantes experimentan el

acceso a un espacio de ejemplos como respuesta a una situación,... Los espacios de ejemplos no son solamente listas; tienen una estructura interna, idiosincrática... y es por esta estructura que los ejemplos se producen. Su contenido y estructuras son individuales y circunstanciales; a los espacios estructurados de modo similar se puede acceder de diferentes formas.» (p. 51).
Los ejemplos constituyen una base para la generalización, abstracción y razonamiento analógico (Zaslavsky, Harel & Manaster, 2006). Se observan dos tipos de generalizaciones en correspondencia con "dos distintas maneras de pensamiento" la *generalización de patrones del proceso (PPG)* y la *generalización de patrones de los resultados* (RPG), mientras que la primera se centra en las regularidades en los procesos, la segunda se enfoca en la regularidad de los resultados (Harel, 2001, p. 191).

Ejemplos para construcción de argumentos y demostraciones de teoremas

Los ejemplos y contraejemplos juegan un rol importante al producir demostraciones, así, para algunos investigadores las justificaciones inductivas conducen al alumno por un camino de razonamiento hacia demostraciones formales. Regresando al párrafo anterior, los *PPG* son requeridos para la construcción de demostraciones matemáticas inductivas (Harel, 2008; Pedemonte, 2007) y también para demostraciones deductivas (Martínez & Pedemonte, 2014). No obstante, no muestran efectividad en todos los casos. Pedemonte & Buchbinder (2011) muestran que los ejemplos son efectivos para la construcción de una demostración matemática cuando permiten *la unidad cognitiva*[3] y la *continuidad estructural*[4] entre la argumentación y la demostración. Sugieren además que la continuidad en la estructura es posible si la argumentación inductiva está basada sobre procesos de generalización de patrones, pero no es el caso si la generalización se establece desde el resultado (RPG). Más aún, argumentan que tales procesos de generalización de patrones favorecen el desarrollo de ejemplos genéricos que apoyan la unidad cognitiva y la continuidad estructural entre la argumentación y la prueba.

Por otro lado, diversas investigaciones alertan acerca de trabajar la distinción entre verificación y demostración a partir del manejo de los ejemplos, porque los estudiantes usualmente los utilizan para las demostraciones, dado que éstas son entendidas como simples verificaciones. Ellos creen que es suficiente una justificación empírica para establecer un resultado general. Esta creencia puede ser debida a los nuevos diseños de planes de estudios (Hoyles, 1997) que intentan remediar algunos de los problemas usuales en la enseñanza de las matemáticas haciéndola más cercana a los alumnos, pero son deficientes en otros aspectos como el relativo a la demostración, puesto que esto supone un mayor grado de abstracción; así, aun cuando pueda parecer que los estudiantes entienden la demostración de una proposición, siguen sintiendo la necesidad de una verificación (Fishbein & Kedem, 1982; Vinner, 1983). Al respecto Healy & Hoyles (2000) sostienen que los alumnos necesitan realizar ensayos de verificación –después de la demostración– porque la demostración no les convence. Mas allá del hecho de que una prueba formal confiere validez general a un enunciado matemático, para confirmar esa validez son necesarios controles posteriores (Fischbein, 1982). Para Mariotti (1998) la discrepancia entre la verificación empírica, típica del comportamiento ordinario, y el razonamiento deductivo, típico del

[3] La argumentación se usa tanto en la producción de conjeturas como en la construcción de la demostración. La relación entre estos modos de argumentación destaca la continuidad (llamada *unidad cognitiva*) entre la conjetura y la demostración.
[4] Por estructura se refieren a la conexión lógica entre los enunciados y existe una *continuidad estructural* entre la argumentación y la demostración cuando tienen la misma estructura.

comportamiento teórico, es una fuente de dificultades, un obstáculo para la comprensión del significado de laprueba. En la práctica educativa, es común confundir esos puntos de vista y, como consecuencia, desorientar a los estudiantes quienes ven que los 'ejemplos' juegan un rol fundamental a la hora de establecer axiomas y 'descubrir' teoremas, pero que están prohibidos para que prueben un enunciado: unos cuantos ejemplos no son aceptables como "prueba."
Muchos estudiantes creen que mostrar que un teorema general es válido en un ejemplo específico, o quizás en varios ejemplos, es suficiente como demostración (Weber, 2001). Los profesores, con sus actuaciones, refuerzan esta idea al omitir las pruebas de los teoremas y, en su lugar, ofrecer ejemplos a modo de justificación (Harel & Sowder, 1998; Goetting, 1995) y así, aún sin ser conscientes de ello, pueden estar dando la impresión de que bastan las pruebas empíricas para establecer la verdad de proposiciones matemáticas.
En relación con las conjeturas relativas a la generalización o el establecimiento de un contraejemplo, si las pruebas se realizan a partir de datos concretos, las estrategias que utilizan los estudiantes son principalmente empíricas (Coe & Ruthven, 1994), sustituyendo el argumento deductivo por una comprobación suficientemente diversa de casos. En relación con el rol de los contraejemplos, una dificultad evidente en los estudiantes, es el hecho de que un gran número de ejemplos no logre demostrar una proposición, sin embargo, un sólo ejemplo puede invalidar un teorema. En los estudios que realizó Wason (1966), observó que los sujetos mostraban el sesgo de la confirmación, es decir, el principal error que tienen los estudiantes es que intentan encontrar evidencia que confirme la regla en lugar de buscar una evidencia que la falsee. Por otra parte, en los estudios realizados por Lehrer & Romberg (1999), la ausencia generalizada para encontrar un contraejemplo fue tomada por los alumnos como una verificación.

Finalmente en los ejemplos se pueden encontrar aspectos pedagógicos que los posicionan como elemento central de la enseñanza (Zaslavsky, 2010). Diversos estudios revisan el uso de ejemplos en la práctica de los profesores y encuentran la ejemplificación como una acción del profesor que promueve la adquisición de conceptos matemáticos. Un ejemplo de este tipo de estudio es el de Figueiredo (2010), en el que se analiza las selección que hace el profesor de los ejemplos para trabajar el concepto de función cuadrática.

2.2.3 Acerca de los proceptos y la demostración matemática

El estudio de la demostración matemática se enmarca en la línea de Procesos del Pensamiento Matemático Avanzado (advanced mathematical thinking processes) y De Guzmán (1997) menciona en cuanto a la demostración matemática que se tiene la necesidad de investigar en: 1) la utilización de modelos visuales diferentes, 2) en la aparente transparencia y en la relativa opacidad de los problemas de transmisión, 3) la demostración a lo largo del tiempo y la demostración hoy y 4) el papel de la demostración en los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Tall et al. (2001, p. 97 citados por Harel, Selden, & Selden, 2006, p. 159) mencionan que,

> «el movimiento desde lo elemental a las matemáticas avanzadas requiere una reconstrucción significativa en pensamiento, … un cambio completo enfocado desde la existencia de los objetos percibidos y símbolos representando acciones sobre objetos para nuevas teorías basadas en *propiedades* específicas de estructuras matemáticas formalmente definidas. …. Las imágenes son útiles, hasta esenciales, para sugerir qué tipo de definiciones serán las que más ayudan y qué teoremas demostrar. No obstante la cualidad esencial que hace diferente el pensamiento

> matemático avanzado de las matemáticas elementales es la introducción de definiciones formales y demostraciones».

Tall & Chin (2002) extienden la noción de *procepto,* en el sentido antes mencionado (Gray & Tall, 1994) a matemáticas avanzadas para considerar la demostración matemática como "*procepto formal".* Cuando se refieren a la definición de *procepto elemental y procepto,* discutidas en la sección anterior mencionan que la definición original fue hecha en un contexto donde los autores fueron conscientes de un amplio rango de ejemplos y la definición fue moldeada a la situación de tales ejemplos. Bajo esta consideración primaria, ésta es una "definición descriptiva", en el sentido de definición de un diccionario, pero sería de preferencia una "definición prescriptiva" en el sentido de una teoría axiomática. Sin embargo, si consideramos la definición de *procepto* desde un punto de vista prescriptivo, esta noción parece aplicable para extender la noción de *procepto* a la noción de demostración formal, el cual puede llamarse ***procepto formal.*** Para esto Chin & Tall (2002) agregan al análisis la existencia de tres componentes de un *procepto elemental*: proceso, objeto y símbolo. Posteriormente adaptan el *procepto* de Gray y Tall, particularmente en la forma de un "*procepto elemental",* sobre la noción de demostración matemática. El ***símbolo*** es el enunciado de lo que se pretende probar (puede ser un teorema, resultado o cualquier cuestionamiento). El ***proceso*** es la deducción de lo que está siendo probado. Y el ***objeto*** es el concepto de la noción de demostración, i.e. el significado real del teorema (o resultado): como un *símbolo* puede evocar la deducción de la demostración, como un *proceso* puede contener procedimientos secuenciales y requiere la síntesis de distintas unidades cognitivas o la noción general del teorema, como un objeto manipulable que pueda utilizarse como entrada para otros teoremas o resultados. Más aún un teorema, por ejemplo, puede actuar como pivote entre un *proceso* (método de demostración) y el *concepto* (noción general del teorema). Con la interpretación anterior se puede ver el rol de un símbolo como pivote inicial no solamente en Pensamiento Matemático Elemental, sino también en el Avanzado, para seguir el cambio entre usar un símbolo como un concepto para reflexionar sobre él y para vincularlo con otros conceptos y, como un proceso que ofrece los pasos detallados para deducir una demostración.

No obstante, surge un argumento inmediato: se dan cuenta que el corolario anterior no siempre se sigue porque algunos matemáticos a veces usan ciertos teoremas sin una comprensión completa de su demostración. Sin embargo, este punto de vista resulta avanzado para su análisis en ese estudio, y lo salvan simplemente mostrando que tales individuos no usan los teoremas como proceptos formales. Solo han asimilado parte de la estructura, usualmente el enunciado del teorema, el cual usan como un ingrediente en otra demostración sin una comprensión estructural completa. En ese mismo artículo dicen tener evidencia que pocos estudiantes entienden la noción de demostración como un procepto formal, pero consideran que su investigación empírica muestra que, después de un tiempo más estudiantes adquieren la esencia de la idea.

Chin & Tall (2000) postularon una jerarquía que clasifica las etapas de desarrollo de las demostraciones sistemáticas, en: *1)* ***basada en la imagen del concepto****, 2)* ***basada en la definición****, 3)* ***basada en el teorema****, y 4)* ***basada en el concepto comprimido****.*

Estas etapas muestran sucesivamente la ***compresión*** de conocimiento. La primera etapa, reconoce que los estudiantes tienen una imagen del concepto desarrollado por la experiencia, y por lo tanto esta es una etapa intuitiva de desarrollo. La transición a la segunda etapa envuelve la primera *compresión*. A partir de las propiedades de la imagen del concepto, se seleccionan y refinan un número de ideas generatrices para pasar a la definición del concepto. Durante esta etapa, las definiciones son utilizadas para hacer deducciones, todas ellas basadas explícitamente en las definiciones. La tercera etapa, se da cuando los teoremas que han sido demostrados mediante algún proceso son ahora vistos para comprimirlos en *conceptos*, para usarse como entes en los procesos de demostración de nuevos teoremas. Los estudiantes que han madurado en la etapa basada en el teorema muestran que poseen la habilidad para considerar un teorema como un *procepto formal.* Finalmente los individuos en la última etapa tienen la capacidad para usar teoremas de manera flexible como procesos o como conceptos. La hipótesis de los autores es que los estudiantes en esta etapa desarrollan un nivel de pensamiento matemático de conceptos comprimidos que hace posible que piensen con gran flexibilidad y poder conceptual

Chin y Tall sostienen, basados en Bills & Tall (1998), que el paso de la etapa basada en la imagen del concepto (primera etapa) a la noción comprimida de definición operable[5] (cuarta y última etapa) representa una dificultad para muchos estudiantes, pues la concepción del pensamiento basado en la imagen se sostiene ensamblado en la imagen del concepto del individuo, en virtud de que esta clase de pensamiento informal esta fuertemente vinculada al mundo real, es muy natural ocultarlo en cualquier etapa intermedia.
En un estudio empírico con 15 estudiantes universitarios durante un año para investigar si y cómo mejoran su comprensión sobre el tema de *Relaciones de Equivalencia* concluyen que la imagen del concepto de los estudiantes no es sólida durante todo el tiempo. Aunque muchos de ellos conocen el teorema relevante, realmente no tienen una idea clara de cómo aplicarlo en un problema práctico. Además, sólo una minoría reconoce un teorema relevante como un *"concepto"* y no consideran al teorema junto con su demostración como un *"procepto formal"* (Chin & Tall, 2002).
En el nivel de pensamiento basado en la definición, se considera que necesitan tiempo para digerir las implicaciones de la definición de modo que puedan pasar de *hacer* a *tener* la definición. Esto significa que la definición sea operable en su imagen de los conceptos y que sean capaces de usarla para hacer deducciones formales relevantes.
El siguiente nivel basado en el teorema, se produce cuando se usan los resultados de teoremas en pruebas sucesivas y el último nivel se da cuando los teoremas implicados son integrados como proceptos. En estos niveles son pocos los estudiantes que se ubican inicialmente en el estudio y sólo un nivel relativamente bajo de demostraciones aparece como procepto aún en los estudiantes de alto desempeño. Finalmente el estudio muestra los cambios ocurridos en un año y revela como pasan de una a otra etapa.
Para cerrar con la revisión de la investigación de Chin y Tall entendemos que lo deseable es que los estudiantes integren como un "todo" las definiciones operables, los teoremas como proceptos y así los conceptos estudiados puedan comprimirse a una sola unidad cognitiva. Sin embargo son pocos los que llegan a este nivel.

2.3 La construcción social del conocimiento y la práctica del matemático

En esta sección, a través de un recorrido por las investigaciones relacionadas, describiremos la corriente reciente en pensamiento matemático avanzado que se ocupa de la práctica del matemático en aras de comprender su forma de construir el conocimiento, y con el propósito de traducirlo en estrategias para la enseñanza de la matemática.
También se expondrá acerca de la construcción social de conocimiento compartido y diferentes aproximaciones para estudiar las interacciones en el aula y los procesos de abstracción.

[5] En el sentido de Bills & Tall (1998) y que fue definido al principio de este capítulo.

2.3.1 La práctica de los matemáticos

Recientemente los especialistas en la línea de pensamiento matemático avanzado han sugerido la necesidad de dirigir la atención a la práctica de los matemáticos para comprender como se organiza su trabajo y como se construye el conocimiento.

Como perspectivas de futuro: "El pensamiento matemático avanzado, requiere razonamiento deductivo y riguroso acerca de nociones matemáticas que no son completamente accesibles a través de nuestros sentidos. …. El pensamiento matemático avanzado descansa sobre un continuo de pensamiento matemático que trasciende a la experiencia con los procesos o las intuiciones del pensamiento matemático elemental, sin embargo no las ignora" (Edwards, Dubinsky, & McDonald, 2005, pp. 17-18). Está relacionado esto con el pensamiento, las prácticas, y los productos de los matemáticos. ¿Qué sabemos acerca de la práctica del matemático?.

«En verdad una aproximación estructural a los conceptos es esencial para la construcción de demostraciones y nos da paso a un nivel superior y a los cursos universitarios, y ahí aparece como inadecuado introducir la mayor parte de conceptos por otro camino que no sea estructural. Ya que los matemáticos rápidamente entienden nuevos conceptos estructuralmente definidos, sería interesante investigar cómo desarrollaron la capacidad para hacerlo» (Harel, Selden, Selden, & Selden, 2006, p. 156).

Apoyados en las citas anteriores, en las investigaciones centradas en la metáfora de los estudiantes como matemáticos (Lampert, 1990; Greeno, 1988; Schoenfeld, 1985; Beberman, 1958; Begle, 1970; Piaget, 1970,1973; Bruner, 1977; Schwab, 1978; Romberg, 1983; Schoenfeld, 1988; Lave, Smith, & Butler, 1988) y en investigaciones que mencionaremos más adelante nos podemos dar cuenta que dentro de la línea de pensamiento matemático avanzado hay quienes consideran que cada vez es más necesario voltear hacia la práctica de matemáticos y realizar investigaciones que puedan revelar información de importancia potencial para la educación de matemáticas.

Existe un pequeño grupo de investigación interesado en observar la práctica del matemático en: la escritura, la solución de problemas, la demostración y su forma de comunicar el conocimiento.

En un estudio (Misfeldt, 2003), se entrevistaron a matemáticos investigadores en relación a los usos y formas de la escritura (lápiz y papel, en la pizarra, o en el ordenador). En él se pueden distinguir cinco funciones de la escritura: 1) adquisición, prueba de ideas y reconocimiento de conexiones, a menudo escritas no linealmente utilizando notación principalmente simbólica; 2) investigación más profunda y con mayor precisión de una manera lineal para comprobar detalles, usando una combinación de lenguaje natural y notación simbólica; 3) ahorro de información e ideas en un documento directamente ordenado para acceso posterior; 4) comunicación de ideas más desarrolladas con colegas; y 5) producción de un artículo terminado para publicación.

Mientras que las implicaciones para estudiantes son confusas, es posible que las tentativas de resolución de problemas de los estudiantes que reflexionen en la función (1) mejoren, así que se debería animarles a escribir, y volver a escribir sus resultados más detalladamente para asegurarse que son correctos y pueden ser leídos por otros.

Por otra parte en la función (2) el presentar de manera lineal los resultados ayuda a verificar que está bien resuelto y a que otros puedan leer la información, sin embargo el hecho de presentar a los estudiantes el conocimiento como conocimiento acabado y en forma lineal puede generar un obstáculo al interpretar que el conocimiento también es generado así en forma lineal.

Trabajando con alumnos de secundaria y preparatoria en procesos de resolución de problemas se postuló un marco para examinar lo que conocen los estudiantes y como hacen para trabajar sobre los problemas matemáticos de dificultad moderada, para los cuales quien los enfrenta no tiene el acceso fácil a algún procedimiento para solucionar el problema, pero realmente tiene las bases adecuadas para solucionarlo. El marco teórico considerado fue: *1) recursos* (habilidades, intuiciones, hechos, procedimientos sobre el dominio de problema) *2) heurística* (dibujando figuras, introduciendo notación, reformulando el problema, trabajando hacia atrás); *3) control* (actos metacognitivos como planificación, supervisión, evaluación de su progreso); y *4) sistemas de creencia* (acerca de su persona, el tópico, y las matemáticas que influyen en el comportamiento). Entre otras cosas, en este estudio se encuentra que a menudo los estudiantes «emprenden una serie de cálculos, sin considerar su utilidad y fracasan al limitar sus exploraciones cuando (para el observador externo) es claro que estaban sobre un intento totalmente inútil» (Schoenfeld, 1985, p. 316).

Carlson (2000) y Carlson & Bloom (2005), extendiendo otros trabajos sobre resolución de problemas, proponen un marco teórico multidimensional basado en entrevistas con 20 matemáticos. Éste consta de 4 fases que pueden repetirse. *1) Orientando* (fabricación de sentido, organización, construcción de una representación personal del problema, etc.); *2) Planeación* (conjeturar, imaginar, evaluar, etc.), *3) Ejecución* (construcción, cálculos, etc.) y *4) comprobación* (verificación, toma de decisiones, etc.). Ellos confían en que sus ideas sean útiles en tentativas de promover el comportamiento eficaz de los estudiantes en la resolución de problemas.

Por su parte, Weber & Alcock (2004) distinguen dos tipos de demostración formal, las sintácticas y las semánticas. Una producción de ***demostración*** es ***sintáctica*** cuando el individuo plasma inferencias manipulando fórmulas simbólicas de un modo lógicamente permitido. Una producción de ***demostración semántica*** es cuando el individuo usa la definición de conceptos matemáticos para dirigir las inferencias formales. Presentan dos estudios de caso independientes exploratorios sobre teoría de grupos (con 4 matemáticos que usaban regularmente la teoría de grupos y con 4 estudiantes universitarios que acababan de concluir su segundo curso de álgebra abstracta) y un análisis que ilustra ambos tipos de pruebas. Se encuentran con que los algebristas pensaban acerca de los grupos en términos de tablas de la operación definida para el grupo, sus generadores y relaciones, usando representaciones que se aplicaron a grupos específicos. En contraste ninguno de los estudiantes podía proporcionar una descripción intuitiva simple de un grupo; para ellos, esto era una estructura que satisface una lista de axiomas. Mientras los cuatro estudiantes podrían dar la definición formal de grupos isomorfos, ninguno podía proporcionar descripciones intuitivas. Para probar que dos grupos son o no isomorfos, los estudiantes decían que podían primero comparar la cardinalidad de los grupos. Si los grupos tenían la misma cardinalidad entonces buscaban funciones continuas biyectivas y verificaban si estas funciones eran un isomorfimo, una estrategia inefectiva en general. Concluyen hablando de lo que requieren los tipos de comprensión de los conceptos para cada tipo de producción de demostración e ilustran las debilidades de las producciones de prueba sintácticas.

En otro estudio relacionado (Weber, 2001), se analiza el comportamiento, al demostrar, de cuatro estudiantes universitarios que terminan su curso de álgebra abstracta y cuatro estudiantes de doctorado, que están escribiendo su disertación sobre tópicos algebraicos. Para examinar el proceso en que los estudiantes y los doctorandos solían construir demostraciones, Weber se centra en dicha construcción como una tarea de resolución de problemas. En tareas de resolución de los problemas, el problema típicamente es presentado con un estado inicial y se pide realizar una secuencia de acciones que transformarán el estado inicial en un estado de objetivo deseado. En la construcción de la demostración de una afirmación, dan al individuo un estado inicial conformado con ciertos supuestos y se pide que se derive una serie de inferencias (por ejemplo considerar definiciones y aplicar teoremas) las cuales concluyen con la demostración del enunciado planteado. Sin embargo, en la construcción de la demostración existen muchas inferencias que se pueden derivar, pero no todas son relevantes. Resolver problemas de manera efectiva, a menudo requiere conocimiento estratégico, o directrices heurísticas que se puedan usar para recordar o elegir las acciones útiles para aplicarse entre varias alternativas.

Weber encuentra que los doctorandos a diferencia de los estudiantes, tenían el conocimiento, y rápidamente podía recordar los teoremas que son importantes y menciona que el tipo de conocimiento estratégico que está ausente en los estudiantes es: *1) conocimiento de las técnicas de prueba en el dominio, 2) conocimiento de qué teoremas son importantes y cuándo deben usarse, y 3) conocimiento de cuándo usar y cuándo no usar técnicas sintácticas.* Por ejemplo, en 2) cuando se cuestionó a los doctorandos por qué usaron tales técnicas sofisticadas, una respuesta típica era, «porque es un resultado tan fundamental y crucial, es decir, es una de las primeras cosas para dar la vuelta» (p.113). Puede ser que los estudiantes principalmente estudien demostraciones acabadas y se enfoquen sobre sus detalles, más que en notar la importancia de ciertos resultados y cómo se relacionan. Probablemente más estudios de la práctica de los matemáticos proporcionarían ideas adicionales e información.

2.3.2 Procesos de abstracción desde la construcción de conocimiento compartido o de grupo

El conocimiento compartido y autoridad, el aprendizaje mediado, los grupos heterogéneos de estudiantes y las interacciones entre estudiantes y profesores son rasgos esenciales del trabajo colaborativo en las aulas. En las últimas décadas se ha puesto particular atención en el aprendizaje colaborativo o aprendizaje compartido y en los cambios necesarios en los roles de estudiantes y profesores para esta forma de construir conocimiento. Por ejemplo, encontramos la noción de normas sociomatemáticas (Yackel & Cobb, 1996). La argumentación y justificación matemática no son desarrolladas simplemente como normas sociales dentro del aula, más aún tales normas tienen una caracterización específicamente matemática. Lo que cuenta como una forma de argumento y la evidencia usada para soportar el argumento no es de la misma naturaleza que en áreas distintas de la matemática. En consecuencia, un profesor necesita contar con un conocimiento pedagógico de cómo desarrollar y apoyar las normas que regulen la participación de los estudiantes en la generación de argumentos en la clase de matemáticas.

A partir de la revisión de la literatura de las interacciones en el aula hemos encontrado un modelo que además de un marco teórico de los procesos de abstracción, proporciona una metodología de análisis para documentar los progresos de los estudiantes en tales procesos y, más aún, consideramos que captura la complejidad de tales procesos en el contexto de un salón de clases. Este marco es conocido como *Abstracción en Contexto* (AiC por sus siglas en inglés) y fue propuesto por Schwarz, Dreyfus, & Hershkowitz (2009), ellos consideran que AiC proporciona un marco teórico y una metodología conveniente para el análisis del aprendizaje. En AiC la abstracción se define como «una actividad vertical[6] de reorganización de constructos matemáticos previos dentro de la matemática y con significados matemáticos para conducir hacía un constructo que es nuevo para el aprendiz» (p. 24).

Un proceso de abstracción tiene tres etapas: *la necesidad de un nuevo constructo, su emergencia y su consolidación*. La abstracción no ocurre sin la necesidad de un nuevo contructo; esta necesidad puede derivarse de una motivación intrínseca para vencer contradicciones, sorpresas, o incertidumbre. La segunda etapa es central y es donde emerge el nuevo constructo, en ella se observan tres acciones epistémicas: *R-acciones* (**R**ecognizing), donde el aprendiz reconoce que un constructo específico previo es relevante para la situación con la que están tratando, *B-acciones* (**B**uilding-with), el aprendiz actúa con los constructos reconocidos para alcanzar la comprensión de una situación o la solución de un problema; *C-acciones* (**C**onstructing), usando B-acciones para encajar e integrar constructos previos por matemátización vertical para producir un nuevo constructo. La *C-acción* se refiere a la primera vez que el aprendiz usa o menciona un constructo. En este proceso, *R-acciones* están anidadas dentro de *B-acciones*, y *B-acciones* están anidadas dentro de *C-acciones*. Las *C-acciones* pueden anidarse en *C-acciones* de un mayor nivel. Por último, la tercera etapa correspondiente a la consolidación es un proceso a largo plazo que se produce cuando el constructo se menciona o utiliza después de observada la *C-acción*. Esta etapa se caracteriza por evidencia personal, confianza, inmediatez, flexibilidad y cuidado cuando se trabaja con el constructo (Dreyfus & Tsamir, 2004) y también cuando el lenguaje es cada vez más preciso (Hershkowitz , Schwarz, & Dreyfus, 2001), aunque para Kidron (2008) y para Gilboa, Dreyfus, & Kidron (2011) el aumento en la precisión del lenguaje es característica de la etapa de construcción por sí misma y no únicamente de la etapa de consolidación.

En AiC a las acciones epistémicas mencionadas se les conoce como modelo RBC (Recognizing, Building with, Constructing) y modelo RBC-**C** con la **C** correspondiente a la etapa de consolidación.

Para el análisis de las interacciones en el aula y para poder documentar los pocesos de abstracción de los pequeños grupos y gran grupo el modelo RBC nos proporciona la herramienta teórica y metodológica necesaria para este trabajo como lo veremos más adelante en el capítulo IV.

2.3.3 Análisis de argumentos y demostración

La práctica de la argumentación es inherente a la demostración matemática y actualmente ha tomado fuerza como una línea de investigación de los procesos de pensamiento matemático avanzado, y particularmente en demostración matemática como proceso y como actividad es difícil separar la argumentación de ésta. El modelo de Toulmin (1958), ha sido utilizado en varios trabajos de investigación para analizar y documentar las producciones de los estudiantes. Éste establece las reglas que se precisan en cualquier disciplina o espacio abierto a la discusión para construir una argumentación. Toulmin crea este modelo en el marco de los discursos sociales para

[6] Treffer (1978) considera el término *matematizar* como organizar y estructurar la información que aparece en un problema, identificar los aspectos matemáticos relevantes, descubrir regularidades, relaciones y estructuras. Define la *matematización vertical*, como la que consiste en el tratamiento específicamente matemático de las situaciones, y la caracteriza a partir de los siguientes procesos: *representar* una relación mediante una fórmula, *utilizar, refinar, combinar, integrar y ajustar* diferentes modelos, *probar* regularidades, *generalizar* y *formular* un concepto matemático nuevo.

lo cual considera que un *argumento* es una estructura compleja de datos organizados en un proceso que parte de una evidencia o de ciertos datos y llega al establecimiento de una proposición. El proceso de la evidencia a la proposición debe contener ciertos elementos necesarios que nos van a permitir decidir si la línea argumental resulta convincente. Vamos a utilizar este modelo para analizar y documentar los progresos de los estudiantes al enfrentar un problema relacionado con la demostración matemática.

El modelo de Toulmin para el análisis de argumentos considera seis componentes básicas o categorías, cada una de las cuales juega un papel diferente en el argumento. Los *datos o bases* (**B**) son los fundamentos sobre los cuales descansa el argumento. La *proposición o pretensión* (**P**) es el enunciado del que el argumentador desea convencer a su audiencia. *La garantía o justificación* (**J**) establece la conexión entre los datos y la conclusión por ejemplo mencionar una regla, una definición o utilizar una analogía. Tres categorías más entran en juego en este modelo, el *respaldo* (**R**) que sirve de sostén a la garantía y su función es la de presentar una mayor evidencia, el *cualificador modal* (**C**) que es un enunciado que indica el grado de fuerza o de probabilidad de la proposición o aserción y por último la *objeción o posibles refutaciones* (**O**) que es una excepción potencial para la proposición o conclusión, es decir nos habla de las posibles reservas que se puedan formular y señalan las circunstancias en que las justificaciones no son ciertas. En resumen, el modelo funciona de la siguiente manera: a partir de cierta base, se formula una proposición. La garantía o justificación conecta los datos con la proposición, el respaldo ofrece un cimiento teórico y el cualificador modal indica el modo en el que se interpreta la proposición como verdadera, contingente o probable. Finalmente se presentan sus posibles objeciones.
El modelo de Toulmin se ha utilizado en diversas investigaciones para:

1) Analizar y documentar los progresos del aprendizaje en el aula (Yackel, 2001; Yackel & Rasmussen, 2002; Krummheuer, 1995).
2) Crear un contexto que permita utilizar la argumentación en el aula (Sardà & Sanmartí, 2000).
3) Comparar y analizar desde un punto de vista cognitivo diferentes estructuras relativas a la argumentación y la demostración (Pedemonte, 2007; 2005).
4) Producir textos argumentativos y crear ensayos y artículos de investigación en educación (Rodríguez, 2004).
5) Para analizar los distintos tipos de persuasión en la evaluación de argumentos en matemáticas por parte de estudiantes y matemáticos, destacando el papel del cualificador modal y las objeciones (Inglis & Mejia-Ramos, 2005; Inglis, Mejía-Ramos, & Simpson, 2007).

Nosotros lo utilizaremos en un estudio exploratorio (Capítulo III) para analizar el comportamiento y las dificultades que enfrenta una estudiante al construir una demostración; queremos estudiar los aspectos cognitivos que entran en juego durante dicha construcción y evidenciar las dificultades enfrentadas por los alumnos a lo largo de los momentos de la demostración.

2.4 Definición del objeto de estudio y sus dimensiones

En Pensamiento Matemático Avanzado se percibe la necesidad de investigar no sólo la parte cognitiva, sino en virtud del importante rol del contexto, además se percibe la necesidad de incorporar constructos sociales y culturales, tales como el ***campo de experiencia*** referido a “un sector de la cultura humana en el cual el profesor y los estudiantes pueden reconocerse y considerarse unitarios y homogéneos” e incluye “el contexto interno del estudiante (la experiencia, representaciones mentales, procedimientos acerca del campo de experiencia), el

contexto interno del profesor y el contexto externo (signos, objetos, coacciones objetivas específicas del campo)” (Boero, Dapueto, Ferrari, Ferrero, Garuti, & Lemus, 1995, p. 153)
Por otra parte se necesitan modelos explicativos que ayuden a investigar acerca de las dificultades de los estudiantes en la construcción adecuada de la imagen del concepto desde definiciones de conceptos formales, pues es notable que los matemáticos lo hacen. Pero, ¿cómo desarrollan esa habilidad? ¿pueden los estudios sobre la práctica de los matemáticos (en la investigación, en la resolución de problemas, demostrando, en el aprendizaje de nuevas matemáticas por sí mismos, en la interacción con sus colegas, en la enseñanza, escribiendo para ellos, para estudiantes, para colegas cercanos al campo, para otros matemáticos, en revistas especializadas, comunicando..) proporcionar información para la mejora de la enseñanza en matemáticas superiores?

En esta dirección centraremos nuestra atención a las dimensiones de la demostración matemática: social, cognitiva, didáctica y epistemológica. Especialmente la dimensión social complementa el punto 2.4.1 ofreciendo un panorama de la práctica del matemático.

2.4.1 Definición de la DM como objeto de estudio

Antes de continuar es conveniente definir el que será objeto de estudio, diferenciándolo de conceptos próximos que pudieran crear algún tipo de confusión.

Tomando en cuenta las definiciones que proporciona Vega (1992), quien se mueve dentro de la tradición, donde hay que considerar primero, que toda demostración es una prueba, y segundo que toda prueba es una argumentación (sin que desde luego valgan sus recíprocas), define *argumentación*, como una interacción lingüística compleja capaz de cumplir, entre otras funciones la de dar cuenta y razón de algo ante alguien en un marco de discurso. Así, como vimos antes, en el apartado 2.4.6, es natural considerar ciertas clases de argumentación como demostraciones matemáticas y esto explica que el modelo de Toulmin (1958), sea utilizado en varios trabajos de investigación para analizar y documentar las producciones (argumentaciones y en particular lo que cuentan como “demostraciones”) de los estudiantes.

La argumentación es un proceso interactivo y dinámico donde caben diferentes formas de comunicación, «inducción» y modificación de los mensajes discursivos. Aquí bastará entender que un argumento consiste de una serie abarcable de proposiciones dispuestas en orden de dar cuenta y razón de que algo es (o no es) el caso, y que todo argumento consta básicamente de tres componentes: una conclusión α, un conjunto de premisas Γ y una línea de discurso tendida entre ellas. El esquema $<\Gamma,\alpha>$ designará un argumento.

Su definición para *prueba* es un argumento que en general parte de ciertos conocimientos para concluir en otro conocimiento. Ésta tiene una pretensión cognoscitiva o acentúa en tal sentido las dimensiones informativa, explicativa o justificativa de la argumentación. Según esto, un argumento $<\Gamma,\alpha>$ será una prueba sólo si $<\Gamma,\alpha>$ tiene un valor cognitivo o una fuerza epistemológica superiores a los representados por la mera proposición de α en el marco dado.

Para que $<\Gamma,\alpha>$ sea una prueba en un marco M, además ha de ser visto o reconocido por algún agente discursivo como prueba de α en M. De manera que la calidad de significar una prueba es una función esencialmente contextual y pragmática. Las pruebas son las credenciales con las que una pretensión de conocimiento afronta su destino. Por lo tanto una prueba como cualquier credencial, carece de sentido al margen de unas instituciones y unas convenciones de uso y de valor. No es seguro que una prueba en M pueda mantener indefinidamente su valor de origen en otro medio M′ o pueda contar siempre con el mismo grado de aceptación o reconocimiento. Así, Dushl (1997) habla de los cambios en las teorías aceptadas y establece que el proceso de elección entre ellas se puede producir si se generan interpretaciones diferentes de unos datos determinados debido a tres factores:

1. La interpretación diferente dentro de la comunidad científica;
2. Los avances tecnológicos que posibilitan nuevas formas de observar;
3. Los cambios en los objetivos de la ciencia como una extensión de los problemas sociales.

Esto es aplicable al caso de la prueba, esto es, su validez es vulnerable a los factores enunciados. Ahora definiremos el objeto principal de este trabajo de acuerdo con Vega (1992).
Una *demostración* es un tipo especial de prueba que debe cumplir ciertos requisitos específicos como los siguientes: una prueba $<\Gamma,\alpha>$ en un marco discursivo M es una demostración de α en M sólo si $<\Gamma,\alpha>$
(i) es una deducción lógicamente concluyente, esto es que α se sigue lógicamente de Γ y ésta es una relación semántica de una fuerza especial;
(ii) hace saber a algún agente discursivo X que α es el caso. Ésta es una manera especialmente fuerte de dar a conocer la veracidad de α;
(iii) es una prueba «admisible», es decir que marca un grado especialmente alto de convicción y de reconocimiento.
Cabe plantear estas condiciones como demandas maximalistas dentro de cada uno de los planos respectivamente involucrados: el lógico, el epistemológico y el pragmático.[7]
La demostración es una relación semántica entre proposiciones donde no cabe andarse con medias tintas: o se da o no se da la verdad en un argumento. La validez no admite grados como puede hacerlo el valor de prueba. En este sentido en didáctica de la matemática se encuentran varios trabajos de clasificación de pruebas y niveles de pruebas que cobran significado de acuerdo a los contextos institucionales y es importante a quién se debe persuadir con ellos (Harel & Sowder, 1998; Ibañes, 2001a, 2001b; Ibañes & Ortega, 2001; Gutiérrez, 2001; Bell, 1976 y 1979).
En cuanto a los planos involucrados en la demostración (lógico, epistemológico y pragmático), el supuesto lógico no es autosuficiente para determinarla. No todo argumento válido constituye por su validez misma una demostración, como se insiste enseguida, desde la perspectiva disciplinaria.

2.4.1.1 ¿Qué es una demostración? Aproximación desde la experiencia de un matemático

Thurston considera que la DM es una de las más importantes formas para comunicar la comprensión matemática y que el conocimiento matemático y el entendimiento han sido impuestos en las mentes y en la tela social de la comunidad matemática (Thurston, 1994). Este conocimiento ha sido apoyado en documentos escritos (libros, artículos, apuntes, etc.) pero estos documentos no son realmente primarios. Considera que este modelo varía bastante de campo a campo. En las áreas geométricas, por ejemplo es muy difícil tener un documento que refleje bien el modo real de pensamiento, dado que es difícil en niveles especializados buscar una correspondencia esquemática de los conceptos involucrados. En campos más algebraicos o simbólicos, no necesariamente es así. Pero en cualquier campo, hay un estándar social fuerte de validez y verdad. La prueba de Andrew Wiles del último teorema de Fermat es un buen ejemplo de

[7] En el apartado dedicado a la dimensión epistemológica de la demostración se aclaran estos planos.

esto, en un campo que es muy algebraico. Los expertos rápidamente llegaron a creer que su prueba era básicamente correcta sobre la base de ideas de alto nivel, mucho antes de que los detalles pudieran comprobarse. Esta prueba se sometería a un gran escrutinio y comprobación comparada con la mayoría de las pruebas matemáticas; pero no importa cómo el proceso de verificación llega a su fin, esto ilustra cómo las matemáticas se desarrollan por procesos orgánicos psicológicos y sociales.

«Cuando la gente hace matemáticas, el flujo de ideas y el estándar social de validez es mucho más confiable que los documentos formales. La gente por lo general no está preparada en la comprobación de la *corrección formal* de pruebas, pero están muy preparada en el descubrimiento de debilidades potenciales o defectos en demostraciones.» (p. 169)

Para evitar una mala interpretación, Thurston acentúa dos cosas. Primero, no quiere que se entienda que está abogando por cualquier debilitamiento del estándar de comunidad de prueba; sino que trata de describir cómo se realiza el proceso realmente. Las pruebas cuidadosas sometidas a escrutinio son muy importantes. La clase de cambio por el que sí abogaría es que los matemáticos tengan más cuidado con sus demostraciones, haciéndolas realmente claras y tan simples como sea posible, de modo que, cualquier debilidad presente sea fácil de descubrir. Segundo, que no se entienda que él critica el estudio matemático de las demostraciones formales. Tampoco critica a la gente que pone su energía en la fabricación de argumentos matemáticos más explícitos y formales. Ambas son actividades útiles que se desdoblan en nuevos descubrimientos.

Para la mayoría de los matemáticos, las matemáticas es una de las actividades humanas intelectualmente más satisfactorias. En los siguientes sentidos: 1) Se tiene un alto estándar para el pensamiento claro y convincente; 2) se da un alto valor a la audiencia y a la tentativa de entender de los demás, no se enfrascan en argumentos interminables y rodeando sin fin a la matemática; y 3) están preparados para ser convencidos por otros.

Intelectualmente, las matemáticas se mueven a una velocidad impresionante. Paisajes matemáticos enteros cambian una y otra vez en asombrosos caminos durante una sola carrera.

Por la naturaleza de su artículo Thurston (1994), constantemente realiza comparaciones con la práctica en relación a los programas de ordenador.

Para él las matemáticas como las practicamos, son mucho más formalmente completas y exactas que otras ciencias, pero mucho menos formalmente completas y exactas por su contenido que los programas computacionales. La diferencia tiene que hacerse no solo con la cantidad de esfuerzo: la clase de esfuerzo es cualitativamente diferente. En programas grandes, una proporción enorme de esfuerzo se consume sobre cuestiones de compatibilidad: asegurarse que todas las definiciones sean consistentes, desarrollando "buenas" estructuras de datos que sean útiles, pero no sean desconocidas para la generalidad, decidiendo la generalidad "correcta" para las funciones, etc. La proporción de energía gastada trabajando un programa grande, a diferencia de la parte de contarlo, es sorprendentemente pequeña. Los programas por lo general tienen que reescribirse con frecuencia desde el principio.

Una clase muy similar de esfuerzo tendría que entrar en el trabajo en matemáticas para hacerlo formalmente correcto y completo. Sin embargo, hacerlo así, seguramente implicaría el regreso y el volver a escribir desde el principio todos los viejos artículos matemáticos de cuyos resultados dependemos. Los matemáticos pueden y realmente llenan los huecos, corrigen errores, suministran detalles y son cuidadosos cuando están motivados. Nuestro sistema funciona bien en la producción de teoremas confiables que firmemente pueden sostenerse. Es solo que la fiabilidad principalmente no viene de matemáticos que formalmente comprueban argumentos; esto viene de matemáticos que piensan con cuidado y críticamente sobre ideas matemáticas.

Sobre el nivel fundamental, los fundamentos de matemáticas son mucho más inestables que las matemáticas que hacemos. La mayor parte de matemáticos se adhieren a los principios fundamentales que saben son los correctos. Los especialistas en teoría de conjuntos construyen "universos matemáticos" alternos y mutuamente contradictorios tal que sí uno es consistente, los demás lo son también. Esto da muy poca confianza que uno u otro sea la elección correcta o la opción natural. El teorema de incompletitud de Gödel implica que no puede existir ningún sistema formal que sea consistente y más aún bastante poderoso para servir como base para todas las matemáticas que hacemos[8].

En contraste con la gente, las computadoras realizan muy bien los procesos formales. Hay gente que trabaja mucho sobre el proyecto de formalizar partes de matemáticas en la computadora, con deducciones formales que formalmente sean correctas. Este proceso ayudaría sin duda a simplificar y clarificar las matemáticas. Sin embargo, es necesario reconocer que las pruebas humanamente comprensibles y controlables que en realidad se hacen son lo más importante para los matemáticos, y que son muy diferentes de las demostraciones formales. Por ahora, las demostraciones formales están fuera de alcance y sobre todo no pertinentes: se tienen buenos procesos humanos para comprobar la validez matemática.

A continuación nos ocuparemos de las dimensiones social, cognitiva, didáctica y epistemológica de la demostración, preparando con esto una base para abordar nuestro problema de investigación.

2.4.2 Dimensión epistemológica

En el presente apartado se exponen de manera breve algunas ideas relacionadas con la verdad del conocimiento matemático, las diferentes corrientes y teorías relacionadas.

La verdad en matemáticas debe tener un carácter primitivo y fundamental, pues se trata de una disciplina que apenas tiene base donde construirse y, en cambio, sirve de base para muchas otras disciplinas. Debe ser también una verdad "elemental" no en el sentido de que sea de fácil acceso o de fácil comprensión, sino en que debe desempeñar un papel fundamental de "elemento" en la comprensión de lo que sea la verdad en cualquier otra disciplina. No obstante su carácter primitivo, fundamental y elemental, su discurso es extremadamente complejo y sofisticado. La génesis y evolución de sus proposiciones desde su origen con su contexto de demostración, hasta el de justificación, resulta laboriosa y difícil. La ontología de las entidades matemáticas y aún más su epistemología son interpretadas de modo increíblemente dispar y permanecen en el misterio.

Así pues, no es de extrañar que la verdad y la certeza de las proposiciones matemáticas hayan sido objeto de doctrinas opuestas: desde la de los griegos que sostuvieron que la proposiciones eran necesarias y universales y que las de los *Elementos* de Euclides eran absolutamente ciertas, hasta Mac Lane que afirma que no ha lugar a hablar de verdad absoluta en matemáticas y la de Lakatos que equipara la verdad de las proposiciones matemáticas con la verdad de las proposiciones de las ciencias empíricas de la naturaleza.

2.4.2.1 Algunas escuelas y posturas

A continuación describimos de manera sucinta algunas escuelas y posturas en torno a la fundamentación del conocimiento matemático.

Los griegos

[8] Este parte se verá complementada en el apartado dedicado a la parte epistemológica tratada en este capítulo.

Los *Elementos* de Euclides es un tratado de trece libros que serán la referencia validante de cuantas expresiones cobre la creencia en el carácter necesario y universal de las proposiciones matemáticas a lo largo de los siglos – hasta mediados del siglo XIX-. Además del valor que recibe como obra en la que se recogen los trabajos de varias generaciones de pitágoricos, la excelencia del tratado le viene dada por el método que paradigmáticamente acuña y exhibe. Entiéndase método por un lado como método axiomático (referente paradigmático clásico) y como método heurístico o explicación de los pasos que constituyen el proceso del quehacer matemático, y que no es reducible al mero proceso deductivo asociado habitualmente al método axiomático.

El siglo XIX

La preocupación por fundamentar el conocimiento es característico de la modernidad y en el caso de la matemática el siglo XIX protagoniza el surgimiento de nuevas Geometrías que no están en correspondencia con el mundo natural y la emancipación del Análisis respecto de la Geometría y del mismo mundo natural. Así que la verdad como es aceptada en los griegos cambia y se hace necesario asentar la certeza del conocimiento matemático. Así surgen tres grandes escuelas *el logicismo, el formalismo y el intuicionismo.*

El logicismo con bases en Leibnitz y Kant, encuentra dos grandes proponentes: Dedekind y Frege, quienes a su vez serán secundados por Russell y se les identifica en la frase «la Matemática se reduce a la lógica», aunque cada uno tiene su propia concepción lógica, su punto de tropiezo tiene como dificultad común: el tratamiento de los conjuntos finitos.

Las dificultades del logicismo llevan a Hilbert y a Brouwer a las propuestas del formalismo e intuicionismo respectivamente, en ambas escuelas el lenguaje encuentra un espacio importante. El formalismo incluye desarrollos tan fecundos como la axiomatización de la teoría de conjuntos, la creación de los sistemas de Deducción Natural en Lógica, la teoría de modelos o el teorema de incompletitud de Gödel. Por su parte el intuicionismo ha generado métodos para desarrollar tratamientos finitistas de carácter constructivo de gran relevancia.

En estas tres propuestas se puede poner de manifiesto el alcance y los límites de la potencialidad de las ideas filosóficas para generar resultados matemáticos.

Lakatos

Él se encuentra en la historia material que reconstruye racionalmente en el esquema de *conjeturas y refutaciones.* Distingue dos posiciones respecto del tipo de avance de la Matemática: la que defiende un *crecimiento continuo* y la suya que supone un *crecimiento crítico*. La primera posición se caracteriza por la primacía de la deducción en la construcción del conocimiento, las demostraciones confieren a los teoremas un valor universal y necesario, les transmiten en una cadena rigurosamente deductiva las características de los axiomas que les sirven de punto de partida. En la segunda posición del crecimiento crítico se centra no sólo en solventar los posibles contraejemplos lógicos considerados como irrelevantes por el modelo de crecimiento continuo, sino los llamados por él heurísticos. Proceden de someter a crítica tanto los conceptos usados en el enunciado de la conjetura/teorema como en cada uno de los pasos de la demostración. Lakatos en su obra (Lakatos, 1978), supone una ráfaga de aire fresco, arremete contra las creencias heredadas, y propone una nueva aproximación para hacer Filosofía de las Matemáticas, que deje atrás las viejas creencias y parta de la historia misma de la Matemática. No cree en las certezas y defiende un conocimiento falible. No cree en el rigor absoluto y piensa que las demostraciones son siempre mejorables y que algunas conjeturas nunca merecerán el nombre de teoremas. No cree en la piedra filosofal del more geométrico y apuesta por una heurística falible. No cree en las sanciones definitivas de lógica formal y apuesta por una justificación inseparable de la génesis. Lakatos supone una ruptura con el modo heredado de hacer Filosofía de las Matemáticas.

Mac Lane

Para él la matemática es claramente independiente del contexto, los factores que considerará relevantes son extrínsecos a la matemática. Mac Lane reclama la certeza para la matemática al precio de negarle su pretensión de verdad. Su negativa a conceder sentido a cualquier discurso sobre la verdad matemática, radica en que no es una ciencia susceptible de ser contrastada por la experiencia. Dicho de otro modo las corrientes que sitúan a la matemática en la misma situación de las ciencias empíricas, lo llevan a renunciar a atribuir verdad a las proposiciones de la matemática. Reserva para ellas el rigor formal y la consistencia lógica.

2.4.2.2 Teorías de la verdad

Sería imposible hablar de las diferentes propuestas para fundamentar la matemática en este apartado. Sin embargo, nuestra pretensión es manifestar que la verdad de las proposiciones matemáticas y la certeza de su conocimiento han sido constantes, tanto en la historia de las ideas filosóficas, como en el mismo quehacer matemático y se han adoptado diferentes posturas en torno a ello.

Frente a estas cuestiones hay dos grandes posiciones cada una de ellas apoyada en fundamentos a su vez diversos e irreducibles. Tales posiciones son, por un lado la consideración de las proposiciones matemáticas como verdades necesarias y universales, cuyo conocimiento es un conocimiento cierto, y por otro, la de quienes negando la certeza del conocimiento matemático, ponen en cuestión la posibilidad de hablar de verdades necesarias y universales.

Defender la primera posición paga, en general, un precio alto: la irrelevancia de la historia y del quehacer concreto. Pero no es menor el coste de la segunda: bajar la matemática a la superficie de las ciencias empíricas.

Veamos ahora las perspectivas teóricas desde las que la teoría de la ciencia actual habla de verdad:*como correspondencia, como coherencia y como utilidad (teoría pragmática).*

Verdad como correspondencia

> *Y de pronto, encontré en Cicerón que Nicetas pensó que la tierra se mueve. Luego hallé también en Plutarco que algunos otros fueron de esa misma opinión. Y aunque la opinión parecía absurda estimé que también a mí me era lícito examinar si no sería posible descubrir demostraciones más firmes de las revoluciones de las orbes celestes sobre la base de suponer algún movimiento de la tierra.*
>
> *Copérnico*

El planteamiento de la verdad matemática heredado por los iniciadores de la ciencia moderna era de corte pitágorico-platónico: el conocimiento del mundo estaba posibilitado por la matemática, porque el mundo matemático estaba escrito con caracteres matemáticos. Esta posición claramente expresada en los escritos de Copérnico, Kepler y Galileo, perduró hasta el nacimiento de las Geometrías no euclideanas a final de la primera mitad del siglo XIX. La verdad matemática quedaba explicada en la teoría de la correspondencia. Era un lenguaje poderoso capaz de expresar las relaciones entre fenómenos de la naturaleza, en un contexto aristotélico *“decir lo que es, qué es, y de lo que no es, qué no es”* con una acepción específica del verbo ser.

Verdad por coherencia

La ***teoría de la coherencia*** considera que una proposición es verdadera, cuando es “coherente” con el conjunto de proposiciones del sistema al que pertenece. Qué signifique coherente y cómo caracterizarlo es la principal objeción a esta teoría. En el caso de la matemática, sin embargo esta objeción es fácilmente superable. Coherencia en este contexto puede ser identificada con **consistencia**: y este concepto sí es preciso.

A mediados del siglo XIX se dan profundos cambios ontológicos y epistemológicos en la matemática, con el devenir de los cambios en la geometría, el análisis y la teoría de números. Dichos cambios llevaron al abandono de la concepción de verdad por correspondencia.

La invención de nuevas geometrías lleva consigo un cambio epistemológico que radica en que no existe correspondencia 1-1 entre las geometrías y el mundo físico. La matemática proporciona modelos para abarcar el mundo físico. A las proposiciones ya no se les atribuye el predicado de “verdad”, en su lugar aparece el de “validez”, término que nos remite a los sistemas formales. Las proposiciones son o no demostradas en el dominio de validez en el que han sido formuladas. Ya no es la naturaleza quien sanciona los resultados, sino la coherencia interna del sistema.

Para Hilbert verdad y consistencia resultaban ser una misma cosa. Frege reclamaba para la verdad un reino de objetos platónicos, reino en el que las leyes que regían eran las de la lógica.

La consistencia que proclamaba Hilbert parecía requerir la existencia de unos “objetos reales” dados por intuición, respecto de los cuales se exigiera la consistencia de los “objetos ideales”, creados por el lenguaje formal.

El teorema de Gödel confirma que en efecto las demostraciones absolutas de consistencia no son posibles más que para sistemas matemáticamente irrelevantes. La teoría de conjuntos, envolvente y posibilitante del quehacer matemático no puede ofrecer una prueba de su propia consistencia. Sin embargo, los resultados obtenibles en los variados sistemas matemáticos actuales serían rechazables si se encontraran en contradicción con los axiomas de la teoría de conjuntos.

Así pues la verdad se escapa de ser tratada por los puros medios de la lógica.

Verdad por utilidad

La cuestión de si puede llegarle verdad real al pensamiento humano no es una cuestión de teoría, sino una cuestión práctica. En la práctica es donde el hombre tiene que probar la verdad, esto es, la realidad y la fuerza, la terrenalidad de su pensamiento…. Sólo se hacen hipótesis en vista de algún fin determinado.

Marx

Finalmente ser verdadero en la ***teoría pragmática*** consiste en ser útil. La verdad puede ser así gradual: una teoría puede desplazar a otra si resulta ser más útil que la anterior, es decir si da cuenta de los mismos hechos que la primera y además tiene capacidad para explicar otros que la anterior no hacía. La verdad aquí, no resulta ser intrínseca a las proposiciones, sino que se reconoce por sus consecuencias.

El modo pragmático de dar cuenta de la verdad matemática tiene sus raíces en las tradiciones empiristas. Parece haber permanecido en ellas una forma débil de correspondencia que puede quizás llamarse “adecuación”. No es tanto una correspondencia con la naturaleza directamente sino una adecuación al desarrollo de las ciencias de la naturaleza a las cuales sirve de instrumento.

No es pues que las matemáticas nos revelen lo que es el mundo (en términos de fenómenos naturales y sociales), sino que se limitan a proporcionarnos modelos para interpretar con eficiencia los fenómenos que en él acaecen.

En Davis & Hersh (1981) se puede encontrar una reflexión actual de los alcances y límites de este modo de modelizar matemáticamente el mundo en términos de fenómenos naturales y sociales.

Existe otra teoría semántica para abordar la verdad, pero no se discute en este trabajo, en esta se construye una correspondencia entre el lenguaje formal considerado y un dominio de objetos de cuyas relaciones se puede predicar verdadero o falso (Tarski, 1960; 1956).

Cañón (1993) finalmente proporciona una concepción propia de la matemática en diálogo con las corrientes actuales y las presenta acotadas por polos extremos[9]. De tal concepción plasmamos en forma conclusiva las que convienen al desarrollo de esta investigación acerca de la demostración.

Tabla 1. Posturas acerca de la interpretación de la verdad.

Verdad en matemáticas		
La matemática proporciona proposiciones, que una vez logradas ya no son corregibles. El hombre tiene en la matemática la referencia paradigmática de lo que es conocimiento cierto.	La verdad en matemáticas tiene tres caras: 1) la propia de las relaciones entre los objetos (necesidad), 2) la de las expresiones del quehacer matemático, histórico y falible, c) la verdad lógica – validez o consistencia- exigida en las teorías maduras.	La matemática proporciona unos resultados bien fundamentados, pero contingentes. También conocimiento sólido para el que tenemos buenas razones, pero que es conocimiento falible.
La matemática nos proporciona proposiciones universalmente verdaderas. Cualquier ser racional, de cualquier cultura y en cualquier momento histórico puede potencialmente reconocerlas como verdaderas y comprender plenamente su significado.	Los resultados de la matemática son producción cultural, en tanto que son resultados del quehacer humano, y en ese mismo sentido, son relativos a un contexto socio-histórico. Pero este tipo de producción cultural es siempre susceptible de ser expresado en un lenguaje regido por las leyes independientes de las culturas o contextos donde se generó.	Los resultados matemáticos son productos humanos obtenidos en culturas diversas. Mientras no se logran niveles de lenguaje compresivo para expresar homogéneamente resultados logrados en contextos diversos, los hombres de una cultura podrían no comprender el juego de lenguaje matemático empleado por otra cultura y no sólo no tener acceso a los resultados, sino ni siquiera otorgarles el estatus de resultados matemáticos. Estos no son universales, progresivamente lo van siendo, son dependientes de cultura y contexto.
Formalismo y rigor		
El rigor es una característica inherente al método matemático: las definiciones son acabadas y perfectas. Las demostraciones llevan a la certeza apodíctica propia de los procesos deductivos. El lenguaje más adecuado es el más formalizable.	El rigor es un imperativo del quehacer matemático que busca en el método deductivo la confirmación de los procesos constructivos que se han llevado a cabo con definiciones parciales, demostraciones informales y lenguaje en buena parte representativo o empírico.	El rigor es un fantasma. Nuestras demostraciones son siempre susceptibles de ser criticadas, nuestros conceptos de ser completados, nuestro lenguaje de ser enriquecido. El rigor de lo formal deseca a la matemática, le arrebata el contenido y la reduce a mera lógica.
Los axiomas, las definiciones y los teoremas logrados mediante	En la historia se han logrado diversos grados de formalización. Los diferentes sistemas de teorías de conjuntos, proporcionan hoy el marco para todas las teorías matemáticas. Sus axiomas no son incuestionables, en el sentido en que no hay evidencia para el axioma	Un modo de hacer avanzar la matemática consiste en cuestionar los axiomas de partida de una teoría

[9] En la primera columna se presenta la consideración de las proposiciones matemáticas como verdades necesarias y universales, cuyo conocimiento es un conocimiento cierto. En la tercera la posición que se mantiene es negando la certeza del conocimiento matemático, ponen en cuestión la posibilidad de hablar de verdades necesarias y universales.

demostraciones formales, son incuestionables.	de elección. Sin embargo, aceptados como punto de partida, las teorías maduras se construyen con axiomas propios que permiten introducir los conceptos necesarios y suficientes para expresar las propiedades inicialmente deseables de la teoría en cuestión. Es preciso en cualquier caso, diferenciar los períodos de génesis de un resultado, de aquellos otros en que diversas demostraciones diferentes han logrado establecer un mismo teorema. Las definiciones, cuando se dan para matematizar un fenómeno natural, pueden ser incompletas; cuando se crean para resolver una dificultad, pueden verse con posterioridad como equivalentes a otras conocidas, etc., pero una vez fijadas, la demostración se hace con las propiedades en ellas recogidas. Siempre es posible buscar resultados más fuertes o más débiles modificando las condiciones expresadas en la definición inicial.	determinada, pues sólo por hábito, hemos terminado considerándolos intocables. Otro modo de contribuir al avance, consiste en cuestionar las demostraciones, buscando primero contraejemplos al teorema y reformulando luego conceptos y el mismo enunciado. Otorgar un carácter fijo e intangible a definiciones, axiomas y demostraciones sólo conduce a despojarles de cualquier pretensión de significado y contenido.
Generalidad		
Importan sólo los resultados generales, los casos particulares son sólo corolarios de los teoremas generales.	Un resultado general, sin que existan casos particulares, es vacío; pero el hallazgo de métodos o resultados que permiten resolver de manera uniforme lo que hasta entonces han sido casos particulares, es uno de los modos de avance en matemáticas. Los métodos de resolución de los casos asumidos quedarán como patrimonio heurístico para las generaciones posteriores.	Lo realmente importante en matemáticas es desentrañar en la etapa de génesis, la resolución de un problema en los casos particulares. El paso a la forma general de un teorema en que se pierde la perspectiva histórica que le dió origen, es de una importancia secundaria.

La postura intermedia de Cañón (1993) ayuda como precedente a la forma de entender la verdad en el siguiente contexto.

La verdad en didáctica de la matemática

Como hemos visto hasta ahora en la línea del tiempo se presentan momentos de cambio en la matemática que implican cambios epistemológicos profundos en la concepción de verdad y certeza en matemáticas y eso impacta en el papel de la demostración y en las técnicas permitidas y utilizadas que responden a cada institución o al contexto correspondiente.
A las corrientes antes mencionadas podemos añadir la verdad en didáctica de las matemáticas donde los procesos de verificación no son los mismos que interesan a un especialista en lógica, a un filósofo, o a un matemático. Las exigencias son distintas y los fines que se persiguen también lo son, digamos que para “alcanzar” la verdad en este contexto se utiliza el término “demostración” en una forma mucho más flexible por los autores, que las aludidas en el apartado anterior.
En esta dirección se distinguen distintos niveles de demostración. Enseguida hacemos un breve recorrido por algunas distinciones realizadas por diferentes especialistas en el campo.
La clasificación de pruebas para Harel & Sowder (1998) se da en *pruebas de convicción externa, empíricas y analíticas.* Las primeras se caracterizan porque el convencimiento se da mediante el *ritual* de la presentación, la palabra de una *autoridad,* o la forma *simbólica* de un argumento. En las empíricas las conjeturas se validan o se rechazan en virtud de hechos físicos o sensoriales y a su vez se diferencian en *inductivas* y *perceptuales.* Las inductivas atienden a casos particulares y las perceptuales a observaciones que provienen de imágenes mentales y su coordinación pero carentes de capacidad para transformar o anticipar resultados de dicha transformación. En los *analíticos* la validación de conjeturas se da a través de deducciones lógicas. La división de los esquemas analíticos esta dada por *transformacionales* y *axiomáticos.* Los primeros se presentan

transformando el enunciado en uno lógicamente equivalente o bien en la transformación de imágenes a través de deducciones y los segundos parten de definiciones y axiomas establecidos.
Otra clasificación distingue entre *pruebas pragmáticas e intelectuales* (Balacheff, 1987)*.* La distinción se da en función del *contrato didáctico* establecido con los alumnos, que se manifiesta por el cambio de función de la actividad matemática en el aula. Las primeras se realizan por el alumno –por ejemplo, en la geometría práctica, la de regla y compás- con el fin de establecer la validez de una proposición. Cuando no es posible acceder a su realización práctica –por ejemplo, en geometría deductiva-, las validaciones son intelectuales. Para ambas pruebas Balacheff sitúa distintos niveles: 1) *Empirismo naïf.* Se concluye la verdad de una proposición a partir de la realización de un número reducido de casos. 2) E*xperiencia crucial.* El individuo plantea explícitamente el problema de generalización, y lo resuelve mediante la realización de un caso que considera lo menos particular posible. 3) *Ejemplo genérico.* Consiste en la explicación de razones de validez de una proposición mediante un caso representativo de una clase de individuos. 4) *Experiencia mental*. No se lleva a cabo la experiencia, sino que sólo se imagina su realización.

Bell clasifica las pruebas en *empíricas y deductivas* (Bell, 1976*;* 1979). Las primeras varían desde los ejemplos no relacionados hasta la verificación de la totalidad de ellos (caso finito) y las segundas las distingue por los grados de completitud en la construcción de cadenas de argumentos, desde las fallidas (no existe realmente tal cadena) hasta las completas (se produce una deducción matemática correcta).

Bell distingue tres dimensiones en el desarrollo de la comprensión y uso de las demostraciones. La primera se refiere al *grado de regularidad o de racionalidad* esperado por los alumnos. La segunda dimensión es la de *cualidad explicativa* de la respuesta. La tercera esta relacionada con el *nivel de sofisticación de las técnicas de demostración* disponibles para el alumno (Bell, 1979).

Gutiérrez (2001) clasifica las demostraciones (Figura 2) a partir de la conjugación de los modelos de Bell (1976, 1979), Balacheff (1987) y Harel y Sowder, (1998).

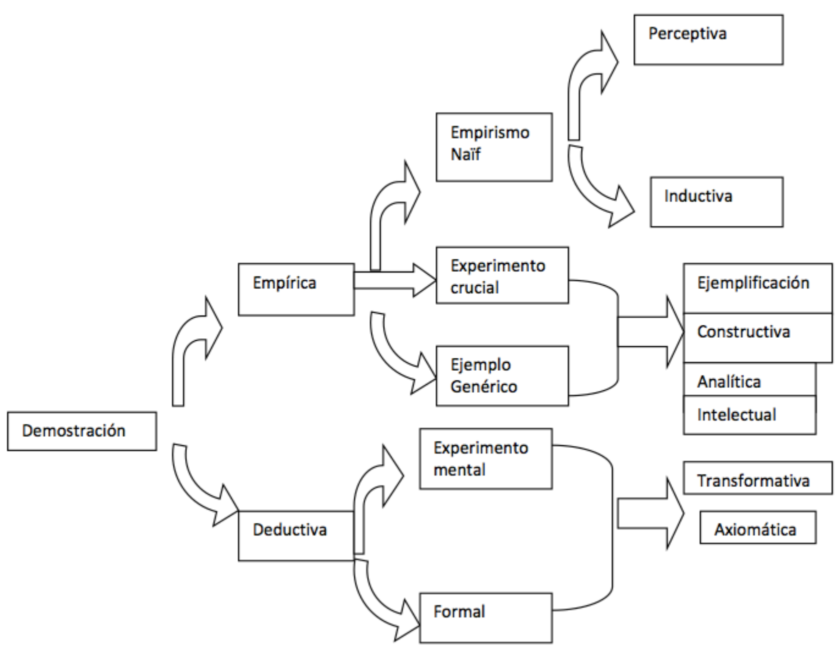


Tabla 2. Clasificación de los tipos de demostración según Gutiérrez (2001).

Existen muchas otras clasificaciones en esta dirección como por ejemplo las ya mencionadas en el apartado 2.2.3 Acerca de los proceptos y la demostración matemática (p. 28), de Chin y Tall (Chin 2002; Chin y Tall, 2000) basadas en la etapa de desarrollo y las *sintácticas y semánticas* de Weber & Alcock (2004) descritas en el apartado 2.3.1 La práctica de los matemáticos (p.30).

2.4.3 Dimensión social

Tradicionalmente se ha considerado que el fin primordial de la demostración consiste en verificar la proposición o teorema que es objeto de estudio. Sin embargo desde la didáctica de las matemáticas hay un buen número de autores que contemplan otros propósitos y funciones (Bell, 1976; de Villiers, 1993; Ibañes, 2001a; Hanna, 2000; Dreyfus, 1991 y Reid, 1996). Otra perspectiva interesante es la ofrecida desde el campo de práctica, en donde se consideran fines ligados a los progresos de la matemática, a la comprensión, a la comunicación del conocimiento, a la satisfacción y al reconocimiento. En este apartado consideramos ambas perspectivas por la correspondencia con el contexto en el que se desarrolla esta investigación.

2.4.3.1 ¿Qué funciones tiene la demostración?

Bell menciona tres significados de la demostración matemática: 1) *verificación o justificación*, 2) *iluminación,* y 3) *sistematización*. La primera concerniente a la verdad de la proposición, la segunda en el sentido de que se espera que una buena demostración proporcione ideas de por qué la proposición o teorema es verdadero y por último la sistematización, que implica la organización de los resultados en un sistema deductivo de axiomas, conceptos principales y teoremas, así como los resultados derivados de éstos (Bell, 1976).
Otros autores como de Villiers (1993), desarrollando más estas ideas identifica las funciones de la demostración matemática como *verificación, explicación, sistematización descubrimiento y comunicación*, que se pueden definir como sigue:

· Verificación: Ésta es la función comúnmente atribuible, pues precisamente con ella se busca la verdad de una afirmación.

· Explicación[10]: Con esta función se espera que una buena demostración proporcione ideas del por qué es cierta.

· Sistematización: Organización de resultados dentro de un sistema axiomático deductivo, es decir utilizar axiomas, definiciones y teoremas ya demostrados con anterioridad.

· Descubrimiento: Como método de exploración, análisis e inventiva que en ocasiones nos conduce a nuevos resultados.

· Comunicación: Es la manera de expresar los resultados a otros profesionales, ante el profesorado y los propios estudiantes, provee un espacio para el análisis crítico de aciertos y errores.

[10] Bell citado por Ibañes (2001 a), la considera como iluminación.

La función de verificación Ibañes (2001) la divide en dos diferentes: *comprobación y convencimiento*. Aquí consideraremos la comprobación en el sentido de Dreyfus.

> "Comprobar significa realizar discusiones que nos convenzan de que, realmente, una conclusión responde a la pregunta formulada, y que lo hace correctamente. Un modo muy práctico de comprobación es el de recorrer un camino inverso, como lo sería la diferenciación para verificar que se ha hallado correctamente la función primitiva. Es excesivamente frecuente que en el contexto escolar no se considere la comprobación como parte esencial de la actividad matemática." (Dreyfus, 1991).

Por su parte, Hanna (2000) además de las anteriores incorpora la función de *construcción* de una teoría empírica, la de *exploración* del significado de una definición o la consecuencia de una suposición y la *incorporación* de un nuevo conocimiento hecho a una nueva estructuración.

Reid (1996) reconoce la *necesidad* como el propósito o la función de la demostración y la valora como *explicación, exploración y verificación* mencionando también la *iluminación y comprensión.*

van Asch (1993) para responder a la cuestión ¿qué argumentos puede haber para presentar u omitir demostraciones? expone una serie de razones a favor y otras en contra. Las razones a favor las vincula con las siguientes funciones de la demostración:

a) Ayuda a convencer cuando no se está seguro de la validez del resultado.

b) Apoya en entender el significado del teorema.

c) Ayuda a memorizar el teorema.

d) El método empleado en la demostración puede contener un algoritmo útil.

e) Una demostración puede finalizar un proceso de búsqueda.

f) Su finalidad puede consistir en exponer un método.

g) En ocasiones, muestra el significado mismo de una definición dada.

Por otra parte en el campo de práctica se perciben otros fines además de la verificación, entre otros en este apartado se mencionan el de comunicar ideas, avanzar en el campo, comprender y trasmitir maneras de pensar y organizar el conocimiento. Para ello nos centraremos en describir la práctica del matemático.

2.4.3.2 ¿Cómo es la práctica del matemático?

En este apartado intentaremos plasmar algunas de las principales ideas escritas por el matemático William P. Thurston de la Universidad de Princeton y distinguido con la medalla Fields[11] en el año de 1982. Tales ideas fueron extraídas de Thurston (1994). Centrándonos en las cuestiones que nos interesan, resumiremos las respuestas de algunas preguntas que él se plantea inicialmente, tratando de presentarlas en forma tal, que no se pierda el pensamiento del autor:

¿Qué es lo que realizan los matemáticos?

[11] Es el mayor premio otorgado a los trabajos de un matemático

Para inducir la respuesta recurre a una cadena de preguntas y respuestas la primera de ellas ¿Cómo demuestran los matemáticos los teoremas?
Esta pregunta introduce un interesante tópico, pero para iniciar, proyecta dos latentes supuestos:

(1) que es uniforme, objetiva y firmemente establecida la teoría y la práctica de la demostración matemática,
(2) que los progresos hechos por los matemáticos consisten en demostrar teoremas.

Vale la pena examinar estas hipótesis, más que aceptarlas como obvias y empezar desde ellas, así que surge la pregunta: ¿cómo los matemáticos hacen avanzar la comprensión de las matemáticas?, lo hacen encontrando maneras para que la gente entienda y piense acerca de ellas.
El rápido avance de las computadoras sensibiliza este punto. Cuando Appel y Haken completaron una demostración del teorema del mapa de los cuatro colores usando un cálculo automático masivo, se produjo mucha controversia. Thurston interpretó la controversia teniendo poco por hacer en relación con la duda que se tiene con respecto a la veracidad del teorema o la exactitud de la prueba. Más aún, esto refleja un continuo deseo de la *comprensión humana* de la demostración, es decir, un deseo por saber cuándo un teorema es verdadero.
Hoy en día, es común realizar con las computadoras cálculos a gran escala. Se pueden por ejemplo imprimir una tabla de los primeros 10,000 números primos, solamente por encontrarlos y su impresión no es algo que realmente sea lo que buscan después de todo. «El descubrimiento en este sentido lo que en realidad quiere no es usualmente alguna colección de "respuestas"- lo que quieren es *comprender.» (p. 162)*
Para él las matemáticas avanzan, si las incorporamos dentro de nuestro pensamiento. Como nuestro pensamiento cada vez es más sofisticado, generamos nuevos conceptos y estructuras matemáticas: los cambios en los contenidos matemáticos reflejan nuestro pensamiento.
"Si lo que nosotros hacemos es construir mejores formas de pensamiento, entonces las dimensiones psicológica y social son esenciales para un buen modelo para el progreso matemático." (p.162). Estas dimensiones están ausentes en el modelo popular. En caricatura el modelo popular sostiene que
D. los matemáticos parten de algunas estructuras matemáticas básicas y una colección de axiomas "dados" acerca de estas estructuras, que
T. existen varias preguntas importantes para resolverse acerca de estas estructuras que pueden iniciarse como proposiciones matemáticas formales, y
P. la labor de los matemáticos es tratar de encontrar un camino que los lleve desde los axiomas hasta la proposición o a su negación.
Podemos llamar a este modelo de matemáticas Definición- Teorema- Demostración (DTP por sus siglas en inglés).Se visualiza como una clara dificultad en el modelo DTP el que no explique la fuente dónde surgen las cuestiones. «No medimos el reconocimiento dando a conocer algunas producciones abstractas en la forma de definiciones, teoremas y demostraciones. La medida de nuestro éxito es habilitar personas para entender y pensar más clara y efectivamente acerca de la matemática.» (p. 163)
Otra cuestión relevante es la de comunicación como una función de la demostración. Aclaremos cómo se da en la comunidad de práctica.

¿Cómo se comunica la comprensión matemática?

La transferencia de entendimiento de una persona a otra no es automática. Es un trabajo arduo y difícil. Por lo tanto, para analizar el entendimiento de matemáticas Thurston (1994) considera importante tener en cuenta **quién** entiende **qué**, y **cuándo**.

Habla del desarrollo de hábitos de comunicación, con frecuencia disfuncionales de los matemáticos. En este sentido hace referencia a los organizadores de conferencias en coloquios, quienes por todas partes exhortan a los ponentes a explicar las cosas en términos elementales. Sin embargo, la mayor parte de la audiencia le da poco valor a esto.

> «Este modelo es similar al sostenido en las aulas, donde examinamos los movimientos del discurso para el registro de lo que pensamos que los estudiantes "deberían" aprender, mientras los estudiantes tratan de luchar cuerpo a cuerpo con las cuestiones más fundamentales de aprender nuestra lengua y hacer conjeturas sobre nuestros modelos mentales. Los libros compensan esto dando muestras de cómo solucionar cada tipo de problema de la tarea.» (p. 166)

Los profesores compensan poniendo tareas y exámenes que son mucho más fáciles que el material "cubierto" en el curso. Asumimos que el problema está en los estudiantes más que en la comunicación. «Las personas ajenas al área están asombradas con este fenómeno, pero dentro de la comunidad matemática, lo despedimos restándole importancia.»

Thurston considera que esta dificultad en su mayoría tiene que ver con la lengua y la cultura de matemáticas, que esta dividida en ramas. Conceptos básicos usados cotidianamente dentro de una rama son ajenos a otra rama. Por el contrario la comunicación funciona bien dentro de las ramas de la matemática. Dentro de una rama, la gente desarrolla un cuerpo de conocimiento común y técnicas conocidas. Por el contacto informal, se aprende a entender y copiar modos de pensar, de modo que las ideas puedan explicarse clara y fácilmente.

El conocimiento matemático puede transmitirse rápidamente dentro de una rama, de manera informal en cosa de minutos de una persona a otra, en una hora quizás si se dirige a un grupo y en unas horas o días si se presenta en un escrito de 15 o 20 páginas.

¿Por qué existe una gran distancia de la discusión informal a la presentación escrita?

Las personas usan amplios canales de comunicación que van más allá de la lengua formal matemática. Usan gestos, dibujan cuadros y diagramas, hacen efectos sonoros y usan el lenguaje corporal. La comunicación con mayores posibilidades es la de doble dirección, de modo que la gente pueda concentrarse en la parte que necesita mayor atención.

En conferencias, la gente es más inhibida y formal y, en artículos es todavía más formal. Los escritores traducen sus ideas en símbolos y lógica, y los lectores tratan de regresar a las ideas.

¿Por qué hay tal discrepancia entre la comunicación dentro de una rama y la comunicación fuera de ella, y no digamos la comunicación fuera de matemáticas?

Las matemáticas en algún sentido tienen un lenguaje común: una lengua de símbolos, definiciones, técnicas, cálculos, y lógica. Esta lengua de manera eficiente transmite unos, pero no todos, los modos de pensamiento matemático. Los matemáticos aprenden a traducir ciertas cosas casi inconscientemente de un modo mental a otro, de modo que algunas afirmaciones, rápidamente se aclaran. Sin embargo, cuando se lee un artículo de matemáticas en una rama en la que no se es especialista, la atención se centra en los pensamientos que están entre líneas y cuando se entiende del tema, el sistema formal es por lo general innecesario y redundante. La gente familiarizada con la manera de hacer las cosas en un campo reconoce varios modelos de afirmaciones o fórmulas como idiomas o rodeos para ciertos conceptos o imágenes mentales. Pero el lenguaje está vivo sólo para quienes lo usan.

Hay otro efecto causado por las grandes diferencias entre como pensamos en matemáticas y como escribimos. Un grupo de matemáticos que actúan recíprocamente el uno con el otro puede

guardar una colección de ideas matemáticas vivas por años, aun cuando la versión registrada de su trabajo matemático se diferencie de su pensamiento real, teniendo mucho mayor énfasis sobre el lenguaje, símbolos, lógica y formalismo. Pero como las nuevas generaciones de matemáticos aprenden sobre el contenido y tienden a interpretar lo que leen y oyen más literalmente, el formalismo se registra y comunica más fácilmente y se tiende a asumir gradualmente otros modos de pensamiento.
Thurston considera que existen dos muestras de esta tendencia, de modo que las matemáticas no sean vistas completamente bajo el formalismo. Primero, las generaciones jóvenes de matemáticos continuamente descubren y proponen ideas nuevas, así revitalizan los diversos modos de pensamiento humano en matemáticas.
Segundo, los matemáticos a veces inventan nombres y buscan la unificación de las definiciones que sustituyen ambigüedades técnicas y dan buenas herramientas para las ideas. Nombres como "grupo" para sustituir " un sistema de elementos que satisfacen … ", esto puede no haber representado avances en las ideas entre expertos, pero facilitan enormemente la comunicación.

Como cierre a la respuesta de la pregunta ¿cómo se comunica la comprensión matemática?, el autor dice: «Los matemáticos debemos esforzarnos más en cuanto a la comunicación de ideas matemáticas. Para lograrlo, tenemos que prestar mayor atención a la comunicación, no solamente a nuestras definiciones, teoremas, y pruebas, sino también a nuestros modos de pensar. Tenemos que apreciar el valor de las diferentes maneras de pensar sobre la misma estructura matemática. Tenemos que concentrar mucha más energía en la comprensión y la explicación de la infraestructura básica mental de matemáticas – en consecuencia menos energía sobre los resultados más recientes. Esto hace que desarrollemos un lenguaje matemático que sea eficaz para el objetivo radical en la transmisión de ideas a la gente que aún no las conoce.» (p. 167)
Parte de la comunicación de la comprensión matemática se da a través de las demostraciones.

¿Qué motiva a la gente a "hacer" matemáticas y cómo es el ambiente en el campo?

La respuesta puede ser que encuentra una verdadera satisfacción y motivación en hacer matemáticas, en estudiar las formas de pensamiento que explican, organizan y simplifican. Esta satisfacción la proporciona el descubrimiento de nuevas matemáticas, el redescubrimiento de matemáticas ya establecidas, el aprendizaje de formas de pensamiento de una persona o de un texto, el encuentro con nuevos modos de explicar o de ver una estructura matemática anterior.
Esta motivación interior conduce a pensar que se hacen matemáticas únicamente para el propio bien, pero el ajuste social es sumamente importante. Los matemáticos son inspirados por otra gente, buscan la apreciación por otros, y gustan de ayudar a otras personas a solucionar problemas matemáticos. La interacción social ocurre cara a cara en reuniones y por correspondencia escrita y electrónica, preliminares de artículos y artículos en revistas especializadas. Un efecto de este sistema, sumamente social de matemáticas, es la tendencia de los matemáticos a estar al día con el propósito de producir nuevos teoremas. Esto probablemente no es muy eficiente: pues ser mejores matemáticos aparentemente significa tener cubierto el campo intelectual mucho más uniformemente. Pero a la mayor parte de los matemáticos no les gusta estar solos, y tienen problemas para motivarse acerca de un tema, incluso si personalmente realizan avances, necesitan tener colegas que compartan su entusiasmo.
Además de la motivación interior y la motivación social informal para hacer matemáticas, se conducen por consideraciones de economía y estatus. Los matemáticos, como otros académicos, hacen de evaluadores y son evaluados. Comenzando con grados, y siguiendo por las cartas de recomendación, convienen decisiones, deciden promociones, realizan arbitrajes de reportes de

investigación, reciben invitaciones para dictar conferencias, estímulos, premios, aprecio, etc… Están implicados en muchas posiciones, en un sistema fuertemente competitivo.
Jaffe y Quinn (1993, citados por Thurston) analizan la motivación para hacer matemáticas en términos de una divisa común en la cual muchos matemáticos creen: *créditos-teoremas*.
Para Thurston el fuerte énfasis comunal sobre créditos-teorema tiene un efecto negativo sobre el progreso matemático. Si se logra que avance el entendimiento humano de las matemáticas, entonces serían mucho mejor reconocidos en el exterior en una más amplia gama de actividades. Quien ve el camino para demostrar teoremas lo hace en el contexto de una comunidad matemática; no lo hacen solos. Dependen del entendimiento de matemáticas que otros ya trabajaron. Una vez que un teorema ha sido demostrado, la comunidad matemática depende de la red social para distribuir las ideas a la gente que podría extenderlos y usarlos- el medio de impresión es lejano, demasiado oscuro e incómodo.
Incluso si se toma la estrecha opinión que la producción son teoremas, el equipo es importante. El fútbol puede servir como una metáfora. No juzgamos a jugadores sobre un equipo de fútbol sólo por si ellos personalmente marcan un gol juzgamos el equipo por su función como tal.
En matemáticas a menudo resulta que un grupo de matemáticos avanza con una cierta colección de ideas. Hay teoremas en el camino de estos avances que casi inevitablemente serán demostrados por una persona o por otra. Sin embargo, están en una posición para demostrar aquellos teoremas debido a los esfuerzos colectivos del equipo. El equipo tiene una remota función, en la absorción y el aprovechamiento de teoremas una vez que son probados. Incluso si una persona puede demostrar todos los teoremas, son inútiles si nadie más los aprende.
En esta dimensión podemos caracterizar el trabajo del matemático como sigue:
1) Se dedica a construir formas de pensamiento que ayuden a la comprensión de la matemática, 2) al descubrimiento de resultados, no sólo para encontrar respuestas sino para comprender, 3) a la búsqueda de la verdad y la certeza de tales resultados, 4) a la formación de personas que entiendan y piensen clara y eficientemente en matemáticas, 5) a comunicar ideas y comprensión, esto se hace a través de las demostraciones. No en forma acabada, sino con las ideas y formas de pensamiento que subyacen a la misma. Tal comunicación se realiza de acuerdo a quién va dirigida, 6) los esfuerzos son realizados en forma colaborativa y no de manera aislada. Y 7) finalmente entender el avance de la matemática como creación y descubrimiento.

> La creación se manifiesta de varios modos conducentes a alumbrar relaciones y objetos no existentes –no expresables en lenguaje- anteriormente. El descubrimiento consiste sin embargo en hacer patentes las relaciones entre lo nuevo y lo heredado y eso se da en el lenguaje. Y es precisamente ahí, donde el rigor tiene su lugar porque la existencia de esos nexos que vinculan entre sí los resultados matemáticos precedentes con los futuros asegura que el rigor del quehacer demostrativo conduzca a buen fin. La creación no es arbitraria, lo nuevo sólo entra a formar parte del universo matemático en la medida en que sus nexos con lo originario se hacen patentes. Por eso, los avances van siempre de la mano de la creación de lenguajes que faciliten esta tarea y junto con ellos, nuevos métodos de demostración y posibles principios de validación de esas nuevas formas de demostración. Cañon (1993, p 356).

2.4.4 Dimensión cognitiva

La psicología cognitiva se caracteriza por tener en cuenta al organismo generador de la conducta y se interesa por el camino que conduce a una determinada actuación. El enfoque cognitivo insiste sobre cómo los individuos representan el mundo en que viven y como reciben información actuando de acuerdo con ella. Se considera que los sujetos son constructores o procesadores de

información y la psicología cognitiva ha prestado una considerable atención a los procedimientos de recepción y mantenimiento de la información en los que interviene la atención, la percepción y la memoria. Sin embargo en las últimas décadas se ha prestado más atención a los procesos de elaboración de la información mediante el pensamiento y el razonamiento.
Es en esta última parte, nuestro interés se centra en el sujeto para conocer como se dan los procesos de elaboración de los elementos que intervienen en una demostración, así como la construcción de la misma. Para ello, primero nos interesa responder la siguiente pregunta.

2.4.4.1 ¿Cómo hace la gente para entender matemáticas?

Esta es una pregunta complicada que Thurston (1994) intenta responder desde la idea de que comprender es una cuestión interna e individual de la que es difícil tomar conciencia completamente, difícil comprender y difícil comunicar. Las personas tienen diferentes formas de entender piezas particulares de matemáticas. Para ilustrar esto, la derivada de una función nos queda bien. Puede pensarse en las formas: Infinitesimal, simbólica, lógica, geométrica, física, o de formas más intuitivas como por aproximación, o de manera microscópica o en matemáticas mucho más elevadas definida como “ *la derivada de una función de valores reales f en un dominio D es la sección langrangiana del fibrado cotangente T^* (D) que proporciona la forma de conexión para la única conexión extendida sobre el **R**-fibrado trivial Dx**R** para el cual la gráfica de f es paralela”.* Esta es una lista de diferentes formas de *pensamiento o concepciones acerca de* la derivada, más que una lista de diferentes *definiciones lógicas.* A menos que se hagan grandes esfuerzos para mantener el tono y sabor de las ideas originales, las diferencias empiezan a evaporarse tan pronto como los conceptos mentales se trasladan en definiciones precisas, formales y explicitas.
La lista continua no existen razones para detenerse. Una muestra para agregarse a la lista lo ayuda a ilustrar esto. «Podemos pensar que conocemos todo lo que se ha dicho acerca de cierto tema, Pero nuevas ideas están a la vuelta de la esquina».
Estas diferencias no son sólo una curiosidad. El pensamiento humano y la comprensión no trabajan por un solo camino, como una computadora con una simple unidad central de procesamiento. Nuestros cerebros y mentes parece que están organizados en una variedad separada de poderosas facultades. Thurston (1994) describe las principales divisiones que son importantes para el pensamiento matemático como:

1. Lenguaje. Tenemos un poderoso propósito-especial facilitado para hablar y entender el lenguaje humano, el cual también nos vincula a la lectura y a la escritura. Nuestra facilidad lingüística es una importante herramienta para el pensamiento, no sólo para la comunicación. Un ejemplo crudo es el de la fórmula para resolver ecuaciones cuadráticas, la cual la gente puede recordar como una pequeña canción. “*x* igual a menos *b* más o menos la raíz cuadrada de *b* menos *4* por *ac* todo sobre *2a*”. El lenguaje matemático de símbolos esta muy ligado a nuestra facultad de lenguaje. El fragmento de símbolos matemáticos disponibles para la mayoría de los estudiantes de cálculo tiene sólo un verbo, “=”. Esto en virtud de que los estudiantes lo usan cuando necesitan de un verbo. Alguien que ha enseñado cálculo alguna vez ha visto estudiantes que de manera instintiva escriben “$x^3 =3x^2$” y los similares.
2. Visión, sentido espacial, sentido kinestésico (movimiento). La gente tiene facilidades muy poderosas para recoger la información visual o kinestésicamente y pensar con su sentido espacial. De otra manera, no tienen facilidad para empotrar una visión inversa, es decir, interiorizar una imagen en dos dimensiones. En consecuencia, los matemáticos por lo general tienen menos y figuras más pobres en sus artículos y libros que en sus cabezas.

Un fenómeno interesante en pensamiento espacial es que la escala hace una gran diferencia. Podemos pensar acerca de objetos pequeños en nuestras manos, o podemos pensar en estructuras más grandes clasificadas como humanas que exploremos, o podemos pensar en las estructuras espaciales que nos abarcan y que nos movemos a su alrededor. Tendemos a pensar con más eficacia con imaginación espacial sobre una escala grande: es como si nuestros cerebros tomaran las cosas grandes más en serio para dedicarles más recursos.

3. Lógica y deducción. Tenemos algunos modos empotrados de razonamiento y reunión de cosas asociadas con cómo hacemos la deducción lógica: causa y el efecto (relacionado con la implicación), la contradicción o la negación, etc.
   Los matemáticos al parecer generalmente no confían en las reglas formales de deducción como ellos piensan. Más bien, sostienen sólo un bit de estructura lógica de una demostración en sus cabezas, rompiendo demostraciones en resultados intermedios de modo que, no tienen que sostener demasiada lógica de una vez. Es interesante que aunque "o", "y" e "implica" tengan un uso formal idéntico, pensamos "o" e " y" como conjunciones mientras que " implica" como un verbo.
4. Intuición, asociación y metáfora. La gente tiene habilidades asombrosas de sentir algo sin saber de donde viene (intuición); para sentir que algún fenómeno o situación u objeto se parece a algo más (asociación); y para construir y probar conexiones y comparaciones, sosteniendo dos cosas en mente al mismo tiempo (metáfora). Estas instalaciones son bastante importantes para matemáticas. Las palabras, la lógica y los cuadros detallados que repiquetean alrededor pueden inhibir intuiciones y asociaciones.
5. Estímulo-respuesta. Esto con frecuencia es acentuado en las escuelas; por ejemplo, si vemos 3927x253, escribimos un número encima del otro y dibujamos una línea debajo, etc. Esto es también importante para "hacer" matemáticas: viendo un diagrama de un *nudo*, un matemático (experto) podría escribir una presentación para el *grupo fundamental* de su complemento según un procedimiento similar en este sentido al algoritmo de multiplicación.
6. Proceso y tiempo. Tenemos una facilidad para pensar en procesos o secuencias de las acciones que a menudo pueden usarse con buen efecto en el razonamiento matemático. Un modo de pensar en una función es como una acción, un proceso, que toma el dominio para el rango. Esto es valioso, en particular, componiendo funciones. Otro uso de esta facilidad está en recordar demostraciones: la gente a menudo recuerda una demostración como un proceso que consiste en varios pasos. En la topología, la noción de homotopía es más pensada como un proceso variando el tiempo. Matemáticamente, el tiempo no tiene ninguna diferencia con una dimensión espacial más, pero ya que la gente interactúa con esto de un modo muy distinto, esto es psicológicamente muy diferente.

2.4.4.2 Procesos mentales del estudiante para enfrentar demostraciones

Hasta aquí se han descrito algunas facultades que nos permiten aprender, conocer y generar conocimiento. Pero, ¿qué procesos mentales deben tener lugar en el estudiante cuando se enfrenta a una demostración? En este sentido Ibañes (2001) considera que para abordar una demostración el estudiante debe poseer un *esquema de prueba*[12] adecuado que le permita comprender la situación y formarse una idea correcta de lo que hay que hacer. Supuesto esto, distingue las siguientes *fases*:

[12] Para los esquemas de prueba ver la dimensión epistemológica.

1. Fase de interpretación, que incluye:

- Comprender los términos matemáticos empleados.

- Interpretar las proposiciones lógicas, las expresiones usuales, las palabras de enlace, la notación utilizada, etcétera.

- Entender el problema (demostrar un enunciado) y la clase de solución que requiere (un razonamiento universal).

- Identificar el proceso como una demostración.

2. Fase de análisis, en la que se puede distinguir:

- Recordar resultados anteriores y relacionarlos oportunamente con la proposición objeto de estudio.

- Revisar la corrección del razonamiento.

3. Fase de síntesis, que lleva consigo:

- Identificar las *líneas maestras* y las *ideas clave* de la demostración.

- Comprender globalmente el proceso.

4. Fase de profundización, en la que la atención se centra en:

- Estudiar la necesidad de las hipótesis.

- Reconocer el *significado* del teorema.

- Identificar el *tipo* de enunciado y los *métodos*, *estilos* y *modos* empleados.

- Valorar las *funciones* que cumple la demostración estudiada.

En esta misma dirección se pueden revisar los marcos teóricos mencionados en el apartado 2.3.1 La práctica de los matemáticos acerca de la resolución de problemas y conocimiento estratégico propuestos por Schoenfeld (1985), Carlson (2000), Carlson y Bloom (2005), Weber (2001), Weber & Alcock (2004) o el de Chin & Tall (2002) mencionado en el apartado 2.2.3 Acerca de los proceptos y la demostración matemática (p.28) y que trata acerca de las etapas de desarrollo presentes en una demostración.

2.4.4.3 Dificultades u Obstáculos Cognitivos que enfrentan los estudiantes con la demostración

En las últimas décadas muchos investigadores en Educación Matemática se han interesado en el estudio de los procesos cognitivos que permiten dar una explicación de las dificultades que tienen los estudiantes para la producción de demostraciones Tall (1991). Esta cuestión ha motivado tesis doctorales (Moore, 1990; Goetting, 1995; Ibañes, 2001a; Pedemonte, 2002), así como otras investigaciones y contribuciones (Dreyfus, 1999; Harel & Sowder, 1998; Tall, 2002; Tall & Vinner, 1981; Vinner, 1991; de Villiers, 1993; Selden & Selden, 1995; y Thompson, 1996). Por otro lado, Movshovitz-Hadar (1988) y Dreyfus & Hadas (1996) hablan de la compleja y difícil tarea de transición del pensamiento basado en el cálculo al pensamiento deductivo.
La revisión de algunos de los trabajos mencionados, nos conducen a pensar en las dificultades de los estudiantes de nuevo ingreso en la universidad en su interacción con la demostración, como un

asunto multifactorial en el que intervienen entre otros factores: 1) su historia escolar, 2) el libro de texto, 3) la lógica y las formas de conocimiento, 4) la claridad conceptual y la capacidad lingüística, 5) las normas sociomatemáticas convenidas, así como las creencias y concepciones tanto de estudiantes como de profesores.
Enseguida mencionaremos de qué forma intervienen algunos de estos puntos.

2.4.4.3.1 Historia Escolar

Actualmente en todos los niveles se presta atención a propuestas de aprendizaje más cooperativas, más conceptuales y más conectadas, es decir, con mayor frecuencia se solicita a los estudiantes explicar su razonamiento. Por ejemplo, Silver (1994), sugirió que las explicaciones escritas deberían ser un rasgo frecuente en las matemáticas escolares básicas. Por otra parte, hay informes de investigaciones realizados en escuelas primarias muy alentadores, que muestran que la transición al razonamiento deductivo es posible con clases planificadas con cuidado con una enseñanza basada en el razonamiento matemático, el argumento y la justificación (e.g. Maher & Martino, 1996 y Lampert, 1990a). Sin duda los rasgos mostrados en las investigaciones antes citadas no se dan comúnmente en la educación primaria, secundaria y preparatoria, sino más bien de manera extraordinaria. Sin embargo, en la medida que se tome conciencia y la explicación, argumentación y justificación ocupen su lugar en la enseñanza básica, esto repercutirá en el nivel superior. Al respecto Epp (2003), menciona que las dificultades de los estudiantes con el razonamiento matemático formal en su ingreso a la universidad pueden ser resultado de su instrucción anterior en matemáticas. Los profesores de matemáticas a menudo afrontan un dilema difícil: acentuar principios generales o enfocarse a estrategias concretas. La acentuación de principios generales probablemente conduce a una comprensión más profunda, pero si el tiempo es limitado, los estudiantes con más dificultades pueden no conectar los principios con problemas específicos y por lo tanto fallar en los exámenes. Usar estrategias concretas de resolución de problemas puede conducir a una mayor fracción de estudiantes al éxito en la solución de problemas estándar, pero esto puede obscurecer ideas básicas y proporcionar una base inadecuada para el trabajo más avanzado. Considerando las presiones que se han ejercido sobre los profesores para que la mayoría de sus estudiantes alcancen el éxito en las pruebas estandarizadas, y que han ido aumentando durante varias décadas, se ha vuelto natural recurrir a estrategias y atajos antes que a los principios generales.

Otro factor implicado en la producción de demostraciones, es la influencia ejercida por los libros de texto como se explica en el siguiente párrafo.

2.4.4.3.2 Influencia de los libros de texto

Aquí hacemos referencia al trabajo de Dreyfus (1999, p. 97) que, aunque no realiza un análisis sistemático señala ejemplos de libros de texto utilizados en preparatoria y cursos introductorios en la universidad, en los cuales, los argumentos más o menos formales se acompañan de justificaciones visuales o intuitivas, ejemplos genéricos, y la inducción ingenua. Incluso los argumentos formales, con frecuencia son sólo formales en apariencia. Menciona también que raras veces se da a los estudiantes alguna indicación acerca de si en matemáticas se distinguen entre estas formas de argumentación o si son todas igualmente aceptables. Sobre las listas de

ejercicios de estos libros, cuando se pide 'demostrar que' Dreyfus pone sobre la mesa la pregunta ¿esto no invita al estudiante a concluir que un método de cálculo, realizado para ejemplos específicos, puede verse como una demostración?, o ¿qué una justificación visual o intuitiva y una gama de ejemplos genéricos pueda verse para el estudiante como una demostración? Sin duda parte de la formación típica de los estudiantes se da con el uso de los libros de texto. Así su comportamiento matemático se forma, con esta influencia y contribuye a las dificultades de los estudiantes para distinguir la explicación de la demostración.
Por su parte, Hoyles (1997) puntualiza que algunos planes de estudios nuevos, que fueron diseñados para remediar problemas pasados en educación matemática, pueden aumentar la creencia de los estudiantes en la válidez de la justificación empírica para establecer resultados generales. Un buen número de libros de texto recientes contribuyen a esta mala percepción.

Muchos profesores de matemáticas dan por hecho que los estudiantes tienen incorporado el lenguaje y las formas de razonamiento necesarias para enfrentar una demostración. Sin embargo muy pocos tienen una comprensión intuitiva de tales formas de razonamiento y manejo en el lenguaje lógico. A continuación mostramos algunas referencias de esto.

2.4.4.3.3 La importancia de la lógica y la instrucción en formas de conocimiento

Para demostrar una proposición, además de entenderla, también hay que saber establecer la verdad de ésta por un argumento directo; en otras palabras, se necesita o bien, intuición para la estructura de la demostración por contradicción, o bien, para aceptar el hecho de que una declaración condicional y su contrapositiva son lógicamente equivalentes. Esto implica además el conocimiento de las técnicas y lenguaje a emplear.

Dreyfus (1999, p. 94), al analizar producciones de estudiantes de preparatoria y universidad en temas de análisis matemático y álgebra lineal, identifica algunos motivos para el hecho de que muchos estudiantes tengan una concepción muy limitada de la demostración. Señala que la mayor parte de los estudiantes no han sido preparados en la práctica de la demostración, o aún más en la justificación de los procesos matemáticos que usan.

Trabajos de Thompson (1996) y Goetting (1995, pp. 142-148), indican que las declaraciones que requieren la prueba por contradicción o la prueba por la contraposición son las principales fuentes de dificultad, aún para los estudiantes que han realizado cursos avanzados de matemáticas. Fishbein & Kedem (1982) y Vinner (1983) sugieren que: incluso cuando los estudiantes parecen entender una prueba correcta para una proposición matemática, muchos no aprecian que, ésta evita la necesidad de la verificación. Al respecto Healy & Hoyles (2000) sostienen que los alumnos necesitan realizar sus ensayos de verificación, después de la demostración, porque la demostración no los convence.

Por otra parte, Wason (1966) con un experimento innovador aplicado a estudiantes, mostró que mientras todos, excepto por una pequeña fracción de estudiantes destacados, usan el *modus ponens* (de $p \rightarrow q$ y p podemos deducir q), aún en la mayor parte de contenidos abstractos, una porporción mucho más pequeña utiliza el *modus tollens* (de $p \rightarrow q$ y $\neg q$ deducimos $\neg p$), y números significativos de ellos cometen los errores de afirmación del consecuente y negación del antecedente. En nuestro trabajo, más adelante al observar las producciones de una estudiante

(Nancy) en el estudio exploratorio del siguiente capítulo, nos encontraremos también con este fenómeno.

En la misma dirección, Anderson & Owens (1990) resumen varias investigaciones relacionadas que muestran las clases de dificultades que enfrentan los estudiantes razonando con cuantificadores y Hazzan & Leron (1996) puntualizan acerca de los serios malentendidos a los que conduce el suprimirlos en la enseñanza de la matemática.

Epp (2003), basada en su experiencia docente y en la revisión de trabajos de investigación, además de las convenciones lingüísticas especiales usadas en matemáticas formales, expone diferentes ejemplos donde la interpretación del lenguaje cotidiano dista de la interpretación que tienen las proposiciones en el ámbito matemático y encuentra con esto una explicación de por qué los estudiantes cometen errores y presentan dificultades tales como: "el error de la recíproca" (de si p entonces q y q, deducen p), la dificultad para aceptar que p sólo si q es lógicamente equivalente a si p entonces q, la dificultad en la interpretación de proposiciones cuantificadas, los errores cuando tratan de negar afirmaciones del tipo si-entonces. Esto último es atribuible a que el lenguaje cotidiano contiene muchas y diferentes variedades de enunciados si- entonces además de las de las matemáticas, y se refieren a relaciones causales, relaciones temporales, situaciones falsas, etc. Las maneras informales de expresar las negaciones de enunciados que contienen "y" y "o" también pueden engañar a los estudiantes cuando se preparan para trabajar en un ambiente matemático formal. Epp, concluye que iniciar un curso hablando de las nociones básicas de lógica elemental, porporcionando a los estudiantes la práctica formal e informal del funcionamiento con el lenguaje de conectivos lógicos y cuantificadores, ayuda a fortalecer la zona de desarrollo próximo de los estudiantes antes de introducirlos en la demostración. Señala también que no todos los educadores de matemáticas están de acuerdo con esto. Su argumento es que la lógica es demasiado árida para capturar el interés de los estudiantes y que es más importante enganchar a los estudiantes con problemas matemáticos interesantes, que los conducirán a ver la necesidad de la demostración y la refutación. Una desventaja de este método, sin embargo, consiste en que algunos alumnos de la clase pueden carecer del aparato lógico suficiente para asumir los acuerdos que el instructor piensa que se deben seguir para resolver los problemas matemáticos.

Por otra parte, Dorier, Robert, Robinet & Rogalsky (2000), después de varios estudios de diagnóstico que realizaron entre 1987 y 1994 para determinar las dificultades de los estudiantes en el aprendizaje del álgebra lineal, encuentran que la ausencia de conocimientos previos en lógica y teoría elemental de conjuntos contribuye a la producción de errores en álgebra lineal. Entre otras conclusiones mencionan que el tipo de respuestas revelan un mal uso de las implicaciones matemáticas, caracterizado por la confusión entre hipótesis y conclusión.

Dreyfus (1999), centra su atención en porqué los estudiantes que inician la universidad no pueden demostrar. Entre las conclusiones dadas, una es que: la capacidad de demostrar depende de las formas de conocimiento a las cuales la mayor parte de estudiantes están raras veces expuestos. También señala que, el dar un argumento o una explicación es una empresa muy difícil para introducir a los estudiantes desde al menos dos puntos de vista: en la mayoría de los casos, todavía carecen de la claridad conceptual para activamente usar los conceptos relevantes en un argumento matemático y, más generalmente, han tenido pocas oportunidades de aprender las características de una explicación matemática. A continuación nos ocuparemos de esta parte.

2.4.4.3.4 Claridad conceptual y capacidad lingüística

La forma típica de instrucción en matemáticas, no ofrece espacios para la expresión verbal. Los estudiantes muestran importantes deficiencias al expresar verbalmente una idea y al plasmar por escrito una demostración. Esto último, se produce en virtud de que han sido instruidos para declarar su razonamiento de manera concisa, y plasman sólo una versión abreviada de la idea. Y aunque hay un movimiento mundial para habilitar y animar a los estudiantes de matemáticas en todos los niveles para dar explicaciones de sus respuestas, actualmente esta exigencia sólo es impuesta por una pequeña fracción de profesores. Muchos estudiantes llegan a un curso universitario en los que se acentúa el papel de la demostración sin haber tenido nunca que escribir una oración completa en un curso de matemáticas.

Por otra parte, en lo que a claridad conceptual se refiere, usualmente se parte del supuesto que en el nivel universitario se debe ser capaz de manejar los conceptos y definiciones implicadas y su estructura. A este respecto, Selden & Selden (1995) hablan de la dificultad que presentan los estudiantes para desenvolver los conceptos y definiciones, incluyendo su estructura lógica. Existe la necesidad de que las definiciones y conceptos sean *formalmente operables* para un individuo. Para Bills & Tall (1998), una definición (matemática) o teorema se dice que es *formalmente operable* para un individuo dado, si es capaz de usarlo para crear o reproducir (significativamente) un argumento formal.

En torno a las definiciones podemos revisar a Pinto & Tall (1999), donde se puede ver que los estudiantes exhiben dos modos distintos de manejo de definiciones formales, uno *dando significado* a través de consideración de ejemplos (frecuentemente visuales) y otro por *extracción de significado* a través de la manipulación y reflexión sobre la definición misma. Concluyen que los alumnos pueden tener éxito o no con cualquiera de las dos formas descritas. Alcock & Weber (2005) obtienen resultados similares de estas dos aproximaciones, pero referidas como *referencial* y *sintáctica* observando construcciones de demostraciones.

Para hacer las definiciones o proposiciones formalmente operables es importante *la definición del concepto y la imagen del concepto* en el sentido de Tall & Vinner (1981). Para ellos la *imagen del concepto* describe una estructura individual cognitiva asociada con un concepto; esto incluye todas las asociaciones de cuadros mentales, propiedades y procesos. La imagen del concepto se construye con los años a través de la experiencia y cambia conforme el individuo tiene nuevos estímulos. Por otra parte *la definición del concepto,* se refiere a la forma en que las palabras se utilizan para especificar un concepto. En diferentes investigaciones se ha encontrado que realzar la imagen del concepto se apoya dándole sentido a la definición formal del concepto y sostienen que una forma de instrucción que se ocupe de enriquecer la imagen del concepto de los estudiantes ayuda para que adquieran la habilidad para visualizar conceptos matemáticos. Dreyfus & Eisenberg (1986; 1990) muestran que las mayores dificultades en las experiencias con los estudiantes se refieren a la información visual en forma de gráficas. Más aún, cuando logran superar tal dificultad y están matemáticamente maduros y con la capacidad de pensar visualmente están poco dispuestos a visualizar conceptos matemáticos. También ellos, comparando procesos visuales con procesos analíticos sugieren varias razones por las que los estudiantes prefieren los procesos analíticos más tarde. Una de las razones que mencionan es que los maestros convienen con sus estudiantes –implícita o explícitamente- la creencia de que el razonamiento visual es inferior al razonamiento analítico. Por otra parte Zazkis, Dubinsky & Dautermann (1996) indican que «quizás lo más dañino, más que la dificultad común con la visualización, es que los estudiantes muestran una ausencia de habilidad para conectar un diagrama con su representación simbólica», un proceso que consideran "un compañero esencial para la visualización". Por su parte Dahlberg & Housman (1997) señalan que la tendencia de los estudiantes a evocar parte de la imagen de un concepto, en lugar de la definición del concepto, cuando responden a una variedad de tareas matemáticas no es necesariamente malo; establecen que en ocasiones es deseable tener a mano la riqueza de las imágenes de los conceptos para edificar sobre ellos.

Sfard (1989; 1992) ha enunciado dos principios pedagógicos: (1) Los conceptos nuevos no deben introducirse en términos estructurales. (2) Una aproximación estructural no debe adoptarse mientras el estudiante pueda enfrentar las situaciones problemáticas que involucren al concepto en juego sin ella. Más aún, observó que «las concepciones [iniciales] de los estudiantes parecen más cercanas a lo operacional que a lo estructural» y que muchos estudiantes, cuando inician el estudio de conceptos vía definiciones formales (estructural), pueden desarrollar concepciones pseudoestructurales (Sfard, 1992, pp.70-75). Al respecto, Alcock & Simpson (1999), señalan que mientras que estos principios son razonables aplicados a estudiantes de secundaria y preparatoria, para alumnos en cursos preuniversitarios más avanzados se introducen nuevos conceptos por la vía formal, definiciones estructurales, y se debe de algún modo aprender a lidiar con esto. Una de tales formas puede ser el convenir normas entre profesor y estudiantes.

2.4.4.3.5 Las normas sociomatemáticas convenidas, creencias y concepciones

La mayor parte de los estudiantes nunca aprendieron a identificar un argumento matemático. Aunque esto parezca trivial, y en la mayoría de los casos se dé por hecho, es algo que es muy importante considerar. Yackel & Cobb (1996, pp. 461) acuñan el término *normas sociomatematicas* para hablar de cómo influye el ambiente (profesores, compañeros, la actividad del aula, etc) para determinar las creencias de los estudiantes de matemáticas y la actividad en el marco de una clase o un curso; por ejemplo, lo que se entiende como una explicación matemática aceptable y la justificación son normas sociomatematicas. Ellos muestran cómo, en un aula, el profesor y los estudiantes interactiva y deliberadamente constituyen normas sociomatematicas que regulan la argumentación matemática.

Como antes mencionamos construir un aparato lógico y lingüistico suficiente es parte de los acuerdos o normas que el profesor y los estudiantes deben establecer para considerar los problemas matemáticos, así como, qué elementos serán aceptados dentro de una demostración, justificación o explicación (elementos visuales, analíticos, cálculos, ejemplos, relación entre respuesta y cálculo, analogías, reglas de inferencia, tablas de verdad, técnicas, aproximación intuitiva, estructuras, definiciones dadas y proposiciones demostradas, propiedades, manejo conceptual, etc). Sin embargo, los autores de libros de texto y los profesores pocas veces se muestran conscientes de la necesidad de establecer normas sociomatematicas, y sus acciones son a menudo más apropiadas para confundir que para ayudar a los estudiantes. Los estudiantes de preparatoria y de primer grado de la universidad por lo general no leen artículos de investigación de matemáticas, o no ven a investigadores matemáticos en acción. Se hace necesario entonces recrear la forma de trabajo de un matemático en el aula, ver cómo para construir resultados, conjeturan apoyándose en la intuición y los conocimientos previos y luego cómo establecer la verdad de sus resultados es una necesidad. Así como señala Kline (1973, p. 195), «las pruebas de cualquier naturaleza deberían invocarse sólo donde los estudiantes piensan que las requieren. La prueba es significativa cuando contesta lo que el estudiante duda, cuando demuestra qué no es

obvio.» Los estudiantes tienen pocos significados para distinguir entre las formas diferentes de razonamiento y apreciar las consecuencias para el conocimiento resultante y también carecen de elementos para distinguir entre la explicación, la justificación, el argumento y la prueba. A pesar de esto, muchos profesores y libros de texto, con frecuencia solicitan que los estudiantes expliquen su razonamiento, que muestren por qué una declaración es verdadera, justifiquen una proposición o aún demuestren un resultado. El establecimiento de normas sociomatemáticas convenidas y ser conscientes de las características de la labor de un matemático puede ayudar a aclarar en la mente del estudiante la distancia que hay entre una explicación, una justificación y una demostración, atribuyendo a cada una el valor que le corresponde. Harel, Selden & Selden (2006, p. 156) en esa dirección sugieren: «En verdad una aproximación estructural a los conceptos es esencial para la construcción de demostraciones y nos da paso a un nivel superior y a los cursos universitarios, y ahí aparece como inadecuado introducir la mayor parte de conceptos por otro camino que no sea estructural. Ya que los matemáticos rápidamente entienden nuevos conceptos estructuralmente definidos, sería interesante investigar cómo desarrollaron esta capacidad».
Lo anterior nos muestra la necesidad de mirar hacia la práctica de los matemáticos y realizar investigaciones que puedan revelar información potencial para la educación en matemáticas.

2.4.4.3.6 Concepciones que tienen los estudiantes de la demostración

Sobre las concepciones de los estudiantes acerca de qué es una demostración, podemos citar algunos trabajos. Por ejemplo, Fischbein (1982), presentó 400 estudiantes de secundaria con la demostración de una proposición sencilla y concluyó que menos del 15 % de los estudiantes realmente entendió lo que significa una prueba matemática.

Senk (1985), encontró que sólo el 30% de una muestra de estudiantes que realizaron un curso de geometría de un año, en el cual se acentúan las pruebas tradicionales de dos columnas alcanzó un nivel de dominio del 75%. Sus resultados fueron interpretados para indicar un fracaso de métodos tradicionales y una necesidad de enfocarse más en el desarrollo de la intuición y la comprensión de relaciones geométricas básicas mediante la exploración de ejemplos. Sin embargo, en lugar de desacentuar la prueba formal, deben tomarse medidas adecuadas para cultivar las capacidades de prueba de los estudiantes, así como su familiaridad con los objetos matemáticos involucrados.

Coe & Ruthven (1994) encontraron que cuando los contextos de prueba se basan en datos, y se espera que los estudiantes formulen conjeturas para la generalización o el contraejemplo, entonces las estrategias de prueba de los estudiantes son principalmente empíricas. Parece que tales estudiantes están dispuestos a sustituir el argumento deductivo por una comprobación suficientemente diversa de casos.

De la misma manera, tanto Harel & Sowder (1998) y Goetting (1995) se refieren a la práctica de los profesores de omitir las pruebas de teoremas y confiar en ejemplos como la justificación. Así, los profesores sin ser consciente pueden dar la impresión de que las pruebas empíricas bastan para establecer la verdad de proposiciones matemáticas.

Asimismo, Finlow-Bates, Lerman, & Morgan (1993), encontraron que muchos estudiantes de primer año tenían dificultades con las cadenas de razonamiento, y juzgaron los argumentos matemáticos según lo empírico o lo estético en lugar de con criterios lógicos.

Martin & Harel (1989) proporcionaron a futuros profesores de primaria, argumentos deductivos correctos, deductivos incorrectos, e inductivos para las mismas proposiciones. Cada argumento inductivo que presentaron fue aceptado como una prueba matemática válida por más de la mitad de sus estudiantes; las tasas de aceptación para los argumentos deductivos no eran mucho más altas que para los inductivos; y las pruebas falsas deductivas fueron aceptadas por cerca de la mitad de los estudiantes.

Moore (1994) encontró que aún pruebas triviales son grandes desafíos para estudiantes de matemáticas superiores.Por su parte Dreyfus (1999) considera injustificado decir que los estudiantes no pueden discutir matemáticamente. Así menciona diferentes ejemplos, que aún estando bastante lejos de constituir pruebas rigurosas, contienen las semillas claras de la argumentación matemática y la justificación.

Dreyfus (1999, p. 106), menciona que se ha hecho poco para evaluar los cambios de opinión de los estudiantes de matemáticas y su capacidad de explicar y justificar. En esta dirección podemos decir que en este trabajo nos ocupamos en parte de esto siguiendo la forma de justificar y demostrar un problema de una alumna de nuevo ingreso (en un estudio exploratorio reportado en el capítulo siguiente) en la universidad en diferentes momentos. Al igual durante la implementación de la ingeniería didáctica evaluaremos los progresos de los estudiantes en sus explicaciones y justificaciones.

2.4.4.3.7 Argumentación- Demostración como unidad cognitiva

Para Balacheff (1999) la argumentación como proceso puede ayudar en la construcción de la demostración y la argumentación es a la conjetura lo que la demostración es al teorema. Para Mariotti, Bartolini, Boero, Franca, & Rosella (1997), el *teorema matemático* se define como un conjunto compuesto por un enunciado, una demostración y una teoría matemática. Mientras que para Pedemonte (2005) *conjetura* es un conjunto de un enunciado, una argumentación y un conjunto de concepciones. Pedemonte (2002; 2005) sostiene que en investigaciones experimentales Boero, Garuti, & Mariotti (1996); Garuti, Boero, & Lemut (1998), Mariotti (2001), donde se organiza conjetura-argumentación-teorema-demostración como unidad cognitiva, esta organización permite comprender las dificultades para la construcción de una demostración y para localizar sus posibles causas.

Después de un recorrido por el estado del arte para visualizar un panorama general de las dificultades que enfrenta el estudiante en la transición al lenguaje formal, nos centraremos en el cierre de este capítulo en conclusiones necesarias para el diseño de una ingeniería didáctica.

2.4.5 Dimensión didáctica

Hace realmente poco tiempo que los interesados en el estudio de la didáctica de las matemáticas han incorporado a la DM como objeto de estudio. Antes era concebida únicamente como herramienta transparente, no cuestionada y que aparecía en el discurso científico sólo como útil para describir otros objetos (obtener la veracidad de un resultado). A esta noción Chevallard (1991) la llama noción paramatemática. Por ejemplo, en un curso de álgebra, cálculo, geometría, etc., se usa una noción paramatemática de la DM, ya que, en dichos cursos no se cuestiona a los estudiantes sobre la naturaleza o significado de la demostración, o simplemente sobre ¿qué es una demostración?, sólo es usada como herramienta, como medio transparente e incuestionable. Sin embargo, en un curso de lógica matemática formal sí que puede tomar un papel relevante y verse por sí misma como un objeto de estudio, o bien como una noción matemática.

Partiendo entonces de la noción paramatemática que se ha dado a la demostración, comenzaremos con la forma en que actualmente en la mayoría de los centros de enseñanza universitaria inician los estudiantes su contacto con la demostración, posteriormente complementaremos con algunas apreciaciones de especialistas sobre cómo se puede enseñar y finalmente, nos aproximaremos a las funciones que tiene la demostración, tanto en el aula como en el campo de práctica. Esto nos ayudará a trazar directrices para un diseño de una experiencia didáctica de enseñanza de la demostración en un contexto específico antes definido.

2.4.5.1 ¿Cómo se enseña actualmente la DM?

Un retrato de la forma en que los estudiantes aprenden a demostrar nos lo proporciona la experiencia personal de Thurston (1994). Consideramos que poco más o menos así lo hemos enfrentado la mayoría de los que hemos realizado cursos universitarios de matemáticas.

> «Cuando comencé como un estudiante de licenciatura en Berkeley, tuve problemas imaginando como podría "demostrar" un teorema nuevo e interesante. Realmente no entendía qué era una demostración.
> Asistiendo a seminarios, leyendo artículos, y dirigiéndome a otros estudiantes de licenciatura, gradualmente empecé a entenderlo. Dentro de cada campo, hay ciertos teoremas y ciertas técnicas que son generalmente conocidas y aceptadas. Cuando se escribe un artículo, se hace referencia a estos sin la prueba. Miras otros artículos en el campo, y ves que en ellos se cita sin la demostración, y se incluye lo que se cita en su bibliografía. Así se aprende de otra gente alguna idea de las demostraciones. Entonces se tiene la libertad de citar el mismo teorema y citar la misma bibliografía. No necesariamente se tiene que leer los artículos completos o los libros que están en la bibliografía. Muchas de las cosas que son generalmente conocidas, son cosas para las cuales puede no haber ninguna fuente conocida escrita. Como la gente en el campo conoce las ideas trabajadas, no es necesario tener una fuente escrita.
> Al principio no confiaba de este proceso. Dudaba que una cierta idea realmente estuviera establecida. Pero encontré que podría preguntar a alguien, y ellos producían explicaciones y demostraciones, o en todo caso me indicarían otra referencia. Había teoremas publicados que eran generalmente conocidos para ser falsos, o donde las pruebas eran generalmente conocidas para ser incompletas. » (p. 168)

2.4.5.2 ¿Cómo introducir la actividad demostrativa en la formación inicial universitaria?

Solow (2004) y De Guzmán (2004) creen que es posible enseñar a los estudiantes a entender la naturaleza de la demostración sistematizando su enseñanza.
El primero discute su caso con lujo de detalles y ejemplos en su libro, y no cabe duda que sus ideas merecen atención, discusión y, sobre todo experimentación. Una de sus principales aspiraciones es enseñar al estudiante a leer las demostraciones presentadas en los libros de texto, a leer entre líneas. Puesto que las pruebas puede que no estén presentadas de forma sistemática pone mucho

énfasis en esta parte -particularmente en los dos apéndices- para mostrarle al lector cómo reconocer los ingredientes estándar de un argumento matemático en una presentación informal de una demostración.

Aquí existe una analogía válida con el rol que juegan los algoritmos tradicionales en aritmética elemental. Es importante adquirir familiaridad con ellos para entender por qué trabajarlos y para qué problemas podrían, en principio aplicarse. El autor trata esto mismo con las demostraciones, y así partiendo de la idea de que: comprendiendo y analizando su estructura, el estudiante desarrolla la capacidad de leer y entender la versión más informal de las pruebas que se encuentra en los libros de texto, finalmente sería capaz de crear sus propias demostraciones.

Por su parte Miguel de Guzmán considera necesario un curso preliminar donde el objeto de estudio sea la demostración matemática. En su libro explica diferentes técnicas para probar la validez de una afirmación y muestra diferentes ejemplos a los que puede acceder el estudiante para comprender la naturaleza de la demostración y el rol que juega al "hacer" matemáticas.

Solow (2004) y de Guzmán (2004) coinciden en que usualmente se conjetura que gran parte de los estudiantes no pueden entender matemáticas abstractas, pero las experiencias de ellos al trabajar de manera preliminar dotando a los alumnos del método para descubrir y comunicar ideas en matemáticas, indica otra cosa. Una propiedad característica del lenguaje de las matemáticas es su precisión. Presentada adecuadamente, una demostración no debe contener ambigüedades: no debe existir duda, todo debe ser correcto. Desafortunadamente, muchas demostraciones que aparecen en los libros de texto y los artículos de revistas especializadas no son presentadas de manera apropiada; mejor dicho, las demostraciones son presentadas apropiadamente para algunos, para quienes conocen el lenguaje de la matemática. Así, para entender y/o presentar una demostración, se tiene que aprender un nuevo lenguaje, un nuevo método de pensamiento. Los dos autores explican mucho de la "gramática" básica que se necesita y de la misma manera que, como en el aprendizaje de un nuevo lenguaje, se necesita práctica para alcanzar la fluidez, ellos proponen ejemplos y ejercicios diversos.

Solow, pretende que los estudiantes, adquieran nuevas habilidades y lenguaje para descubrir y comunicar nuevas demostraciones matemáticas sin conocerlas previamente. Aunque el objetivo es admirable, esto no le quita dificultad para alcanzarlo. Su primer paso en esta dirección es empezar a leer demostraciones y a desarrollar demostraciones propias de hechos ya conocidos. Éste ya es un avance que contribuye a la riqueza del entendimiento matemático.

Según ambos autores, sus propuestas no afirman que los matemáticos crean sus propias demostraciones aplicando de manera consciente y deliberada los métodos ofrecidos en sus textos, sin embargo sugieren que tenemos una mejor oportunidad de enseñar una apreciación de las demostraciones sistematizando su enseñanza, ya que nuestro presente es demasiado desorganizado, los procedimientos están basados en que los estudiantes puedan aprender este difícil arte por ósmosis.

Franklin & Daoud (1988), afirman que los profesores de matemáticas universitarias hablan de la ausencia en los estudiantes de conocimientos previos en diferentes tópicos, como la demostración, que usualmente encabeza la lista de problemas. Se preguntan por qué sus estudiantes, al leer en un examen "demuestre…" , entienden "pase a la siguiente pregunta". Hablan de la necesidad de la demostración en las carreras vinculadas con la matemática y la computación y de la urgencia de aprender a comprender y construir pruebas por parte de los potenciales estudiantes de dichas carreras, así como de la ausencia de la enseñanza de la demostración en los libros de texto utilizados durante las carreras universitarias. La propuesta que presentan tiene las siguientes características:

1. Las técnicas de demostración se introducen dentro del contexto de matemáticas, tal como la aritmética, ya familiar para el estudiante.

2. Las técnicas se aplican a situaciones problema relacionadas con los tópicos usuales del primer año de matemáticas universitarias (cálculo, álgebra y álgebra lineal, etc).
3. En todo momento el contexto y la motivación se tienen en mente.
4. Se enfatizan los contenidos de estrategia y táctica en la construcción de las demostraciones.
5. Se insiste en las demostraciones presentadas con argumentos convincentes.
6. Los cuantificadores juegan un papel central.

Van Asch (1993) plantea que la enseñanza de la demostración puede servir a objetivos generales:

De aprendizaje: 1) aprende cómo formular, cómo encontrar, y cómo analizar argumentos. 2) aprende a detectar y criticar formulaciones incorrectas y 3) a distinguir entre una demostración rigurosa y otros procedimientos verificativos, como ejemplos, experimentos, etcétera.

En cuanto al desarrollo de habilidades y comprensión: 1) desarrolla la habilidad de expresarse correctamente. 2) comprende por qué es, a menudo, necesario definir conceptos. 3) comienza a entender el papel que juegan las hipótesis, las deducciones, o los contraejemplos 4) desarrolla la capacidad de generalización, particularización y analogía.

Por otra parte Alibert & Thomas (1991) describen algunas características de las pruebas que prefieren los estudiantes y el grado de su comprensión. A continuación, contraponen el estilo *lineal* de las demostraciones, característico de las exposiciones formales tradicionales, con el estilo *estructural*[13]. En este último se ordena la demostración en varios niveles, de forma que cada uno de ellos consiste en un módulo autónomo que contiene una idea principal de la demostración. Los autores consideran que así se pueden mejorar las vías de comunicación y comprensión que proporciona el estilo clásico lineal de exposición de las demostraciones. Por último, y como alternativa a la presentación tradicional de las demostraciones, proponen los *debates científicos* con la finalidad de capacitar a los estudiantes para considerar las demostraciones como una parte necesaria del proceso científico del progreso del conocimiento, en lugar de un ejercicio formal realizado por el profesor. Su diseño consta de tres etapas: 1) El profesor organiza e inicia la producción de proposiciones científicas por parte de los alumnos, 2) estas proposiciones se someten a discusión, propiciando la utilización de argumentos, pruebas, contraejemplos, etcétera, y 3) las proposiciones demostradas se convierten en teoremas, mientras que aquellas para las que se ha encontrado un contraejemplo, se consideran proposiciones falsas.

Con este tipo de debates, las demostraciones se generan por medio de la interacción de los estudiantes y, cuando sea necesario, del profesor. En consecuencia, los autores distinguen entre las *demostraciones para convencer* a alguien (a otro estudiante) de algo que todavía no forma parte de su conocimiento institucionalizado, y las *demostraciones para mostrar*, cuya finalidad es mostrar a alguien (el profesor) que se ha alcanzado un determinado conocimiento.

De Guzmán (2004), Solow (2004), Franklin y Daoud (1988) al parecer atribuyen la dificultad de los estudiantes para acceder al aprendizaje de matemáticas abstractas a la carencia de un método propio para explicar matemáticas teóricas y plantean métodos para remediar tal situación. Es pertinente por lo tanto ajustar estos métodos y experimentarlos sometidos a un "control". Para tal ajuste de acuerdo al contexto se hace necesario conocer las dificultades de los estudiantes, en consecuencia en esta tesis se realiza un estudio exploratorio del medio (descrito en el capítulo 3) y

[13] Este estilo es también el propuesto por De Guzmán (2004), Solow (2004), Franklin y Daoud (1988).

se describe en el siguiente apartado un estado del arte en relación con las dificultades que enfrentan los estudiantes en torno a la demostración.

2.5 Conclusiones

El recorrido por las ideas de los diferentes autores abordadas en este capítulo nos permite visualizar que para el abordaje de la DM se necesita: 1) la comprensión de un enunciado, desde diferentes aspectos: matemático, lógico y semántico 2) contar con la infraestructura básica que nos permita la concepción de las primeras ideas y las ideas claves en la demostración, 3) invocar el conocimiento previo para crear los enlaces en la generación de conocimiento nuevo, 4) dominio de las técnicas de demostración y 5) plasmar de manera organizada las ideas enlazadas para concluir la demostración.

De la misma manera para leer o seguir las demostraciones que se realizan en clase, resulta imprescindible: 1) comprender el enunciado, 2) entender los pasos de la demostración, 3) la comprensión global de la DM como procepto, 4) comprender el razonamiento empleado y 5) ser consciente de la necesidad de un razonamiento universalmente válido, 6) comprender los recursos utilizados: estilos, maneras, técnicas y por último 7) comprender los fines.

De lo anterior se desprende la necesidad de enseñar a leer y producir demostraciones no lineales, facilitando con ello la comprensión y comunicación del conocimiento en matemáticas.

Capítulo 3. Estudio exploratorio y diseño de la Ingeniería Didáctica

Si cierras la puerta a todos los errores dejarás afuera también a la verdad.
Rabindranath Tagoré

En este capítulo inicialmente revisaremos algunas investigaciones previas que nos van a dar la clave sobre las dificultades a las que se enfrentan los alumnos cuando tienen que realizar una demostración. Posteriormente, en una segunda parte, se presenta un estudio exploratorio con estudiantes de licenciatura, para sacar a la luz algunas de esas dificultades y otras más, tratando de realizar una descripción detallada de algunos de los elementos que utilizan en su razonamiento. Resultados que aparecen en este capítulo, derivados del estudio exploratorio se ha reportado ya en Alvarado & González (2009; 2010).
También al final, en este capítulo, se presentan dos apartados relacionados con el diseño de la Ingeniería Didáctica. El primero concentra los fundamentos teóricos y las características principales del diseño de Ingenierías Didácticas. El segundo apartado expone las líneas generales que se han seguido para el diseño de nuestra Ingeniería Didáctica, describiendo el contexto, características y restricciones de la implementación. Se finaliza con un análisis a priori de las sesiones diseñadas agrupadas en cuatro bloques de acuerdo con su propósito.

3.1 Estudio Exploratorio. Descripción

En el apartado 2.4.4.3 p. 54, hemos visto una breve revisión de la literatura que nos da cuenta de las dificultades que enfrentan los estudiantes en el abordaje a la demostración en matemáticas, la noción que tienen acerca del significado de demostrar, la fuerza de la verificación y el uso de casos o ejemplos particulares y una ausencia de conocimientos del aparato lógico y lingüístico, así como del conocimiento estratégico y sutilezas necesarias para la comprensión de la demostración.
Ahora nos ocuparemos de presentar un estudio exploratorio realizado con estudiantes en tres grupos de la licenciatura en Matemáticas Aplicadas (LMA) de la Universidad Juárez del Estado de Durango. En él se plantea realizar un análisis de las creencias, concepciones y obstáculos de los estudiantes y su interacción con la DM. Se lleva a cabo explorando sus producciones dentro de sus exámenes finales, cuadernos de clase y eventualmente otros instrumentos que nos permiten describir su actuación en torno a la DM.

3.2.1 Participantes e instrumentos

Para este estudio partimos del supuesto de que tenemos estudiantes que desean dedicarse al estudio de la matemática, que les suena, o mejor dicho les resulta sumamente familiar la palabra demostración en cualquiera de sus modalidades "*demuestre que…* ", "*q.e.d.", "…así hemos demostrado…", "pruebe que…",* etc. Suponemos también que están familiarizados con el razonamiento lógico y que puede conectar y aplicar hechos importantes, definiciones y teoremas de un dominio matemático dado. Los alumnos involucrados en este estudio fueron los siguientes:

Semestre y edad promedio	*Materia*	*Número de alumnos*
A) Primero /19 años	Lógica simbólica	14
B) Tercero/20 años	Álgebra Lineal	4
C) Quinto/21 años	Álgebra Moderna	6

En este contexto nos interesa explorar en lo siguiente:
¿Un estudiante de este medio construye a partir del conocimiento previo demostraciones en la materia concreta?, si no, ¿porqué no?
¿Qué esquemas de demostración presentan los alumnos?
¿El alumno es consciente de la "necesidad" de aprender los conocimientos en juego?¿los considera útiles?
Antes de continuar, consideramos pertinente definir los términos *creencias* y *concepciones,* antes mencionados y en el sentido de Ponte (1994) y Thompson (1992).
El término *creencias* en este trabajo se entenderá y se aplica al contexto de los estudiantes, pues en los trabajos referidos lo utilizan en la práctica del profesor. Para Ponte y Thompson son ideas poco elaboradas, generales o específicas, las cuales forman parte del conocimiento que posee el estudiante - pero carecen de rigor para mantenerlas- e influyen de manera directa en su desempeño. Entre las principales características podemos decir que: 1) están asociadas a ideas personales, 2) influyen en el proceso de aprendizaje, 3) tienen un valor afectivo, 4) Son un tipo de conocimiento, 4) se justifican sin rigor alguno y 5) Están fundamentadas más en lo empírico o intuitivo.
Por otro lado *concepciones* se evocará adaptado también al contexto del estudiante. Las *concepciones* consisten en la estructura que cada alumno da a sus conocimientos. Este concepto se caracteriza por: 1) ser producto del razonamiento y entendimiento de un determinado concepto, 2) formar parte del conocimiento, 3) ser producto del entendimiento, 4) actuar como filtro en la toma de decisiones y 5) influir en los procesos de razonamiento.

Enseguida describimos los grupos participantes en el estudio exploratorio y las tareas asignadas.

Grupo A

- *Características*

Consta de 14 estudiantes de la materia de Lógica Matemática impartida en el primer semestre. En lo sucesivo se etiquetará a los estudiantes como E1, E2,…,E14

- *Instrumentos*[14] *y tareas*

Instrumento 1A

Examen semestral escrito de 13 reactivos, diseñado por la profesora a cargo con sugerencia de los reactivos 5, 6, 7, 12 y 13 por nuestra parte. Todos contestaron al mismo tiempo con 2 horas y 30 minutos aproximadamente. Los 14 alumnos participaron.

Instrumento 2A

Consta de 3 reactivos, dos (1 y 2) corresponden a los reactivos 5 y 6 del instrumento 1A, pero modificando la tarea. En el reactivo 3 se les pide demostrar un enunciado de la forma $p \rightarrow q$ que corresponde al área de geometría y se necesitan conocimientos básicos. Participaron 4 alumnos respondiendo en el mismo momento y sin presiones de tiempo (2-3 hrs. aproximadamente).

Instrumento 3A

[14] Los instrumentos utilizados aparecen en el Anexo de Instrumentos.

Consta de 9 preguntas relacionadas con la forma en que entienden la DM, su interacción con ella y la forma en que entienden el trabajo de un matemático. Se aplicó sólo a los 4 estudiantes seleccionados anteriormente. La duración fue aproximadamente 45 minutos.

- *Aproximación*

El primer contacto con el grupo fue al final del semestre en diciembre de 2006. La manera en que nos aproximamos a sus producciones en los exámenes fue introduciendo una serie de reactivos (5, 6 y 7) acordes con los contenidos vistos en clase y otros (12 y 13) para explorar la forma de relacionarse con la materia y la DM. Las 5 cuestiones se anexaron a su evaluación final sin alterar el funcionamiento de la clase pues asumimos que introducir de esta manera los reactivos ayudaría a que los estudiantes no lo sintieran ajeno a la materia.
De los 14 participantes se seleccionaron 7 por la naturaleza de las respuestas y se solicitó a la profesora a cargo que nos apoyara para que participaran con el instrumento 2, de esa manera se contó con 4 alumnos (**E2**, **E4, E7** y **E8**) para un seguimiento más detallado.
El instrumento 2A se aplicó 2 meses después.
Al día siguiente que se aplicó el segundo instrumento se mantuvo un diálogo por separado con cada uno de los estudiantes donde se les pedía que explicaran el por qué de sus respuestas. A lo largo del diálogo, en su intento por explicar lo que había hecho, el estudiante se enfrentaba progresivamente con las incoherencias de sus decisiones. Esta forma de introspección en el estudiante nos permitió entender cómo lo estaban procesando, además de que los errores fueron muy reveladores. En este momento se les proporcionó una hoja para que plasmaran la solución tal como ahora la estaban pensando. Esta parte no les ocupó más de media hora. Posteriormente se respondieron el instrumento 3 donde se exploran sus creencias y forma de relacionarse con la DM.

Grupo B

Es un grupo de 4 alumnos que cursan la materia de Álgebra Lineal II correspondiente al cuarto semestre de la LMA. Para referirnos a los estudiantes de este grupo los nombraremos como **E15**, **E16**, **E17** y **E18**.

- *Instrumentos*

Instrumento 1B

Se compone de 6 reactivos propuestos todos por el profesor, sólo uno incluye tareas de demostración y corresponde al examen semestral de la materia. Duración aproximada 3 horas.

- *Aproximación*

El examen se aplicó en diciembre de 2006 al final del semestre. Aquí la aproximación difiere de la del grupo A en el sentido de que sólo contamos con los exámenes resueltos por los estudiantes y con cuadernos de clase. Cuando se habló con ellos para ver de manera voluntaria quien participaba en la investigación sus comentarios fueron *"demostración no", "me cuesta mucho trabajo", "nunca sé por dónde empezar"*, *"lo entiendo cuando lo hace el profesor"* etc.

Grupo C

Son 6 alumnos de la materia de Álgebra Moderna inscrita en el quinto semestre de la LMA. Las etiquetas para referirnos a los estudiantes de este grupo serán **E19**,…,**E24**.

- *Instrumentos*

Instrumento 1C

Consta de 7 reactivos, los primeros 5 propuestos por el profesor a cargo y acordes con los contenidos del curso y 2 relacionados con sus creencias acerca de la materia. Duración aproximada de 3 y media.

- *Aproximación*

El examen se aplicó en diciembre de 2006 al final del semestre. Aquí al igual que con el grupo B sólo contamos con los exámenes resueltos por los estudiantes y con los cuadernos de clase. Dos de los estudiantes se mostraron interesados en participar en otras fases, sin embargo son alumnos que han entablado relación cercana con profesores, participan en seminarios, talleres, actividades complementarias y apoyan al entrenamiento de participantes en olimpiadas de matemáticas. Así que, considerando que en algún sentido, son casos especiales pues han tenido oportunidad de formarse en cuanto a la DM, lo que no es común a todos los estudiantes. No se aplicó ningún otro instrumento. No obstante, consideramos importante explorar las estrategias que usan al enfrentarse con la demostración. Los otros 4 estudiantes reaccionaron igual que los del Grupo B.

Consideramos que en los tres grupos la aproximación nos permite explorar la forma de resolución de los estudiantes sin el riesgo de parecer que responden a instrumentos ajenos a sus materias.

A continuación presentamos los concentrados de respuestas de los instrumentos utilizados, análisis de las mismas, así como una descripción y justificación de los reactivos incluidos en el grupo A[15].

3.2.2 Respuestas del grupo A al estudio exploratorio

En este apartado se presentan las respuestas del grupo A a los diferentes instrumentos descritos en el apartado anterior y en base a ellos se clasifican en momentos numerados.

3.2.2.1 Grupo A Primer momento

En el primer momento del estudio exploratorio participaron 14 alumnos del grupo A antes descrito. Su examen final ordinario (instrumento 1 A) constituye nuestro primer instrumento de recogida de datos y los reactivos incluidos en él estaban relacionados con implicaciones lógicas ($p \rightarrow q$, si p entonces q, q ocurre si p) por ser una de las estructuras básicas más simples para establecer una verdad matemática.
Entre las tareas correspondientes a cada reactivo se les pedía que seleccionaran la deducción válida (por definición es una en la cual la conclusión es cierta si la premisa lo es) justificaran, argumentaran, explicaran, demostraran según el caso (variaba el género de la tarea) su elección.
Los reactivos propuestos son similares a los propuestos por Wason (1966) para sus investigaciones sobre el razonamiento. El reactivo 6 conocido como tarea de selección de Wason, es uno de los problemas más importantes inventados por él y ha originado múltiples estudios en Psicología Cognitiva (Evans, Newstead, & Byrne, 1993, C.4; Wason & Jonhson-Laird, 1972; Evans, 1982, C. 9; Wason, 1969; Wason & Golding, 1974; Evans & Newstead, 1995). El reactivo 5 fue utilizado por Hoyles & Küchemann (2002) en un estudio longitudinal en Inglaterra con estudiantes de educación secundaria (edad 13 años) con la intención de analizar la comprensión de los estudiantes en las implicaciones lógicas.

Tabla 3. Preguntas del instrumento 1 A		
5. Óscar y Sofía piensan en el par de números 3 y 11. Ambos notan que la SUMA (3+11) es PAR y el PRODUCTO es IMPAR. Óscar dice: Si la SUMA de dos números dados es	6.- Hay cuatro tarjetas. Cada tarjeta tiene una letra impresa en un lado y un número impreso en el otro. Dos de las tarjetas	7.- Estudia las afirmaciones y la conclusión que de ellas se sigue. Marca en cada caso la respuesta que mejor represente lo que crees y explica lo que piensas.

[15] De momento no se presentaran las respuestas y el análisis realizado para los grupos B y C.

PAR, su PRODUCTO es IMPAR. Sofía dice: Si el PRODUCTO de dos números es IMPAR, su SUMA es PAR. a) ¿Las afirmaciones de Óscar y Sofía dicen lo mismo? NO b) El PRODUCTO de dos números es 1271. Suponga que Sofía está en lo correcto ¿Cuál de las siguientes opciones es correcta? Marque una de ellas. □ Puedes asegurar que la SUMA de los dos números es PAR. □ Puedes asegurar que la SUMA de los dos números es IMPAR. □ Estás seguro de que la SUMA es IMPAR o PAR hasta que conoces los números dados. c) ¿Es la afirmación de Óscar cierta? Justifique su respuesta. NO d) ¿Es la afirmación de Sofía correcta? Justifique su respuesta. SI Sean A1: p→q la afirmación de Óscar y A2: q→p la afirmación de Sofía, la siguiente tabla muestra las respuestas clasificadas de la cuestión a).	muestran letras (una consonante y una vocal), y las otras dos muestran números (uno par y otro impar), así: A H 4 7 Se enuncia la siguiente regla: "Si una tarjeta tiene una vocal en un lado, entonces tiene un número impar en el lado opuesto". ¿A qué tarjetas hay que darles la vuelta obligatoriamente para saber si la regla es verdadera o falsa? Justifique su respuesta.	a) ✓ Si Hiram sufre de neumonía, el tiene fiebre alta. ✓ Hiram no tiene fiebre alta. Conclusión: Hiram definitivamente no sufre de neumonía. □ La conclusión es correcta □ La conclusión es incorrecta □ No tengo elementos para decidir. b) Si $x^2 \neq y^2$ entonces $x \neq y$ (donde $x, y \in \mathbb{N}$) Prueba: Si $x=y$ entonces $x^2=y^2$. Así la afirmación es cierta. □ La prueba es falsa. □ La prueba muestra que la afirmación es siempre verdadera. □ La prueba muestra que en algunos casos la afirmación es verdadera. □ No tengo ninguna opinión. Justifique su respuesta.

Sean A1: p→q la afirmación de Óscar y A2: q→p la afirmación de Sofía, la figura --- muestra las respuestas clasificadas de la cuestión a). De la misma manera se realizaron diagramas para las otras tareas, con la finalidad de establecer categorías de análisis. Tales diagramas los omitiremos y sólo presentamos un cuadro con las categorías que nos permiten un análisis de las respuestas ofrecidas por los estudiantes del grupo A.

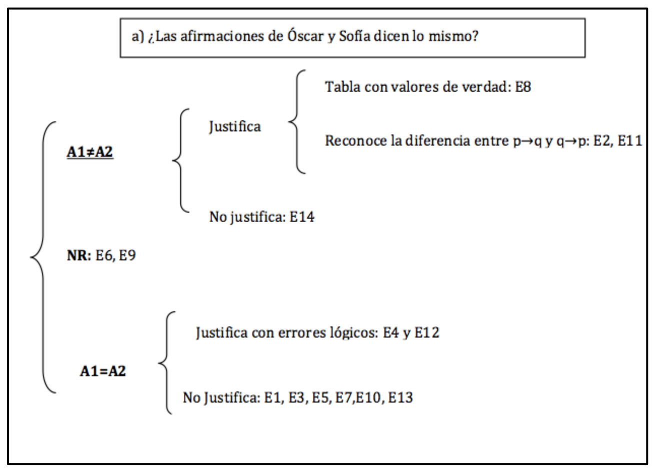


Tabla 4. Categorías de análisis de respuestas

CATEGORÍAS PARA "No hay respuesta o es incorrecta"	CATEGORÍAS PARA *"La respuesta es correcta"*
Ia) No presenta texto alguno y/o sólo subraya la respuesta **Ib)** Presenta un escrito donde identifica conceptos y/o resultados previos implicados en la tarea pero los invoca de manera que no le ayudan en la demostración. <u>Ejemplo:</u> E10-5c). *Si, pues si la suma es par entonces el producto es impar.* Y para 5d) *Si, pues tiene que demostrar que sea cierta su afirmación.* **Ic)** La justificación esta sustentada en una falacia y/o esta influenciadas por datos específicos. 1) La implicación es equivalente con su recíproco, es decir no encuentra diferencia entre *p→q* y *q→p***.** La implicación no es equivalente con la contrapositiva es decir no diferencia *p→q* de *¬q→¬p.* En cualquiera de los dos casos invocando ejemplos. (EP/EG)[16]. <u>Ejemplo:</u> E8-5c) *Si multiplico 7x3=21 y 5x5=25; y*	**Ca)** Sólo identifica la respuesta pero no ofrece argumentación. **Cb)** En su argumentación se reconoce la referencia a conceptos y/o resultados previos implicados pero no los utiliza bien en la demostración y se tiene una interpretación semiótica y/o semántica errónea del enunciado. <u>Ejemplo:</u> E1 para la cuestión 7b) dice que la conclusión es correcta y ofrece esta justificación *(P∧Q)→r; ¬r por tanto (P∧¬Q); aplicando Modus Tollens ¬P∧Q y aplicamos negación ¬¬P∧¬Q; así P∧¬Q.* (En la traducción realizada entiende que tiene tres enunciados) **Cc)** La implicación y su recíproco son distintos **(I≠R).** Implicación equivalente con la contrapositiva **(I≈C)** en base a caso particular. (EP/EG). **Cd)** La implicación y su recíproco son distintos **(I≠R).**

[16](EP) Ejemplo Particular - (EG) Ejemplo Genérico.

sumo y resulta 10 y 10. 2) La misma situación que en 1) pero sin datos específicos. <u>Ejemplo:</u> E7 contesta para 6 que A es la tarjeta y justifica, *p(x):=x tiene vocal; q(x):=x tiene número impar en el lado opuesto, entonces el único caso en que se verifica o es falso es si p(A)→q(x) aplicando valores de verdad (1,1)→1.* E4 en 5 a) responde *Si, pues es lo mismo pero se invierte el sentido.* Otro ejemplo de esta categoria es la falacia: la implicación es igual que la implicación negando antecedente y consecuente, es decir *p→q* y *¬p→¬q*. cuando E3-7b) *Si, porque siempre* $x^2= y^2$ *entonces x=y; luego siempre* $x^2 \neq y^2$ *entonces x≠y.* (Nótese que justifica de manera errónea) **Id**) Se desvela una interpretación lingüística, semiótica o semántica errónea del enunciado de la tarea. <u>Ejemplo:</u> E7 que en 5c) argumenta que *Si porque la suma de 3 y 11 es 14 y es par y su producto es 1271, pero no es un número par.* También E8-6 responde *A→Impar;Vocal→7 para el primer caso los valores de verdad son (1,1)y (1,0) para el segundo son (0,1),(1,1) así que sólo el segundo caso es siempre cierto.*	Implicación equivalente con la contrapositiva **(I≈C)** en base a explicación incompleta pero relacionada con la tarea y tiene alguna debilidad. <u>Ejemplo:</u> En este caso la debilidad de E14 es que algún enunciado presentado en 7a y 7b no se justifica o bien se justifica de manera inapropiada. *La conclusión es correcta ya que dice que si le está pasando algo a alguien, sufre una cosa, pero si no sufre esa cosa no le esta pasando nada.* En 7 b) suponemos que se da cuenta del dominio (los números naturales) en virtud de que lo subraya y dice *al ser el mismo número y en cada caso multiplicando por el mismo o elevándolo al cuadrado siempre será lo mismo.* **Ce)** Presenta casi una demostración salvo imprecisión en el lenguaje. <u>Ejemplo:</u> E8 en 5 a, usa un lenguaje inapropiado al traducir las proposiciones *"Óscar S→P y Sofia P→S"* con S se refiere a " la SUMA de dos números dados es PAR" y con *P* a "el PRODUCTO es IMPAR" sin embargo no lo hace explicito, juega con valores de verdad pero sin comentarios adicionales y concluye de manera correctaSofía dice: Si el PRODUCTO de dos números es IMPAR, su SUMA es PAR. **Cf)** Su demostración es consistente y completa. <u>Ejemplo:</u> La demostración de E2 en 5c) *p(x,y):=x+y es par; q(x,y):=x*y es impar. Para todo x,y [p(x,y)→q(x,y)] la implicación es falsa pues dando un contraejemplo p(2,4)→q(2,4); p(2,4) verdadero y q(2,4) falso por tanto la implicación es falsa.*

Tabla 5. ASIGNACIÓN DE CATEGORÍAS[17]

PROBLEMA							
CLAVE	**P5a**	**P5b**	**P5c**	**P5d**	**P6**	**P7a**	**P7b**
E1	**Ia**	**Ia**	**Ia**	**Ia**	**Ia**	**Cb (Cd)**	**Ia**
E2	**Ce**	**Ce**	**Cf**	**Ce**	**Id**	**Cf**	**Cf**
E3	**Ia**	**Ic1 (EP)**	**Ic1 (EP)**	**Ia**	**Ic2**	**Cf**	**Ic2**
E4	**Ic2**	**Ia**	**Ic1 (EP)**	**Cc (EP)**	**Ic2**	**Ce**	**Cd**
E5	**Ia**	**Ca**	**Ia**	**Ca**	**Ia**	**Ca**	**Ic2**
E6	**Ia**	**Ia**	**Ia**	**Ia**	**Ia**	**Ia**	**Ia**
E7	**Ia**	**Ca**	**Id**	**Cc (EP)**	**Ic2**	**Ca**	**Ia**
E8	**Ce**	**Ic1(EP's)**	**Ic1(EP's)**	**Ic1(EP's)**	**Id**	**Ce**	**Ce**
E9	**Ia**	**Ia**	**Ia**	**Ia**	**Ia**	**Ia**	**Ia**
E10	**Ia**	**Ia**	**Ib**	**Ib**	**Ia**	**Ce**	**Ic2**
E11	**Cd**	**Ia**	**Ia**	**Ia**	**Ia**	**Ca**	**Ia**
E12	**Id**	**Ia**	**Ic1(EP)Id**	**Cc(EP)Id**	**Ca**	**Cf**	**Ia**
E13	**Ia**	**Ia**	**Ca**	**Ia**	**Ia**	**Ia**	**Ia**
E14	**Ca**	**Ia**	**Cb**	**Cc (EG)**	**Ic2**	**Cd**	**Cd**

Concentrado de respuestas de las preguntas 12 y 13 instrumento 1 A

[17] Los alumnos E2, E4, E7 y E8 aparecen sombreados porque son seleccionados para los siguientes momentos.

12.- Qué le dirías a un estudiante que va a ingresar al semestre que cursas para describir en que consiste el estudio de la lógica?

Consiste en probar la validez de ciertos argumentos, mediante varios métodos y hay que tratar de simbolizar estos argumentos en un lenguaje matemático para facilitar su manejo (**E8**, **E7**,**E14**); Uso adecuado del lenguaje (**E4**,**E6**); Entrenar el razonamiento y la comprensión (**E2**,**E3**,**E10**, **E11**, **E12**); Reflexionar (**E1**); Consiste en probar si es verdadero o falso (**E5**)**;** Ayuda a resolver problemas en otras materias (**E9**, **E14**); Es complicada y aprender a resolver los ejercicios (probar) es más (**E13**)**.**

¿y acerca de su importancia y utilidad?

Permite la resolución de problemas complejos y además permite la apertura del pensamiento deductivo y me ayuda a razonar más las cosas y lo que voy a decir (**E8**, **E14**)**;** Simplificar la tarea de demostrar (**E7**); Utilidad y aplicación en las matemáticas como un lenguaje (**E4**, **E2**, **E10**)**;** Es de suma importancia pues es la base para materias posteriores (**E6**,**E10**)**;** Que se utilizará en el siguiente semestre (**E5**)**;** Ayuda a resolver problemas de la vida diaria (**E13**,**E14**)

13.-En tu opinión, ¿cuáles son las principales dificultades en el aprendizaje de la lógica?

La principal dificultad es la simbolización de los argumentos, ya que muchas veces no sabemos hablar de manera correcta el español (**E8**, **E2**); Uso de las equivalencias lógicas, reglas de inferencia (**E7**, **E1**, **E6**, **E11**)**;** Comprender como utilizarla para demostrar (**E4**)**;** Falta de práctica y constancia (**E3**,**E14**); Ninguna, pero no estudio y falto (**E5**, **E14**)**;** Uso de fórmulas y definiciones (**E12**); Todo es complicado (**E13**)**.**

3.2.2.2 Grupo A Segundo y tercer momento

Aquí se presentan las producciones de los estudiantes **E2**, **E4**, **E7** y **E8** seleccionados para participar en el segundo y tercer momento.

En el instrumento 2A, el reactivo 1 corresponde al 5 del instrumento 1A con una variante en el tipo de tarea, es decir cambia de ser de opción múltiple y de solicitar que se justifique la respuesta a solicitar que decidan entre la verdad o falsedad y lo demuestren.

El reactivo 2 corresponde al 6 del instrumento 1A y se mantuvo igual (salvo porque no se les pide justificar sino ofrecer argumentos convincentes) en virtud de que dicho ejercicio no fue resuelto correctamente por ninguno de los alumnos y queremos ver si prevalecen los errores, y entender la forma en la que lo están pensando a través de una introspección en la solución.

El tercer reactivo aparece por primera vez y difiere de los estudiados primero por ser de geometría y segundo por solicitar que demuestren directamente el enunciado. Reactivo 3. Demuestre que: Si el triángulo rectángulo *XYZ* con lados de longitud x e y, y de hipotenusa z, tiene un área de $z^2/4$, entonces el triángulo *XYZ* es isósceles.

Las modificaciones realizadas en los reactivos variando el tipo de tarea fuerza al estudiante a ofrecer explicaciones más amplias.

A continuación se presentan las respuestas de los estudiantes.

Tabla 6. Respuestas del Instrumento 2A, Estudiante E8

Segundo Momento	*Tercer Momento*	*Observaciones*
Reactivo 1. En ambos casos en a) y b) realiza una traducción al lenguaje simbólico de ambos enunciados y plantea tres casos particulares de inicio tomando en cuenta los siguientes criterios:	Sobre su conclusión se da cuenta que I) no es necesario pues cae o bien en II) o en III) y al tratar de explicar su repuesta menciona que le faltó incluir el caso de un número par-número impar y además reconoce que los casos particulares no le cubren la generalidad. Así	-El avance del segundo al tercer momento es que ya no plantea casos particulares y asigna a un par la forma *2x* y a un impar la forma *2x+1.* -Se aprecia que no esta tomando la hipótesis o antecedente (*Si la suma de dos números es par)* en cuenta, pues de ser así le interesarían solo los casos I) y II) que

I. Mismo número (7,7) II. 2 impares (5,3) III. 2 pares (4,8) Asigna valores de verdad y concluye que si se tienen 2 números impares ambos argumentos son verdaderos y son falsos si los números son pares.	luego trabaja de la siguiente manera con el mismo reactivo para a): Plantea 3 casos I. Pares II. 2 impares III. par e impar En I) concluye que no se cumple dado que la suma es par (satisface la hipótesis), pero el producto también lo es (no cumple la tesis). En II) concluye que se cumple a) pues la suma es par (satisface la hipótesis) y el producto es impar (satisface la tesis). En III) la suma impar (no satisface la hipótesis) y el producto par (no satisface la tesis) por tanto no cumple. Acaba concluyendo que si los tres casos se cumplieran sería válido, pero no es así, en consecuencia no es válido.	satisfacen la hipótesis y como falla I) el argumento es falso en general. -La respuesta final no es válido es correcta pero llega a ella cometiendo errores lógicos. -En el mismo reactivo en b) considera los mismos casos I), II) y III) y siguiendo el mismo razonamiento concluye que I) no cumple, II) si cumple y III) no cumple. Finalmente llega a que el argumento no es válido por no satisfacer los tres casos. -De igual manera se aprecia que no toma en cuenta que debe satisfacer la hipótesis, es decir, *si el producto es impar*, esta parte sólo la satisface el caso II) así que I) y III) quedan descartados y como en II) el consecuente o tesis *…la suma es par* se verifica el argumento b) y por lo tanto es verdadero.
Reactivo 2. voltear H y 7 pues la regla se cumple sin importar el valor de verdad del consecuente y para el 7 no importa el valor de verdad del antecedente.	Después del segundo momento en el diálogo se le pide que vuelva a razonar este reactivo (que ya aparecía en el primer instrumento). Lo primero que hace es traducir al lenguaje simbólico y obtiene la forma *P→Q.* Toma los 4 casos de tarjetas poniendo A y H como antecedentes (*P*) y cuyo consecuente no esta definido y a 4 y 7 como consecuentes (*Q*) ligados a antecedentes no definidos. Asigna valores de verdad y concluye que debe voltear A y 4.	Al tratar de explicar su respuesta del segundo momento se da cuenta que precisamente por esta explicación, de esas dos tarjetas no importa saber que tienen al reverso. Concluyendo de manera correcta que las tarjetas que deben ser volteadas son Ay 4. La respuesta muestra un avance significativo en relación con su abordaje en el instrumento 1, donde en el concentrado de respuestas se puede apreciar que su respuesta fue 7.
Reactivo 3. Tiene como hipótesis que el área del triángulo rectángulo es z^2 /4 donde z es la hipotenusa se le pide que a partir de eso pruebe que el triángulo es isósceles. Confunde *P→Q* con su conversa *Q→P* y prueba de esa manera.		Se decide incluir este ejercicio que no aparece en el primer instrumento para ver como se desempeñan al enfrentar un ejercicio que pide directamente que demuestren de manera formal, además de ser de geometría. El comentario de E8 fue "*intenté traducir al lenguaje simbólico y asignar valores de verdad, pero no pude hacerlo y lo hice como en otras materias y como aparecería en libros".*

Tabla 7. Respuestas del Instrumento 2 A, Estudiante E2

Segundo Momento	*Tercer Momento*	*Observaciones*

<table>
<tr>
<td colspan="2">Reactivo 1. Para a) traduce a lenguaje simbólico la expresión y descarta esta opción mostrando su falsedad a través del contraejemplo (2,2). Para b) realiza una traducción más elaborada que en el inciso a) al lenguaje simbólico. Esto es considera
• p(x,y):=x sumado a y.
• q(x,y):=x multiplicado con y
• r:=par s:=impar
enseguida conecta con ^ todas las posibilidades asignando valores de verdad y llega a que el argumento es válido, aunque considerando como universo U:={1,2,4}, es decir sus posibilidades son: (1,1),(1,2),…(4,1),(4,2),(4,4).</td>
<td>Prevalece su mismo razonamiento exhibiendo más de un caso particular, en el primer instrumento maneja un universo de {2,4,5,7} pero sin asignar valores de verdad en todos los casos, mientras que en el segundo instrumento su universo es {1,2,4} y explora en detalle todos los casos.</td>
</tr>
<tr>
<td>Reactivo 2. Aquí E2 entiende la regla “Si una tarjeta tiene una vocal ‘al’ lado (izquierdo-derecho), entonces tiene un número impar en el lado opuesto (reverso de la tarjeta)”. Cuando se habla de lados hacemos referencia a las caras de la tarjeta y no a las tarjetas de al lado. De la forma en que entiende la regla procede a traducir a lenguaje simbólico con p(x,v):=x tiene vocal al lado ; q(x):=x tiene número impar en el reverso. Así explora los casos de las 4 tarjetas, asigna valores de verdad, usa el conectivo ^ y concluye que solo la tarjeta H debe voltearse.</td>
<td>En este momento, se modifica el problema y se le pide que considere las tarjetas divididas con la apariencia de una ficha de dominó, en la mitad de la primera tarjeta se muestra la A y la otra mitad se encuentra cubierta, de la misma manera las siguientes tarjetas muestran en una mitad a H, 4 y 7 y la otra mitad cubierta. Ahora la pregunta es cuáles tarjetas debe descubrir para comprobar que la regla dada es verdadera o falsa. De esta manera, E2 responde correctamente que las tarjetas A y 4 son las que deben “descubrirse”. Justifica diciendo que si A tiene un número par la regla no se cumple y, de igual manera si el 4 tiene una vocal del otro lado no se cumple la regla. Y además no importa lo que tengan la H y el 7 pues, no se enuncia regla sobre las consonantes; y el 7, de igual forma no importa que tenga si vocal o consonante, pues si es vocal la regla se cumple y si es consonante también.</td>
<td>Al igual que en el primer instrumento interpreta de manera errónea el enunciado y a partir de ahí justifica ‘bien’ su respuesta.
Por la manera de justificar en la última parte del tercer momento nos damos cuenta que no tiene problemas con la interpretación de las implicaciones es decir no confunde $P \to Q$ con su recíproca.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Reactivo 3. En este ejercicio reconoce la forma de la implicación y de manera correcta usa las hipótesis. Iguala $z^2/4=xy/4$ y despeja z^2 para usar el teorema de Pitágoras y sustituir en $z^2= x^2+ y^2$, así llega a $(x-y)^2=0$ y eso implica que $x=y$, es decir que el triángulo es isósceles.</td>
<td>Con las demostraciones en geometría esta más familiarizado según manifiesta y lo muestra en el instrumento 2 al resolver con soltura el ejercicio 3. Sin embargo en otras áreas recurre a casos particulares y búsqueda de contraejemplos, aunque exhibiendo más de un caso y con características diferentes.</td>
</tr>
</table>

Tabla 8. Respuestas del Instrumento 2 A, Estudiante E4[18]

Segundo Momento	*Observaciones*
Reactivo 1. Traduce a lenguaje simbólico definiendo *p:=suma; q:=es par; r:=producto; s:= impar y t:=dos números.* Luego asigna al argumento *a)* con $[(t \wedge p) \rightarrow q] \rightarrow (r \rightarrow s)$ experimenta con casos particulares y asigna valores de verdad al caso (5,3) y concluye que se cumple sólo cuando se suman 2 números impares, aunque no lo plasma en el papel, cuando se le cuestiona dice que cuando uno de los números es par no se cumple. Para *b)* concluye que es verdadera por las 'demostraciones' dadas con ejemplos. No especifica los casos particulares pero dice que experimentó con varios casos sin plasmarlo	
Reactivo 2. Responde que a la tarjeta No.4 que tiene al 7.	En este ejercicio él se cuestiona qué vocal le asignaría por el número de vocales que hay (descartando la A que ya aparece le quedan 4 disponibles). No avanza más y no justifica. Al tratar de explicarme su solución dice '*descarto A porque ya tiene vocal, luego a H no le asignaría vocal pues ya tiene consonante, 4 no le toca vocal pues es par y 7 tiene 4 vocales disponibles.'* Parte de que la regla es válida y se ocupa de que vocales puede tener el 7.
Reactivo 3. En este ejercicio realiza un esquema muy parecido a un triángulo equilátero, el argumento tiene la forma $P \rightarrow Q$, pero toma como hipótesis a Q y parte de que el triángulo es isósceles y así $x=y$, luego usa una hipótesis presente en P, es decir que el triángulo es rectángulo y aplica el teorema de Pitágoras tomando en cuanta la igualdad de los lados y llega a que $z^2=2x^2$ y por otra parte como el área es $A=x^2/2$, y $x^2=z^2/2$, concluye que $A= z^2/4$.	Escribe poco y al tratar de explicarlo podemos reconstruir lo que piensa. De acuerdo a las respuestas ofrecidas por él, en los instrumentos 1 y 2 nos deja claro que no distingue entre las formas $P \rightarrow Q$ y $Q \rightarrow P$.

Tabla 9. Respuestas del Instrumento 2 A, Estudiante E7

Segundo Momento	*Observaciones*
Reactivo 1. Contesta que *a)* es verdadero y *b)* es verdadero. Así si los dos son verdaderos entonces implica verdadero.	Escribe poco y al tratar de explicar nos damos cuenta que entiende el argumento a) implica el argumento b), asigna valores de verdad y de acuerdo a eso llega a que la implicación es verdadera.
Reactivo 2. Su respuesta es que a la tarjeta A y 7 porque según la regla la vocal tiene un impar y entonces el número impar una vocal.	

[18] No hay diferencia significativa en el segundo y tercer momento, es por eso que no se incluye.

Reactivo 3. Solamente establece la igualdad entre la fórmula de área y el área dada en el enunciado y trata de usar el hecho de que x e y tienen la misma longitud (aquí al escribirlo lo hace de manera errónea pues indica *x+y=longitud*). No realiza más intentos.

3.2.2.3 Grupo A. Cuarto momento

Tabla 10. Concentrado de respuestas del instrumento 3A. E2, E7, E8, E4 (Creencias de los estudiantes)

1. ¿Qué te motivó a estudiar matemáticas?

E8 *El saber que aún puedo aprender más sobre diferentes cosas. El querer descubrir cómo realizar modelos matemáticos para describir el comportamiento de diversos fenómenos de la naturaleza y cómo es que las diversas ecuaciones de distintos tipos encajan a la perfección cuando se describen estos fenómenos.*
E2 *En primer lugar que me gustan y se me facilitan. Luego, que con ellas veo que me puedo adentrar en distintas áreas del conocimiento; y así, conocer más sobre todo aquello que no conozco. Además, me gustaría realizar investigaciones que ayuden y sirvan para el progreso de la humanidad.*
E4 *Los posibles cálculos que podría realizar en diferentes áreas.*
E7 *El que se me motivara más en esa materia que en cualquier otra, era la materia en la que en el bachillerato me iba mejor y sobre todo me gusta y me gustaría aprender más.*

2. ¿Qué es lo que caracteriza el trabajo de un matemático?

E8 *La capacidad de visualizar los problemas y expresarlos con números y ecuaciones y la meticulosidad con que se realizan estas operaciones, así como la paciencia para aprender de los errores.*
E2 *Que puede expresar un problema planteado, que incumbe a la naturaleza, puede ser llevado a notación matemática y encontrar un resultado. Y esto se puede lograr mediante un proceso que puede estar lleno de errores, pero estos errores nos ayudan a llegar a una veracidad.*
E4 *La eficiencia y la exactitud que tiene al enfrentar los problemas presentados.*
E7 *El resolver y demostrar problemas que presente alguna empresa o negocio y que no quede duda.*

3. ¿Qué es una demostración matemática?

E8 *Dar validez a un argumento que a simple vista puede parecer obvio, pero demostrándolo se puede probar lo contrario.*
E2 *Es la comprobación de un teorema, basándose en axiomas, postulados y teoremas, siendo este último ya probado. Es decir es la prueba de validez de cierto argumento (Teorema).*
E4 *Verificar que para toda condición de la demostración efectivamente se cumpla.*
E7 *Dar a conocer el porqué de ciertos problemas y con toda exactitud que sea verdadero el resultado con afirmaciones.*

4. ¿Describe como se ha dado tu acercamiento a las técnicas para demostrar en matemáticas?

E8 *El acercamiento se dio a través de los maestros, nunca antes había tenido que demostrar, ya que las ecuaciones se me daban para usarlas y no para comprobar si eran ciertas. Así es que sólo a través de los maestros empecé a usar las demostraciones.*
E2 *Primeramente, por medio de lo que los docentes nos proporcionan, y después, leo un poco de bibliografía para reforzar y acrecentar lo que ya se ha enseñado.*
E4 *Por medio del análisis y comprobaciones en los aspectos cotidiano y a la vez utilizando la lógica.*
E7 *De acuerdo con los aprendizajes en clase y tratando de aplicarlos directamente en problemas y desarrollando esa técnica y tratar de demostrarlos.*

5. ¿Qué técnicas conoces?

E8 *Sólo las utilizadas en la clase de lógica matemática: Condicional, condicional reforzada e indirecta.*
E2 *Regla de la demostración condicional, prueba formal de validez, contradicción o demostración indirecta.*
E4 *Sólo el análisis, aplicación de lo conocido y la investigación.*
E7 *Los teoremas en cuanto al cálculo por ejemplo, asociativa, leyes de Morgan, distributiva, conmutativa.*

6. ¿Cuáles utilizas?

E8 *Hasta el momento ninguna (en otra materia).* **E2** *Prueba formal de validez, demostración condicional y contradicción.* **E4** *Análisis e investigación en el argumento que se me da.* **E7** *Teoremas, asociativa y conmutativa.*

7. ¿Cuál se te dificulta?

E8 *No encontré muchos problemas al usarlas, pero me gustaría saber como aplicarlas en las demostraciones de ecuaciones, donde ya se involucran constantes y variables no solo enunciados simples.* ***E2*** *Demostración indirecta o contradicción. Y en sí, para mí lo difícil no es la técnica, sino el decidir cual utilizar.* ***E4*** *El razonar y obtener relaciones entre las técnicas.* ***E7*** *Ley distributiva.*

8. Cuándo un profesor te habla de un resultado en matemáticas, tu reacción es:

a) Creerlo de inmediato

b) Ensayar para algunos casos particulares **E2 ; E4**

c) Buscar si el resultado se encuentra escrito en algún texto.

d) Esperar a que te proporcione argumentos convincentes de que el resultado es verdadero **E8;E7**

9. Dibuja la emoción que te causa:

Realizar una demostración	Leer una demostración	Seguir una demostración que realice tu profesor
E8 **E2** **E4** **E7**	**E8** **E2** **E4** **E7**	**E8** **E2** **E4** **E7**

3.2.2.4 Conclusiones del estudio exploratorio Grupo A

En una revisión inicial de los cuadernos de clase de los estudiantes podemos darnos cuenta que la forma en que tienen los apuntes sigue el esquema definición, ejemplos, teoremas, lemas, demostraciones, corolario y el patrón se vuelve a repetir entrelazando los conceptos y resultados anteriores para apoyar nuevas definiciones, teoremas y demostraciones. Esta forma "lineal" de transmisión del conocimiento se caracteriza por presentar en forma "acabada" el quehacer matemático y no pone de manifiesto los procesos de pensamiento implícitos, es decir, deja oculto lo relativo a cómo se descubrió lo que se descubrió y el camino recorrido para llegar a demostrar lo que se demostró. Esta presentación de teorías inexpugnables son difíciles de aprender, pues no se exhibe la naturaleza "creativa" y de "descubrimiento" de la matemática, y se limita la formación de los estudiantes perdiéndose con ello el propósito de mantener vivo el campo y hacerlo crecer.
Por otra parte el valor otorgado a los recursos para los temas estudiados, los estudiantes lo centran en los apuntes de clase. Se percibe que pocas veces centran su atención en los textos sugeridos y utilizados por sus profesores. Esto es una debilidad pues en algunos casos dichos textos se ocupan de explicar la cultura de fondo de los conceptos y resultados estudiados, aunque presenten de forma "lineal" el conocimiento desechando las exquisiteces secretas de las primeras ideas. Este es un fenómeno que ocurre dada la forma de comunicar el conocimiento en la comunidad matemática y los estándares requeridos. Esto crea una barrera de entrada para el acceso de los estudiantes a textos y artículos de matemáticas, pues se muestran desalentados pensando que es difícil de aprender y entender las pruebas de teoremas claves. Al respecto podemos citar algunos comentarios de los alumnos en relación a su acercamiento a los contenidos y a las demostraciones.

“*El acercamiento se dio a través de los maestros, nunca antes había tenido que demostrar, ya que las ecuaciones se me daban para usarlas y no para comprobar si eran ciertas. Así es que sólo a través de ellos empecé a usar las demostraciones.” (E8)*
“*Primeramente, por medio de lo que los docentes nos proporcionan, y después, leo un poco de bibliografía para reforzar y acrecentar lo que ya se ha enseñado.” (E2)*
“*De acuerdo con los aprendizajes en clase y tratando de aplicarlos directamente en problemas y desarrollando esa técnica y tratar de demostrarlos.” (E7)*

Por otra parte nos encontramos con una diferencia significativa entre realizar una demostración, leer una demostración y seguir la demostración que realiza el profesor. Los estudiantes prefieren seguir una demostración de la que habla el profesor, a leerla y leerla mucho más que realizarla. “Demuestra” es un verbo que crea un conflicto en el alumno. En esta parte podemos destacar que fueron muchos los alumnos que no quisieron participar en el segundo momento de esta investigación por la naturaleza de la misma.

En esta aproximación pudimos constatar que no existe un módulo que los prepare previamente en la importancia de la demostración en matemáticas, el lenguaje utilizado, las formas de enunciar los resultados, los cuantificadores, las técnicas de demostración, cuándo utilizarlas, como escribirlas, etc. Se enfrentan a ellas una vez que cursan los primeros módulos y de esa manera entienden que hay que demostrar, sin darle el sentido real a este hecho. Algunas respuestas en esta dirección dadas por los estudiantes son:

*“No encontré muchos problemas al usarlas, pero me gustaría saber como aplicarlas en las demostraciones de ecuaciones, donde ya se involucran constantes y variables no solo enunciados simples.” (**E8**)*
*“Demostración indirecta o contradicción se me dificulta. Y en sí, para mí lo difícil no es la técnica, sino el decidir cual utilizar.”(**E2**)*
*“Se me dificulta el razonar y obtener relaciones entre las técnicas y lo que quiero demostrar.” (**E4**)*

Un uso erróneo en relación al lenguaje utilizado podemos verlo por ejemplo en la respuesta ofrecida por E4 en el segundo momento para el reactivo 1.

Al abordar los reactivos presentados hay un intento inmediato por traducir al lenguaje simbólico la situación. No hay una interpretación de la situación presentada para identificar y entender el problema, los términos matemáticos empleados y la interpretación de las proposiciones lógicas. Se percibe una prisa por imprimir “formalidad” a la respuesta (la mayoría de las veces no en forma adecuada) usando los mismos patrones y términos a los que están acostumbrados al ver como se exponen los resultados en sus clases.

En varios de los casos el conocimiento es aceptado en forma pragmática. Consideran importante su aprendizaje pues identifican la necesidad en otros contextos (en otras materias, o para aprobar un examen) y lo consideran confiable considerando la procedencia (el texto, el profesor, sus apuntes o un compañero) y la forma de presentación (simbólica, o por las palabras empleadas enunciado, demostración, por lo tanto, si,…entonces, etc.). Esto se pone de manifiesto en los concentrados de respuestas.

Si revisamos la asignación de categorías para el primer momento podemos ver que, en el caso del problema 7 a) y b), la forma del enunciado es la misma pero el contexto varía. Podemos afirmar que el contexto es determinante pues en 7 a) la situación atiende a lo cotidiano “fiebre implica neumonía”, mientras que en 7 b) atiende al contexto de teoría de números. En el primer caso (en relación con el segundo) tenemos mayoría de respuestas correctas.

En el caso del problema de las tarjetas (reactivo 6 en el instrumento 1 A y 2 en el 2 A) es interesante analizar por qué ningún estudiante llega a la respuesta correcta. La dificultad con que se aborda este problema reside en que los alumnos no encuentran equivalencia entre $p \rightarrow q$ y $\neg q \rightarrow \neg p$ así que se concentran en pensar que sólo interesan las tarjetas que tengan vocal de un lado, para verificar si tienen o no número impar del otro. Con esto se olvidan que comprobar aquellas que no tengan número impar de un lado. Esto puede asociarse a que el método de reducción al absurdo aún no está incorporado como proceso.
Este problema en el segundo momento fue resuelto correctamente por dos de los estudiantes E2 y **E8**. Con **E2** en el diálogo introspectivo de la producción del segundo momento se puso de manifiesto que se produjeron algunas imprecisiones en la percepción del enunciado, así que replanteando la situación como se muestra en la tabla de respuestas, (columna tercer momento en relación al reactivo 2) el estudiante llega a la respuesta correcta. En el caso de E8, desde el primer intento aplica lo aprendido en la clase y asigna valores de verdad, construye tablas, pero falla al interpretar los resultados. El fallo persiste en el segundo momento, pero después de sus intentos por explicar la solución corrige la interpretación final y concluye exitosamente. En este caso se desvela la forma de trabajar del estudiante, que aplica lo aprendido pero aún falta la comprensión global del proceso y el reconocimiento del significado del problema (en el anexo se pueden ver las producciones de **E8**).
De las producciones de los estudiantes podemos destacar la dificultad para plasmar las argumentaciones en forma ordenada y comprensible. En el segundo y tercer momento se le pidió a **E8** que escribiera sus soluciones al problema 1 de forma que alguien más las leyera y pudiera interpretarlas. Se muestra un avance en la organización del problema y lo que quiere transmitir sin embargo presenta la debilidad de que no usa la hipótesis para concluir.
De las cuestiones más destacables y perceptibles en las tablas de respuestas y asignación de categorías es el manejo de casos particulares como forma de argumentación. Pocos abordan casos genéricos y una minoría presenta argumentos generales y cercanos a una demostración.
Podemos también concluir que los procesos de demostración viven encapsulados en la exposición del profesor y en los textos como últimas ideas presentadas “limpias” para ser comunicadas y esto hace que los estudiantes no se vean confrontados con la demostración como forma de convencimiento y no consideren la posibilidad de realizarlas para convencerse.

Las características presentadas en las producciones de los estudiantes se pueden resumir en los siguientes puntos:

1. Expresar en forma simbólica los argumentos les imprime “formalidad” y los vincula con el “lenguaje en que deben realizarse las demostraciones”.
2. El contacto con las demostraciones y la validez de las mismas proviene del profesor o del texto.
3. El modelo de enseñanza es el tradicional definición-teorema-demostración.
4. El recurso principal de retroalimentación es el cuaderno de apuntes.
5. El conocimiento es aceptado en forma pragmática.
6. La confiabilidad se da en función de la procedencia y la presentación de los resultados.
7. Dificultad para plasmar ideas y presentarlas en forma ordenada y comprensible.
8. Falta de comprensión global del proceso y reconocimiento del significado del problema.
9. Manejo de casos particulares como forma de convencimiento.

10. El contexto es determinante por encima de la forma del problema.
11. Dificultades con el método por reducción al absurdo.
12. Imprecisión en el lenguaje y manejo parcial de las definiciones.
13. Confusión entre técnicas de demostración (reducción al absurdo, método deductivo, contrapositivo, etc) y propiedades de números (conmutativa, distributiva, etc)

3.2.3 Estudio de un caso del grupo A

En este estudio de caso, reportado en Alvarado & González (2010) se describe y se analiza la actuación de una alumna, Nancy, en torno a un problema planteado a su grupo durante un examen que posteriormente fue objeto de dos entrevistas. En el análisis realizado nos apoyamos en los esquemas propuestos por Toulmin (1958) que se describen a continuación.

3.2.3.1 Análisis de datos

Para el análisis de datos, utilizaremos el modelo de Toulmin (1958) con la intención de analizar y documentar los progresos de los estudiantes al enfrentar un problema relacionado con la demostración matemática. Este modelo para el análisis de argumentos considera seis componentes básicas: 1) Los *datos o bases* (**B**) son los fundamentos sobre los cuales descansa el argumento; 2) La *proposición o pretensión* (**P**) es el enunciado del que el argumentador desea convencer a su audiencia; 3) *La garantía o justificación* (**J**) establece la conexión entre los datos y la conclusión por ejemplo mencionar una regla, una definición o utilizar una analogía; 4) el *respaldo* (**R**) que sirve de sostén a la garantía y su función es la de presentar una mayor evidencia; y 5) el *cualificador modal* (**C**) que es un enunciado que indica el grado de fuerza o de probabilidad de la proposición o aserción y por último la *objeción o posibles refutaciones* (**O**) que es una excepción potencial para la proposición o conclusión, es decir nos habla de las posibles reservas que se puedan formular y señalan las circunstancias en que las justificaciones no son ciertas.

3.2.3.2 Nancy intentando demostrar

Cuando se inicia esta investigación, noviembre de 2006, Nancy es una alumna del primer semestre de la licenciatura en Matemáticas Aplicadas de la UJED, grupo A del apartado anterior. Cursa las materias básicas de cálculo diferencial e integral I, geometría analítica I, álgebra superior I, lógica matemática y las complementarias de filosofía de las matemáticas e inglés. Es una alumna que muestra una gran dedicación y un buen avance académico. Este estudio tiene lugar en relación con la materia de lógica matemática.
Se realizaron tres aproximaciones para la recogida de datos: la primera con todo el grupo A (14 estudiantes) y las siguientes sólo con cuatro estudiantes, entre ellos Nancy una estudiante que en apariencia tenía un buen manejo de los contenidos de la materia de lógica matemática (opinión de profesores, desempeño en el aula, producciones y exámenes) y sin embargo mostró algunas dificultades con la demostración manteniendo sus inconsistencias y errores a lo largo de los diferentes momentos de este estudio. Las aproximaciones mencionadas se describen a continuación y las identificaremos como primer, segundo y tercer momento.

3.2.3.3 Primer momento

La primera aproximación se realiza a través de un examen diseñado en coordinación con la profesora de su grupo de clase que constaba de 13 ejercicios y tenía como finalidad evaluar los contenidos estudiados hasta el momento (en el cuarto mes). En este apartado nos centramos sólo en uno de esos ejercicios[19] . Se trata de un problema que se prestaba a un simple manejo numérico y que, para nuestra sorpresa, predominaron soluciones basadas en la verificación de casos particulares mientras que para otros ejercicios se utilizaron argumentos lógicos válidos.

Ejercicio 1. Primer momento
Óscar y Sofía piensan en el par de números 3 y 11. Ambos notan que la SUMA 3+11 es PAR y el PRODUCTO es IMPAR.
Óscar dice: Si la SUMA de dos números dados es PAR, su PRODUCTO es IMPAR.
Sofía dice: Si el PRODUCTO de dos números es IMPAR, su SUMA es PAR.
a) ¿ las afirmaciones de Óscar y Sofía dicen los mismo?
b) El PRODUCTO de dos números es 1271. Suponga que Sofía está en lo correcto. ¿cuál de las siguientes opciones es correcta? Marque una de ellas.

- ❖ Puedes asegurar que la SUMA de los dos números es PAR
- ❖ Puedes asegurar que la SUMA de los dos números es IMPAR.
- ❖ No estás seguro de que la SUMA es IMPAR o PAR hasta que conoces los números dados

c) ¿Es la afirmación de Óscar cierta? Justifique su respuesta
d) ¿Es la afirmación de Sofía correcta? Justifique su respuesta

Nancy realiza la traducción de la situación de partida al lenguaje lógico (figura 1) y a partir de lo estudiado en su clase de lógica asigna valores de verdad a *S, P, S→P* y a *P→S* y concluye, en la parte a) del ejercicio, que Óscar y Sofía no dicen lo mismo.
Para la parte b) ni tiene en cuenta el dato que se le da (prueba con las parejas de números (3,5) y (2,2)) ni utiliza como parte de su argumentación la afirmación de Sofía; se está centrando sólo en lo que hay que probar sin tener en cuenta las hipótesis.. Su respuesta a esta parte fue incorrecta ya que seleccionó la tercera opción: *no estás seguro de que la SUMA es IMPAR o PAR hasta que conoces los números dados.*

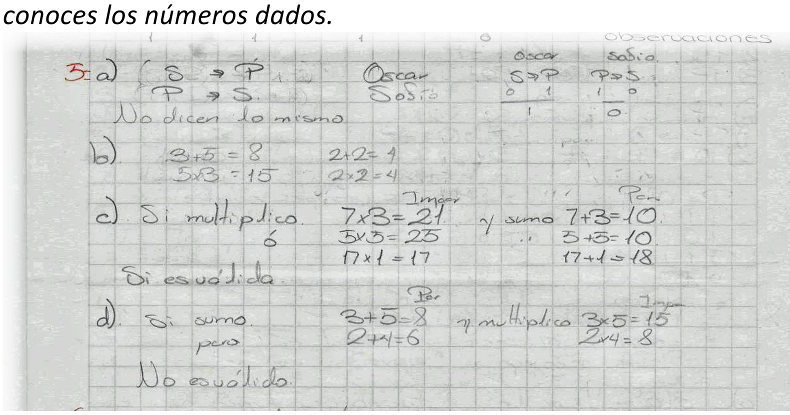


Figura 1. Actuación de Nancy en el primer momento

En la parte c), explora casos particulares con las parejas de números (7,3), (5,5) y (17,1), primero los multiplica y después los suma y falla determinando que es válida la afirmación de Óscar. En esta parte, cabe destacar que selecciona para sus casos exclusivamente parejas de números impares y el orden en que realiza las operaciones no es el esperado de acuerdo con la afirmación de Óscar (está confundiendo antecedente y consecuente).

---

[19][1] Este problema fue utilizado en un estudio por Hoyles & Küchemann (2002)

Para el apartado d), nuevamente intenta comprobarlo con casos particulares (3,5) y (2,4) siguiendo el mismo patrón que en los incisos anteriores de realizar la verificación de las operaciones en el orden inverso al esperado, es decir suma primero y después multiplica.

Para analizar las respuestas de Nancy utilizamos el esquema de la figura 2 en el cual se muestra cómo a partir de los datos presentes en la base o hipótesis ***B*** se llega al enunciado ***P,*** utilizando las argumentaciones que aparecen en la justificación ***J***, que a su vez se sostiene en un respaldo ***R***. Finalmente aparece un cualificador modal ***C***, que nos indica el grado de fuerza o convencimiento que muestra Nancy al indicar si el resultado es o no cierto. En primer lugar se presenta la respuesta dada al ítem a), a continuación la del ítem b) y, en último lugar, como d) es recíproco de c), se utiliza un único gráfico intercambiando ***B*** y ***P,*** indicándose esta circunstancia mediante el cambio de sentido de las flechas.

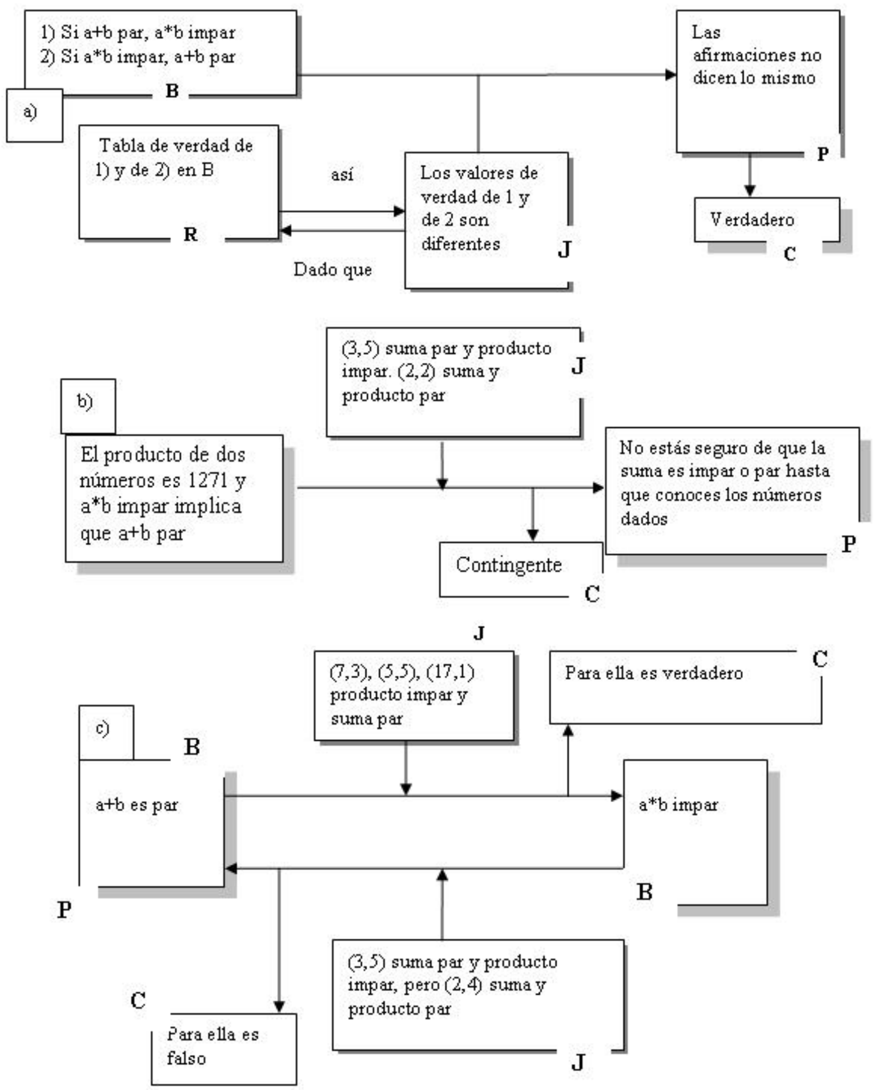


Figura 2. Análisis del primer momento

Podemos observar que concluye con éxito que 1 y 2 son afirmaciones diferentes, a través del uso de tablas de verdad, sin embargo, esta información no la vincula con las siguientes tres cuestiones y falla en las implicaciones verificando a través de ejemplos primero consecuente y después antecedente, además de no tomar en cuenta las bases o hipótesis dadas, como se ha indicado respecto del apartado b), y como se puede ver en el d) cuando menciona que (2,4) tienen suma y producto par, parece no darse cuenta que, en función de la hipótesis sólo interesan las parejas con producto par.

3.2.3.4 Segundo momento

De los alumnos que contestaron al cuestionario se descartaron algunos porque sus respuestas eran demasiado cortas y no permitían analizar sus producciones quedando solo siete. Entre ellos sólo cuatro mostraron interés por revisar sus respuestas participando, dos meses después, en el segundo momento de manera voluntaria, realizando otro examen en el que también se incluyó el ejercicio antes mencionado pero variándolo con la intención de que el alumno nos proporcionara más elementos acerca de su primera actuación frente al problema. El ejercicio queda como sigue:

Ejercicio 1: Segundo momento

1. Demuestre la verdad o falsedad de los siguientes argumentos:
a) Si la SUMA de dos números dados es PAR, su PRODUCTO es IMPAR.
b) Si el PRODUCTO de dos números es IMPAR, su SUMA es PAR.

La traducción de Nancy de las proposiciones anteriores al lenguaje lógico (figura 3), correcta en el momento anterior, cambia ahora a una forma más compleja totalmente innecesaria. Podemos destacar que comprende las tablas de verdad y las utiliza correctamente pero continúa requiriendo la confirmación mediante el uso de casos particulares y para ello utiliza las parejas (7,7), (5,3) y (4,8). Cuando comprueba con la pareja (4,8) el apartado a), después de asignar los correspondientes valores de verdad, encuentra que la conclusión es falsa mientras que para el apartado b) comprueba que es verdadero, pero lo descarta en virtud de que el antecedente es falso, es decir, el producto de (4,8) no es impar. Así, aunque en la tabla de verdad encierra los casos en que la implicación es verdadera, en la conclusión señala que *«…son falsos si se usan números pares».* Concluye que «*si se prueba con números impares, los argumentos son verdaderos y son falsos si se usan números pares».*

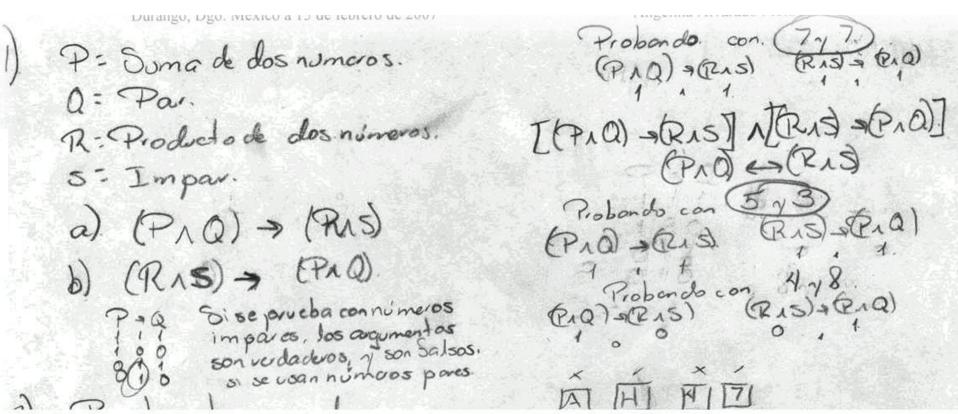


Figura 3. Actuación de Nancy en el segundo momento

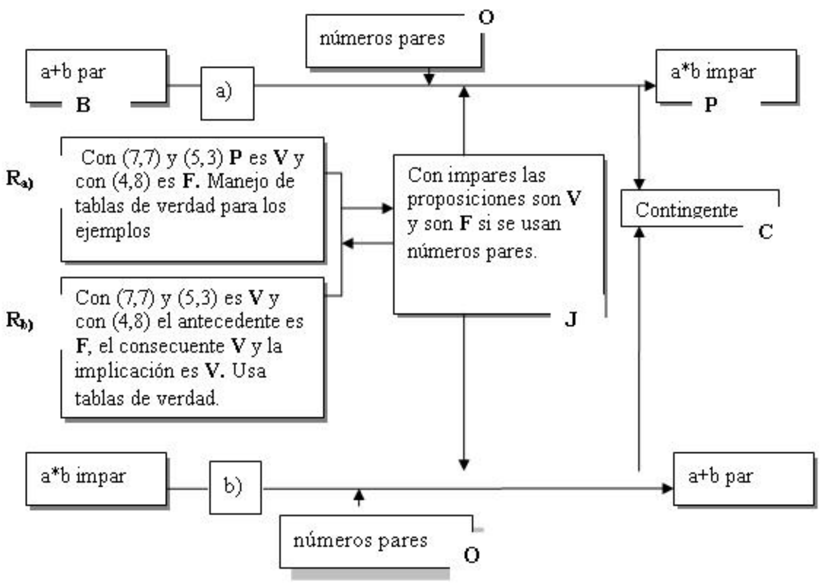


Figura 4. Análisis del segundo momento

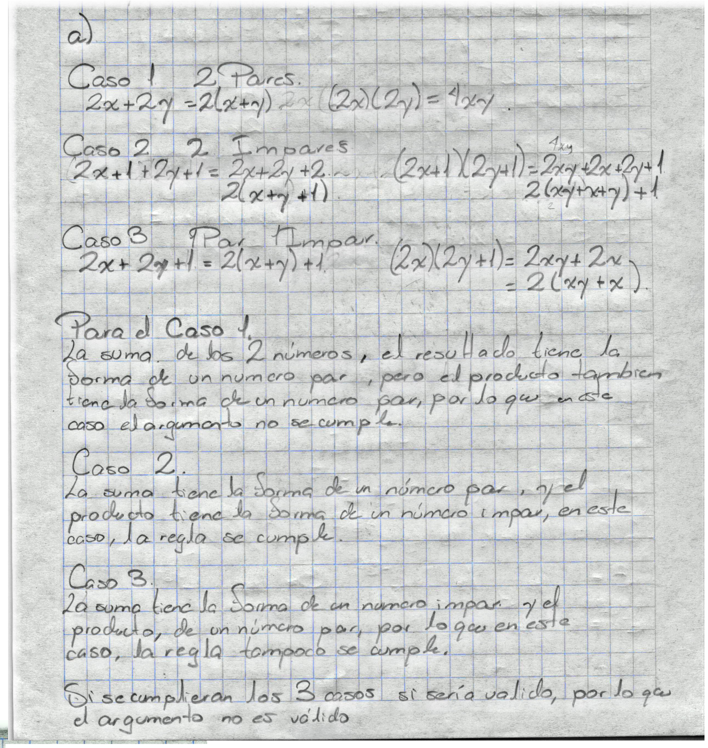
En la figura 4, además de los elementos que se incluyeron en la figura 2, entra en juego ***O*** que hace referencia a las objeciones que tiene Nancy para que sea verdadera la proposición. Se puede apreciar que en la parte a) no reconoce el papel condicional de la hipótesis y, para ella, (4,8) no es un contraejemplo que determine la falsedad del argumento. Para la parte b) la justificación es correcta, pero se sigue respaldando en casos particulares.

3.2.3.5 Tercer momento

Al día siguiente de la aplicación del segundo instrumento (segundo momento), se mantuvo un diálogo por separado con cada uno de los estudiantes, en particular con Nancy. En dicho diálogo se le pedía que explicara el porqué de sus respuestas en los exámenes y, así, se enfrentó progresivamente con las incoherencias de sus decisiones lo que nos permitió entender cómo estaba procesando la solución, y el porqué de sus errores. Cuando se le pregunta por la justificación ofrecida se remite a los ejemplos *«creo que los argumentos son falsos con números pares porque en el primero con dos pares no me da producto impar como con 2 y 2 […] y en el segundo con 4 y con 8 no cumple con lo primero que debe cumplir (producto impar)».* Cuando se le indicó que con un ejemplo no probaba la verdad de un argumento, señaló *«no, pero se puede hacer general con alguna de las fórmulas, en otra clase hice un programa que trataba de estas fórmulas para números pares e impares, sí...eso puedo hacer, usarlas para que sea más general, pero los pares no dan […].»* En esta fase se le dio tiempo suficiente para que justificara con detalle la solución; en las figuras 5 y 6 se aprecia un cambio en el lenguaje y la técnica utilizada.

En este momento expresa sus argumentaciones mediante frases completas y con casos genéricos expresados mediante fórmulas, dejando atrás el uso de símbolos no explicados o la referencia a ejemplos particulares.

En el apartado b), además de ciertos errores algebraicos, se puede observar que para los casos 1 y 3, Nancy no tiene en cuenta el papel condicional de la hipótesis, es decir, que tiene que partir de números cuyo producto sea impar, o bien tener en cuenta que una implicación, *P→Q,* es verdadera cuando *P* es falsa sin importar el valor de verdad de *Q.* Sin embargo en el momento anterior había realizado una tabla de verdad de la implicación correcta lo que nos lleva a concluir que no establece conexiones entre el razonamiento lógico utilizado para establecer la verdad de la implicación y su correspondiente tabla.


a)

Caso 1 2 Pares.
$2x+2y=2(x+y)$ $(2x)(2y)=4xy$

Caso 2 2 Impares
$2x+1+2y+1=2x+2y+2 = 2(x+y+1)$ $(2x+1)(2y+1)=4xy+2x+2y+1 = 2(2xy+x+y)+1$

Caso 3 Par Impar.
$2x+2y+1=2(x+y)+1$ $(2x)(2y+1)=2xy+2x = 2(xy+x)$

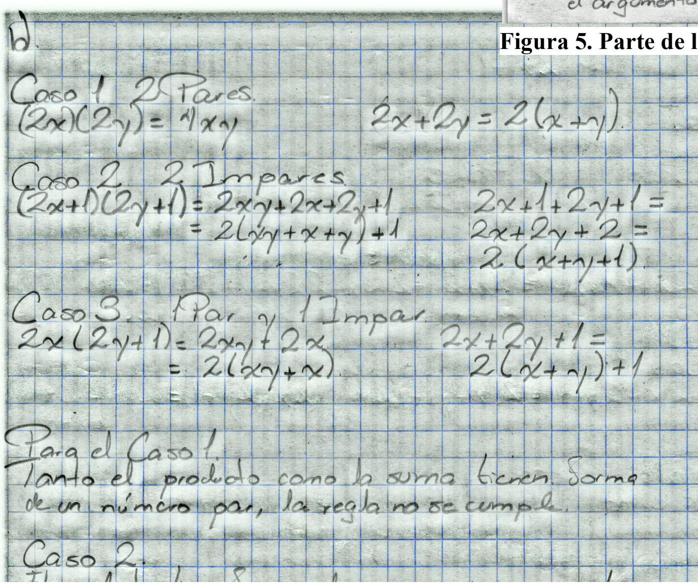
Para el Caso 1,
La suma de los 2 números, el resultado tiene la forma de un número par, pero el producto también tiene la forma de un número par, por lo que en este caso el argumento no se cumple.

Caso 2.
La suma tiene la forma de un número par, y el producto tiene la forma de un número impar, en este caso, la regla se cumple.

Caso 3.
La suma tiene la forma de un número impar y el producto, de un número par, por lo que en este caso, la regla tampoco se cumple.

Si se cumplieran los 3 casos sí sería válido, por lo que el argumento no es válido

Figura 5. Parte de la actuación de Nancy en el tercer momento


b)

Caso 1 2 Pares.
$(2x)(2y)=4xy$ $2x+2y=2(x+y)$

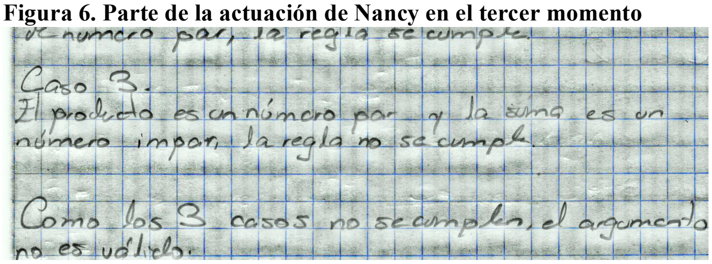
Caso 2 2 Impares
$(2x+1)(2y+1)=2xy+2x+2y+1 = 2(xy+x+y)+1$ $2x+1+2y+1 = 2x+2y+2 = 2(x+y+1)$

Caso 3. 1 Par y 1 Impar
$2x(2y+1)=2xy+2x = 2(xy+x)$ $2x+2y+1 = 2(x+y)+1$

Para el Caso 1.
Tanto el producto como la suma tienen forma de un número par, la regla no se cumple.

Caso 2.

Figura 6. Parte de la actuación de Nancy en el tercer momento


número par, la regla se cumple.

Caso 3.
El producto es un número par y la suma es un número impar, la regla no se cumple.

Como los 3 casos no se cumplen, el argumento no es válido.

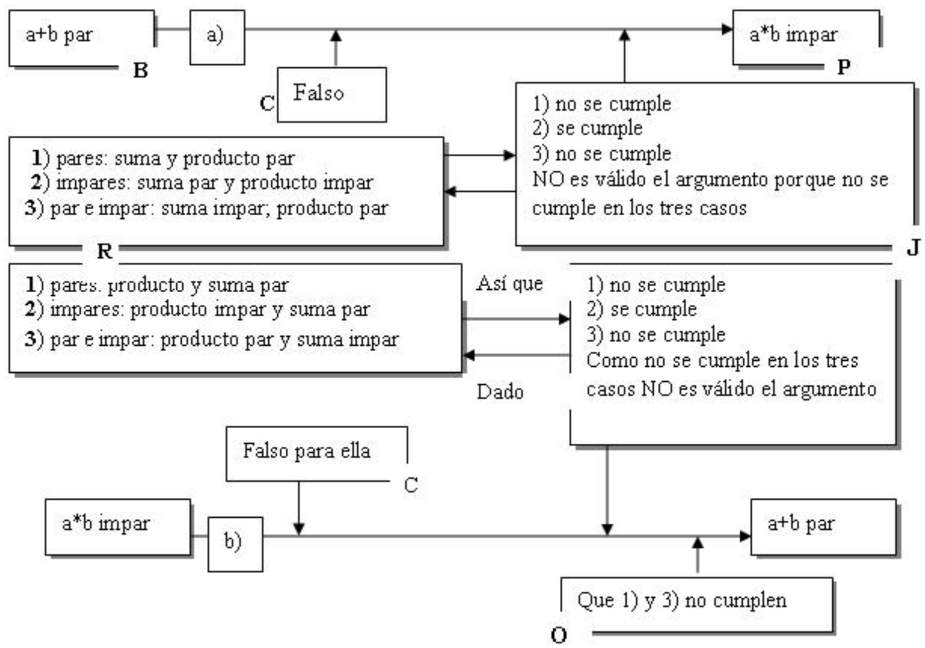


Figura 7. Análisis del tercer momento

En la justificación de que no es válida la primera implicación no reconoce que basta con que falle el caso 1 puesto que cumple ***B*** pero falla en ***P*** y, en la segunda implicación, no reconoce el papel condicional de ***B***, es decir que es suficiente que el caso 2 sea verdadero para que la implicación resulte cierta pues tanto en el caso 1 como en el 3 no cumple con la hipótesis ***B*.** En este tercer momento podemos apreciar que la técnica cambia de casos particulares a casos genéricos y utiliza fórmulas para nombrar, de manera general, a los números pares e impares.

3.2.3.6 Análisis y conclusiones de las producciones

Para finalizar, en la figura 8 se resumen los tres momentos descritos anteriormente para analizar la evolución de las justificaciones utilizadas por Nancy. Las justificaciones ($\mathbf{J_1,J_2,J_3,J_4}$) corresponden al primer momento, ($\mathbf{J_5,J_6}$) al segundo y ($\mathbf{J_7,J_8}$) al tercero. La lectura del gráfico se refiere tanto a la implicación directa como a su recíproca, ($\mathbf{J_1,J_2,J_5,J_7}$) se refieren a la implicación directa y ($\mathbf{J_1,J_3,J_4,J_6, J_8}$) a la recíproca.
Veamos ahora qué justificaciones son correctas, cuáles no lo son, qué imprecisiones comete y, finalmente, daremos una posible explicación de la argumentación utilizada.
En $\mathbf{J_1}$ la justificación es correcta y el manejo de tablas de verdad que Nancy muestra en su actuación es correcto, en particular en relación con la implicación. Esto se aprecia en el primer momento cuando tiene claro que $p \to q$ y $q \to p$ tienen tablas de verdad diferentes y contesta correctamente el primer ítem, sin embargo, parece que para contestar otros ítems, las tablas de verdad pierden sentido y siente la necesidad de realizar comprobaciones con casos particulares.

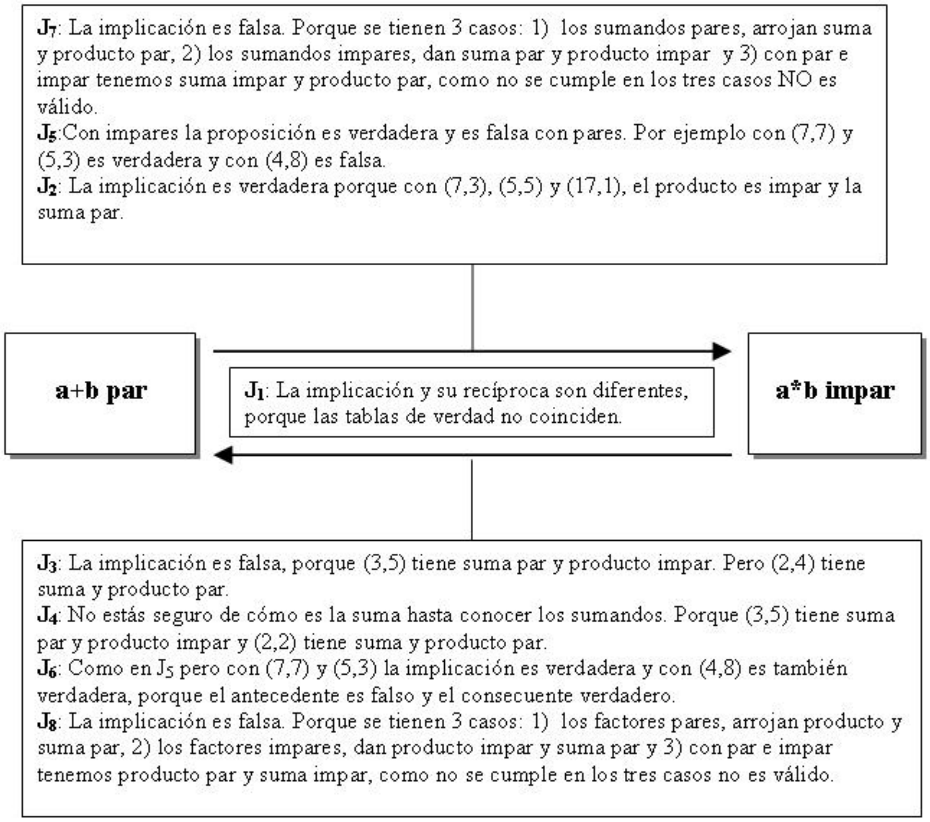


Figura 8. Resumen de los tres momentos

En (**J_3, J_4**) las justificaciones son erróneas y el patrón que utiliza es verificar primero el consecuente y después antecedente con casos particulares, y en **J_2** además no tiene en cuenta la hipótesis de forma similar a la descrita por Hoyles & Küchemann (2002). Podemos decir que se observa en ella *la falacia de afirmación del consecuente*, es decir, si hay que demostrar que $p \rightarrow q$, se utiliza como argumento que de la verdad de *q* se deduce *p*.

Por otra parte en (**J_5, J_6**) las justificaciones dadas son acertadas pero imprecisas, pues en **J_5** no menciona que basta un contraejemplo, en ese caso el (4,8), para determinar la falsedad de la implicación. No hay una comprensión de que, como esa afirmación se está haciendo para todos los pares de números enteros que cumplan que su suma es par, y tal afirmación es universal, un solo contraejemplo servirá para mostrar la falsedad del enunciado. En otras palabras, Nancy debería tener conocimiento de que la negación de una declaración universal es existencial. Sin embargo, para ella, la existencia de un grupo de excepciones no determina la falsedad o verdad de una implicación. Otra imprecisión en **J_6** es determinar la verdad de la recíproca basándose en casos particulares. Tanto en (**J_5, J_6**) como en **J_1** las tablas de verdad cumplen un papel crucial.

En cuanto a la verificación por medio de la comprobación en casos particulares de las propiedades enunciadas, podemos destacar que si bien en (**J_2, J_3, J_4**) no se pide demostrar y pueden dar una respuesta a partir de verificaciones empíricas, este tipo de justificaciones siguen apareciendo en (**J_5, J_6**) aunque se pida "demostrar", es decir Nancy no es consciente de que la comprobación de las proposiciones para un número finito de casos no bastará para establecer la verdad general. Además, al igual que en otras investigaciones (Healy & Hoyles, 2000; Fishbein & Kedem, 1982 y

Vinner, 1983) ya citadas al principio del capítulo en la revisión de literatura, se comprueba la ausencia del dominio del lenguaje "científico" de los alumnos relacionado con el binomio teorema-demostración, necesitan basar sus comprobaciones en su experiencia, y para ello utilizan ejemplos concretos con los que puedan verificar las propiedades. Sin embargo estas comprobaciones o ejemplos aparentemente aislados, conducen a Nancy a construir ejemplos genéricos en el segundo momento, cuando se inclina ya por pares e impares que la ayudan a una posterior generalización en el tercer momento, en el que piensa en cómo construir todos los casos posibles. Aunque no se concrete la demostración, sí es notable como va enriqueciendo su *espacio de ejemplos* (Watson & Mason, 2005), que presenta una estructura interna idiosincrásica que hace que surjan los ejemplos apropiados para utilizar finalmente en el tercer momento las justificaciones (**J_7, J_8**) .

En relación con estas últimas justificaciones (**J_7, J_8**) se aprecia un avance significativo en el uso de lenguaje puesto que usa el análisis por medio de casos genéricos y hay una ausencia del recurso a casos particulares. Aquí considera números pares e impares genéricos; así escribe los pares como $2x$ y los impares como $2x+1$. A partir de esto, forma todas las parejas posibles considerando las combinaciones de números pares/impares para después operar en cada caso y observar los resultados. El avance percibido es quizás atribuible a que en la entrevista se le solicita que explique sus respuestas para convencer a quién la entrevista, estableciendo con esto, de manera implícita, normas sociomatemáticas (Yackel & Cobb, 1996) entre las dos partes que la conducen a incorporar nuevos elementos que resulten "convincentes".

No obstante, aunque en **J_7** da una respuesta correcta, su justificación es imprecisa, pues no tiene en cuenta que el caso 3 no interesa por no cumplir con la hipótesis de partida. Esta misma imprecisión se aprecia en **J_8** que, en este caso, además, es incorrecta. En el diagrama correspondiente podemos ver que Nancy no comprende que la afirmación se hace sobre cada par de enteros cuyo producto sea par, es decir, ignora el papel condicional de la hipótesis y su razonamiento se basa en que, al no cumplirse que el producto sea par en el caso (1,3), el argumento *Si el producto de dos números es par entonces su suma es impar* no es válido. En este caso no se está dando cuenta que únicamente nos interesa el caso 2 que sí cumple la hipótesis.

En cuanto a los respaldos **R** en los que Nancy sustenta las justificaciones vale la pena mencionar que son básicamente: ejemplos particulares, ejemplos genéricos y tablas de verdad. Y respecto a las objeciones **O** para que se cumplan los enunciados, sólo se utilizan durante el segundo y tercer momento siendo ejemplos genéricos: números pares en el segundo momento y productos pares en el apartado b) del tercer momento. Sin embargo, las objeciones las pone pensando en que, en el segundo momento, no se verifica en el apartado a) el consecuente y en el apartado b) el antecedente y en el tercer momento de igual manera en el apartado b) que no se verifica el antecedente. Lo anterior nos hace nuevamente pensar que no admite el papel condicional de la hipótesis lo que viene a confirmar que una de las dificultades observadas en los alumnos es el mal uso de las implicaciones matemáticas por la confusión entre hipótesis y conclusión (Dorier et al., 2000; Ibañes & Ortega, 2002). En cuanto a esto, Harel (2006) considera que esta dificultad se debe principalmente a que los estudiantes se precipitan y se centran en el contenido y no lo distinguen del estado que pareciera trivial.

3.2.4 Explorando en el Grupo B

En este grupo son estudiantes de tercer semestre en la clase de Álgebra Lineal concretamente fueron cuatro estudiantes con edad promedio de 20 años. Observamos algunas clases. El esquema general de la clase es de carácter expositivo: el profesor presenta las definiciones base, algunos

ejemplos, operaciones definidas, ejercicios operativos con matrices, resultados derivados como proposiciones, teoremas y lemas acompañados con su demostración y ejercicios de práctica para los alumnos. Durante la clase continuamente pide a los estudiantes que salgan al pizarrón a realizar ejercicios que en su mayoría envuelven cálculos. En el último examen parcial de los estudiantes se les pidió que realizaran 5 ejercicios y que en cada uno de ellos justificaran sus respuestas tratando de ser lo más claro posible. Además el profesor enfatizó que las respuestas que no estuvieran justificadas, aunque tuvieran un resultado correcto, se tomarían como errónea puesto que los estudiantes suelen preguntar a los compañeros el resultado en los ejercicios que envuelven operaciones.
El primer ejercicio incluía tareas de demostración y se puso a propósito al principio para que iniciaran con esta tarea. Para nuestra sorpresa el ejercicio no fue resuelto por ningún estudiante. Más aún, ningún estudiante presentó intento alguno, aún y cuando eran capaces de parafrasear la definición de transformación lineal.

1.- Demuestre si las siguientes funciones son o no son transformaciones lineales:

- *i)* *F de R^2 a R^2 definida por $F(x,y) = (ax + by, cx + dy)$ donde a,b,c y d son reales.*
- *ii)* *F de $M_n(R)$ a $M_n(R)$ definida por $F(A) = M + A$ donde M es una matriz arbitraria de $M_n(R)$.*

Los ejercicios 2, 3 y 4 fueron resueltos por los cuatro alumnos con pocos errores de cálculo.

2.- Encontrar la ecuación de la reflexión de la recta $3x – 2y + 5 = 0$ con respecto a la recta $y = -3x$.
3.- Sea $V = R^3$, U el espacio generado por el vector (-3,4,-5), W el espacio generado por los vectores (1,-2,4) y (-5,-1,3).

- *a) Escriba si es posible el vector (6,-4,2) como la suma de un vector del subespacio U más un vector del subespacio W.*
- *b) Es V la suma directa de U y W.*

4.- Sean V un espacio vectorial ; u y v una base de V; sabiendo que:
$u' = 6u + 3v$, $v' = 7u + 2v$ y que (5,-9) el vector de coordenadas de un vector v de V con respecto a la base u y v. Encuentre el vector de coordenadas del mismo vector v con respecto a la base u' y v'.

Finalmente el ejercicio 5 fue resuelto sólo por dos de los cuatro estudiantes.

5.- Sea U el espacio generado por (2,-1,3,5,-4), (4,6,-2,1,-5) y sea W el espacio generado por (3,7,0,-2,1), (1,-4,2,1,0). Encuentre las condiciones que debe de satisfacer un vector de R^5 para que que pertenezca al subespacio vectorial U + W

3.2.5 Explorando en el Grupo C

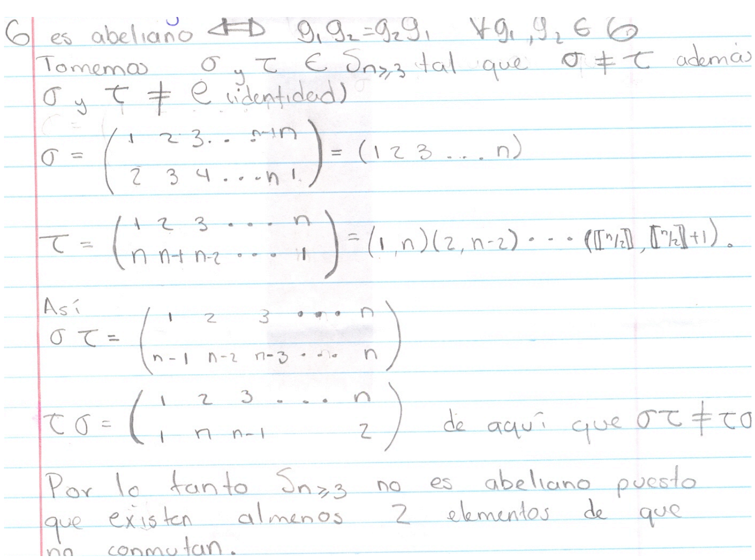
Esta exploración se llevó a cabo en el quinto semestre de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas en la clase de Álgebra Moderna con seis alumnos de edad promedio 21 años. Casi al final del semestre en el último examen parcial el profesor diseñó cinco reactivos, que como veremos enseguida todos involucraban tareas de demostrar. También se les incluyeron en el examen dos preguntas en relación con aspectos generales sobre el curso y las dificultades enfrentadas. El examen como instrucción adicional proponía: ”Si en alguno de los ejercicios anteriores no concluye la solución. Defina y/o proporcione un ejemplo de los conceptos que intervienen en ellos" y además se incluía la nota con la notación utilizada: **(1, 2, 3, …, k)** es la notación cíclica para la permutación que envía **1** al **2**, **2** al **3**, ..., **k** al **1**, y los demás elementos del conjunto los deja fijos. También, que $\mathbf{S_A}=\{\sigma|\sigma\text{: } \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} \text{ es biyección}\}$

A continuación presentamos las soluciones de los estudiantes y un pequeño análisis. A cada estudiante lo identificaremos como **E19**, **E20**, **E21**, **E22**, **E23** y **E24**.
A continuación presentamos un concentrado de las respuestas de los estudiantes, incluyendo los elementos necesarios para abordar cada uno de los problemas, indicando cuales fueron cubiertos por los estudiantes y finalmente aparece sombreado el estudiante que lo consigue. Los estudiantes que no ofrecen respuesta no se incluyen.

<u>Ejercicio 1:</u> *Demuestre que $\boldsymbol{S_n}$ no es un grupo abeliano para $\boldsymbol{n\geq 3}$. ($\boldsymbol{S_n}$ es el grupo simétrico sobre un conjunto finito de **n** elementos)*
Este ejercicio requería de la comprensión y manejo de la definición de grupo abeliano (D-GA), estructura del enunciado (EE/ hipótesis, conclusión y forma en que se presente, en este caso probar que no se satisface la propiedad), conocimiento de la técnica de prueba (TP-C exhibir un contraejemplo apropiado), manejo de notación y lenguaje (N, notación de funciones, matrices de permutaciones y ciclos), conocimiento y manejo de la operación (O-composición de funciones o multiplicación de permutaciones).

E19	**E20**	**E21**	**E22**	**E23**	**E24**
D-GA	D-GA		D-GA	D-GA	D-GA
EE	EE		EE	EE	EE
TP-C	TP-C		TP-C	TP-C	TP-C
N-permutación y ciclos	N-funciones	N-permutación	N-permutación	N-permutación	N-permutación
O	O	O	O	O	O

Las respuestas de los estudiantes se organizan y analizan enseguida.


G es abeliano $\Leftrightarrow$ $g_1g_2=g_2g_1 \quad \forall g_1,g_2 \in G$
Tomemos σ y $\tau \in S_{n\geq 3}$ tal que $\sigma \neq \tau$ además σ y $\tau \neq e$ (identidad)

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \end{pmatrix} = (1\ 2\ 3\ \ldots\ n)$$

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ n & n-1 & n-2 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = (1,n)(2,n-2)\cdots([\![n/2]\!],[\![n/2]\!]+1).$$

Así

$$\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

$$\tau\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & n & n-1 & & 2 \end{pmatrix} \text{ de aquí que } \sigma\tau \neq \tau\sigma$$

Por lo tanto $S_{n\geq 3}$ no es abeliano puesto que existen almenos 2 elementos de que no conmutan.

Figura 9. Respuesta de E19 al ejercicio 1.

E19 En este ejercicio usa la notación de permutaciones y también la notación cíclica. Primero enuncia la definición de grupo abeliano, identifica los objetos de S_n, dando por hecho que es un grupo y descarta la identidad. Luego propone dos elementos de S_n y opera con ellos tomando en cuenta la operación definida. Luego opera pero en orden contrario y verifica que los resultados son distintos y por tanto no conmutan. Así con este

Contraejemplo: En la primera permutación manda el primer elemento, al segundo, el segundo al tercero, etc y en la segunda permutación manda el primer elemento al último, el segundo al penúltimo, etc

contraejemplo justifica que no es grupo abeliano, porque existen al menos dos elementos que no satisfacen la propiedad conmutativa.

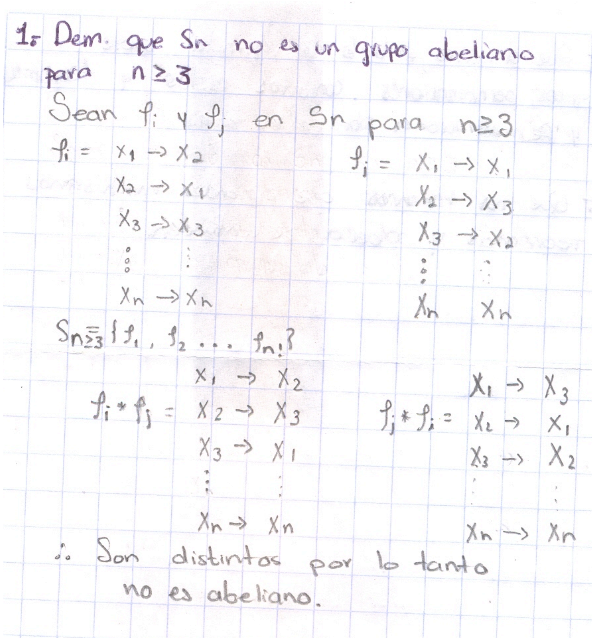


Figura 10. Respuesta de E20 al ejercicio 1.

E20 Usa la notación de funciones, que es la primera notación con la que empiezan los estudiantes y después pasan a la notación de permutaciones y después a la cíclica.

El contraejemplo que ella propone es para la primera función, envía el primer elemento al segundo y el segundo al primero, dejando fijos los demás elementos. En la segunda ahora deja fijo el primer elemento y sólo mueve el segundo y tercero, al segundo lo manda al tercero y viceversa, con todos los demás fijos.

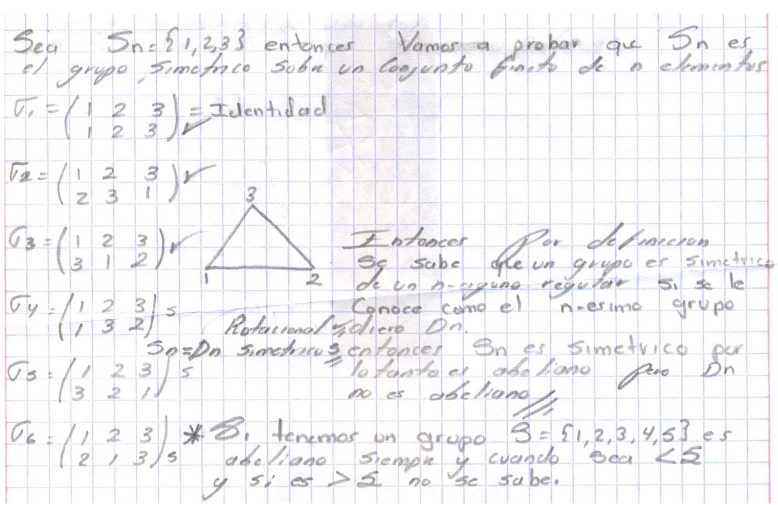


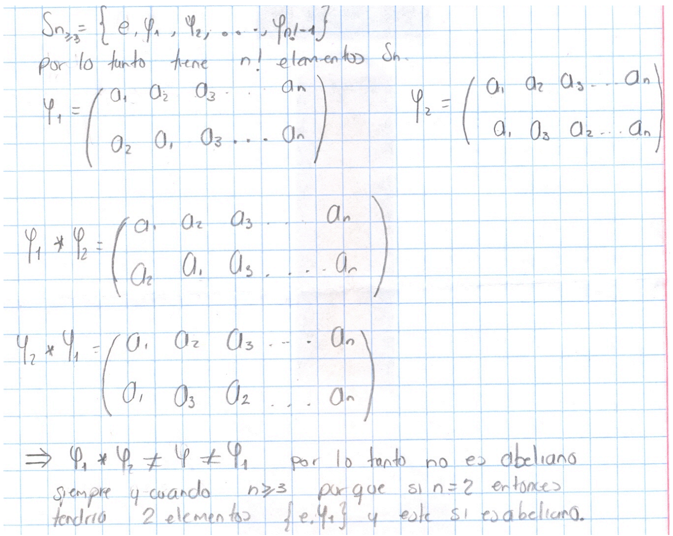
Figura 11. Respuesta de E21 al ejercicio 1.

E21 El alumno no distingue cuál es la parte que debe demostrar y toma parte de la hipótesis (S_n es el grupo simétrico sobre un conjunto finito de n elementos) para demostrarla. También encontramos que aunque la proposición condiciona a que $n \geq 3$. El toma $n=3$ e intenta demostrar (la hipótesis) que S_n es grupo a partir de un ejemplo S_3. El conoce que debe tener cardinalidad n! y por eso busca 6 elementos.

Luego propone la identidad σ_1 y para un elemento particular σ_2 encuentra su inverso σ_3 y al parecer eso es suficiente para él y con eso verifica que es grupo (indica con ✓).

En este ejercicio encontramos tres errores centrales: 1) No hay un reconocimiento de la hipótesis y la

conclusión de la proposición y en consecuencia, se enfoca a demostrar la hipótesis. 2) Para probar que S_3 es grupo, utiliza de manera errónea la definición, ya que debería probar que cada elemento posee un inverso y únicamente le basta un par de elementos para ello, también omite probar que se satisface la propiedad asociativa bajo la operación de permutaciones y 3) Ejemplos particulares constituyen para él una demostración de hechos generales.
Además de lo anterior observamos que utiliza algunos hechos vistos en clase de manera errónea y a partir de eso "establece" que es abeliano si $n<5$.



$S_{n \geq 3} = \{e, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n!-1}\}$
por lo tanto tiene $n!$ elementos S_n.

$\varphi_1 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n \\ a_2 & a_1 & a_3 & \ldots & a_n \end{pmatrix}$ $\varphi_2 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n \\ a_1 & a_3 & a_2 & \ldots & a_n \end{pmatrix}$

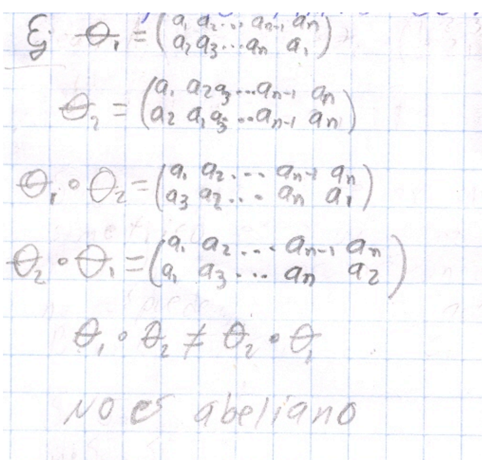
$\varphi_1 * \varphi_2 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n \\ a_2 & a_1 & a_3 & \ldots & a_n \end{pmatrix}$

$\varphi_2 * \varphi_1 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n \\ a_1 & a_3 & a_2 & \ldots & a_n \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \varphi_1 * \varphi_2 \neq \varphi \neq \varphi_1$ por lo tanto no es abeliano siempre y cuando $n \geq 3$ porque si $n=2$ entonces tendría 2 elementos $\{e, \varphi_1\}$ y este sí es abeliano.

Figura 12. Respuesta de E22 al ejercicio 1.

E22 Exhibe el mismo contraejemplo que la alumna E2, aunque a diferencia de ella no usa la notación de funciones, usa la de permutaciones y muestra al inicio conocimiento de S_n. Finalmente comenta acertadamente que para el caso ***n=2*** sí resulta abeliano.



Ej. $\theta_1 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-1} & a_n \\ a_2 & a_3 & \ldots & a_n & a_1 \end{pmatrix}$

$\theta_2 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_{n-1} & a_n \\ a_2 & a_1 & a_3 & \ldots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$

$\theta_1 \circ \theta_2 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-1} & a_n \\ a_3 & a_2 & \ldots & a_n & a_1 \end{pmatrix}$

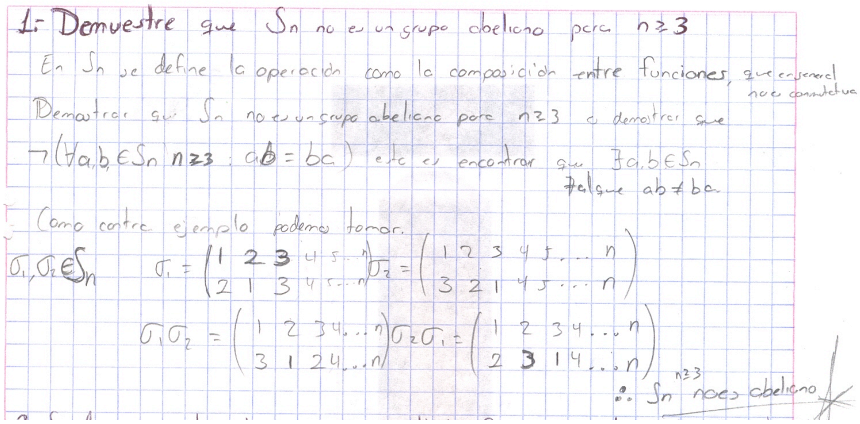
$\theta_2 \circ \theta_1 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & a_3 & \ldots & a_n & a_2 \end{pmatrix}$

$\theta_1 \circ \theta_2 \neq \theta_2 \circ \theta_1$

No es abeliano

Figura 13. Respuesta de E23 al ejercicio 1.

E23 El estudiante sin mayor explicación exhibe el contraejemplo adecuado que muestra que bajo la operación definida para las permutaciones, al operar dos de ellas no se cumple la propiedad conmutativa.


1: Demuestre que S_n no es un grupo abeliano para $n \geq 3$

En S_n se define la operación como la composición entre funciones, que en general no es conmutativa

Demostrar que S_n no es un grupo abeliano para $n \geq 3$ es demostrar que $\neg(\forall a,b \in S_n\ n \geq 3 : ab = ba)$ esto es encontrar que $\exists a,b \in S_n$ tal que $ab \neq ba$

Como contra ejemplo podemos tomar.

$\sigma_1, \sigma_2 \in S_n$ $\quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & n \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 & \dots & n \end{pmatrix}$ $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & n \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 5 & \dots & n \end{pmatrix}$

$\sigma_1\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 3 & 1 & 2 & 4 & \dots & n \end{pmatrix}$ $\sigma_2\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 2 & 3 & 1 & 4 & \dots & n \end{pmatrix}$

$\therefore S_n^{\,n\geq 3}$ no es abeliano

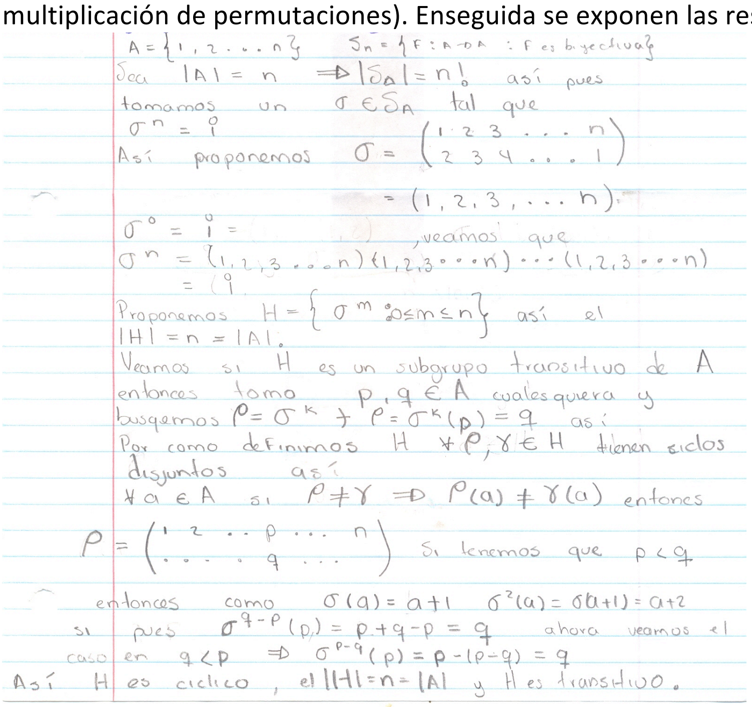
Figura 14. Respuesta de E24 al ejercicio 1.

E24 Este alumno muestra un excelente manejo de las definiciones, del lenguaje, de las conexiones de la operación de permutaciones y de funciones así como de la técnica para demostrar y exhibe el contraejemplo adecuado.

<u>Ejercicio 2</u>: *Si* ***A*** *es un conjunto entonces un subgrupo* ***H*** *de* $\boldsymbol{S_A}$ *se dice transitivo sobre* ***A*** *si para cada* ***a, b∈ A*** *existe* ***σ∈H*** *tal que* ***σ(a) = b*** *. Demuestre que si* ***A*** *es un conjunto finito no vacío, entonces existe un subgrupo cíclico finito* ***H*** *de* $\boldsymbol{S_A}$ *con* ***|H|= |A|*** *que es transitivo sobre* ***A*** *.*

Este ejercicio requería de la comprensión y manejo de la definición de subgrupo transitivo sobre un conjunto (D-ST), subgrupo cíclico (D-SC), estructura del enunciado (EE/ hipótesis, conclusión y forma en que se presente, en este caso probar existencia de un grupo), conocimiento de la técnica de prueba (TP-E proponer un candidato y probar que cumple con las condiciones requeridas), manejo de notación y lenguaje (N, notación de funciones, matrices de permutaciones y ciclos), conocimiento y manejo de la operación (O-composición de funciones o multiplicación de permutaciones). Enseguida se exponen las respuestas de los estudiantes.

E19	**E21**	**E24**
D-ST/D-SC EE TP-E N-permutación y ciclos O	D-ST(manejo parcial)	D-ST/D-SC EE TP-E N-ciclos O


$A = \{1, 2 \dots n\}$ $\quad S_n = \{f : A \to A : f \text{ es biyectiva}\}$

Sea $|A| = n \Rightarrow |S_A| = n!$ así pues tomamos un $\sigma \in S_A$ tal que $\sigma^n = i$

Así proponemos $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & 1 \end{pmatrix} = (1, 2, 3, \dots n)$.

$\sigma^0 = i$ = , veamos que

$\sigma^n = (1,2,3 \dots n)(1,2,3 \dots n) \cdots (1,2,3 \dots n) = i$

Proponemos $H = \{\sigma^m : 0 \leq m \leq n\}$ así el $|H| = n = |A|$.

Veamos si H es un subgrupo transitivo de A entonces tomo $p, q \in A$ cualesquiera y busquemos $\rho = \sigma^k \ni \rho = \sigma^k(p) = q$ así

Por como definimos H $\forall \rho, \gamma \in H$ tienen ciclos disjuntos así $\forall a \in A$ si $\rho \neq \gamma \Rightarrow \rho(a) \neq \gamma(a)$ entonces

$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & p & \dots & n \\ \cdot & \cdot & \cdot & q & \dots & \end{pmatrix}$ Si tenemos que $p < q$

entonces como $\sigma(a) = a+1$ $\sigma^2(a) = \sigma(a+1) = a+2$

si pues $\sigma^{q-p}(p) = p+q-p = q$ ahora veamos el caso en $q < p \Rightarrow \sigma^{p-q}(p) = p-(p-q) = q$

Así H es cíclico, el $|H| = n = |A|$ y H es transitivo.

Figura 15. Respuesta de E19 al ejercicio 2.

E19
Muestra una demostración correcta, con detalle de cómo la va generando.

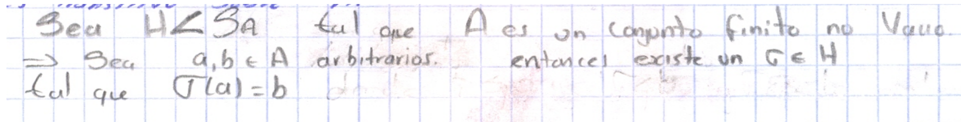

Sea $H < S_A$ tal que A es un conjunto finito no Vacío.
$\Rightarrow$ Sea $a, b \in A$ arbitrarios. entonces existe un $\sigma \in H$
tal que $\sigma(a) = b$

Figura 16. Respuesta de E21 al ejercicio 2.

E21 En este ejercicio, el alumno nuevamente muestra que no distingue la hipótesis y la parte a demostrar. No avanza más en la demostración.

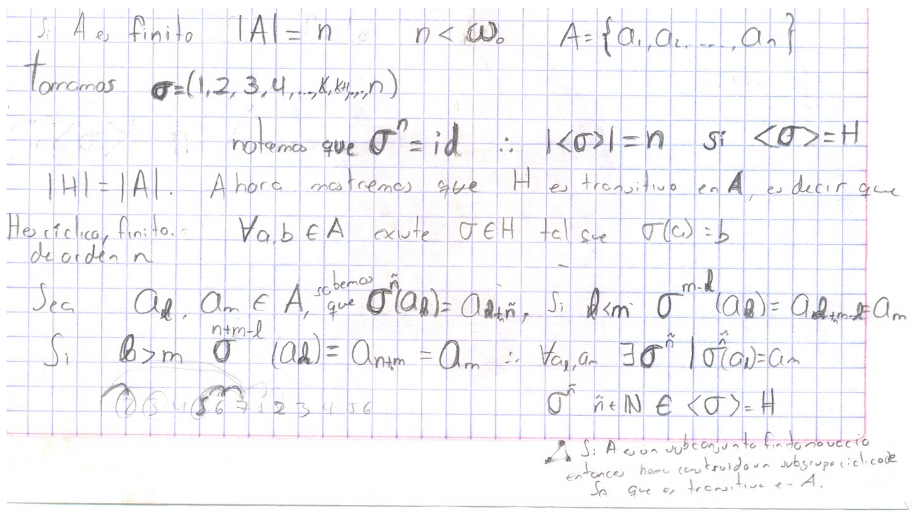

Si A es finito $|A| = n$ $n < \omega_0$ $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$
tomamos $\sigma = (1,2,3,4,\dots,k,k+1,\dots,n)$
notemos que $\sigma^n = id$ $\therefore$ $|\langle\sigma\rangle| = n$ si $\langle\sigma\rangle = H$
$|H| = |A|$. Ahora mostremos que H es transitivo en A, es decir que
H es cíclico, finito. de orden n
$\forall a, b \in A$ existe $\sigma \in H$ tal que $\sigma(a) = b$
Sea $a_l, a_m \in A$, sabemos que $\sigma^{\tilde{n}}(a_l) = a_{l+\tilde{n}}$, Si $l < m$ $\sigma^{m-l}(a_l) = a_{l+m-l} = a_m$
Si $l > m$ $\sigma^{n+m-l}(a_l) = a_{n+m} = a_m$ $\therefore$ $\forall a_l, a_m$ $\exists \sigma^{\tilde{n}} \mid \sigma^{\tilde{n}}(a_l) = a_m$
$\sigma^{\tilde{n}}$ $\tilde{n} \in \mathbb{N}$ $\in \langle\sigma\rangle = H$
Si A es un subconjunto finito no vacío entonces hemos construido un subgrupo cíclico de S_A que es transitivo en A.

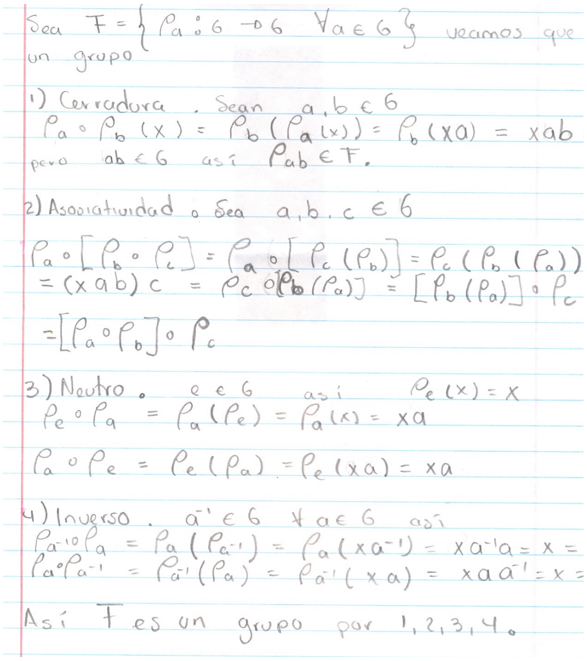
Figura 17. Respuesta de E24 al ejercicio 2.

E24
Este alumno a diferencia de **E19** muestra una versión condensada de su demostración, omitiendo los detalles y en una manera más cercana a la forma en que los matemáticos comunican sus resultados.

Ejercicio 3: *Sea **G** un grupo. Probar que las permutaciones $\rho_a : G \to G$, donde $\rho_a(x) = xa$ para **a** $\in$ **G** y **x** $\in$ **G**, forman un grupo isomorfo a **G**.*

Este ejercicio requería de la comprensión y manejo de la definición de grupo isomorfo (D-GI), estructura del enunciado (EE/ hipótesis, conclusión y forma en que se presente, en este caso verificar características de la definición), conocimiento de la técnica de prueba (TP-VP verificar que se cumplan las propiedades de la definición), manejo de notación y lenguaje (NL), conocimiento y manejo de la operación (O-composición de funciones o multiplicación de permutaciones).

E19	E21	E24
D-GI EE TP-VP NL O	D-GI(manejo parcial)	D-GI EE TP-E NL O



Sea $F=\{\rho_a: G\to G \ \forall a\in G\}$ veamos que un grupo

1) Cerradura. Sean $a,b\in G$
$\rho_a\circ\rho_b(x)=\rho_b(\rho_a(x))=\rho_b(xa)=xab$
pero $ab\in G$ así $\rho_{ab}\in F$.

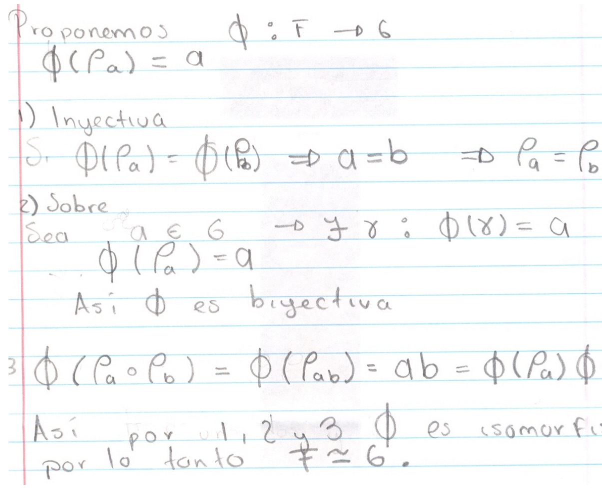
2) Asociatividad. Sea $a,b,c\in G$
$\rho_a\circ[\rho_b\circ\rho_c]=\rho_a\circ[\rho_c(\rho_b)]=\rho_c(\rho_b(\rho_a))$
$=(xab)c=\rho_c\circ[\rho_b(\rho_a)]=[\rho_b(\rho_a)]\circ\rho_c$
$=[\rho_a\circ\rho_b]\circ\rho_c$

3) Neutro. $e\in G$ así $\rho_e(x)=x$
$\rho_e\circ\rho_a=\rho_a(\rho_e)=\rho_a(x)=xa$
$\rho_a\circ\rho_e=\rho_e(\rho_a)=\rho_e(xa)=xa$

4) Inverso. $a^{-1}\in G$ $\forall a\in G$ así
$\rho_{a^{-1}}\circ\rho_a=\rho_a(\rho_{a^{-1}})=\rho_a(xa^{-1})=xa^{-1}a=x=$
$\rho_a\circ\rho_{a^{-1}}=\rho_{a^{-1}}(\rho_a)=\rho_{a^{-1}}(xa)=xaa^{-1}=x=$

Así F es un grupo por 1, 2, 3, 4.

Figura 18. Respuesta de E19 y E24 al ejercicio 3 parte1.



Proponemos $\phi: F\to G$
$\phi(\rho_a)=a$

1) Inyectiva
Si $\phi(\rho_a)=\phi(\rho_b)\Rightarrow a=b\Rightarrow \rho_a=\rho_b$

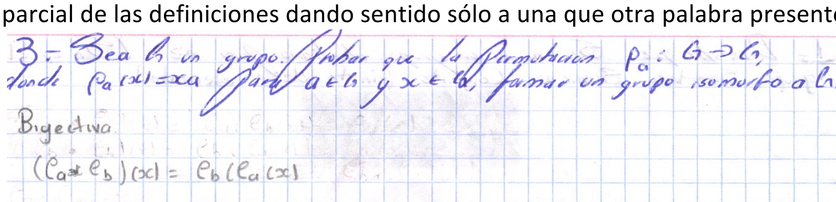
2) Sobre
Sea $a\in G\to\exists\,\gamma:\phi(\gamma)=a$
$\phi(\rho_a)=a$
Así ϕ es biyectiva

3) $\phi(\rho_a\circ\rho_b)=\phi(\rho_{ab})=ab=\phi(\rho_a)\phi($

Así por 1, 2 y 3 ϕ es isomorfis
por lo tanto $F\cong G$.

Figura 19. respuestas de E19 y E24 al ejercicio 3 parte 2.

E21 En este ejercicio el estudiante únicamente conecta la palabra isomorfo con la necesidad de que la función sea biyectiva. Como lo hemos visto en los anteriores ejercicios, el estudiante muestra un manejo parcial de las definiciones dando sentido sólo a una que otra palabra presente.



3.- Sea G un grupo. Probar que la permutación $\rho_a: G\to G$, donde $\rho_a(x)=xa$ para $a\in G$ y $x\in G$, forman un grupo isomorfo a G.
Bigectiva
$(\rho_a * \rho_b)(x)=\rho_b(\rho_a(x)$

Figura 20. Respuesta de E21 al ejercicio 3.

Ejercicio 4: *Demuestre que si σ^2 no es un ciclo entonces σ no es un ciclo de longitud par.*

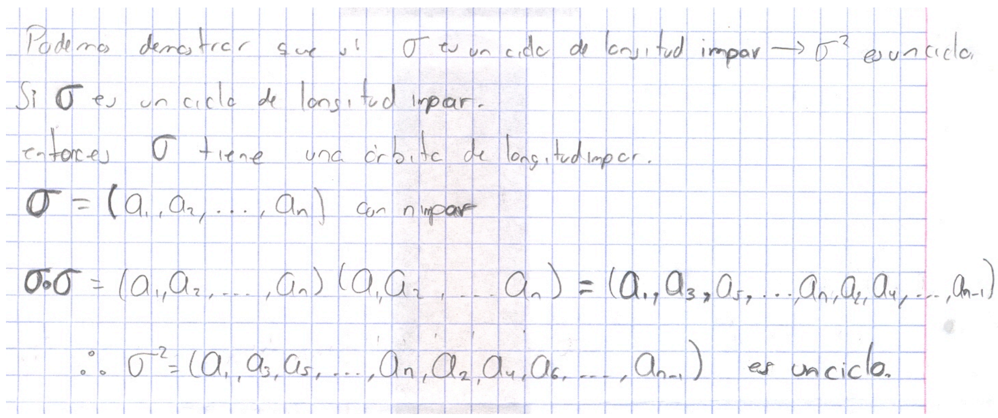
Este ejercicio requería de la comprensión y manejo de la definición de ciclo (D-C), estructura del enunciado (EE/ hipótesis, conclusión y forma en que se presente, en este caso contrapositivo), conocimiento de la técnica de prueba (TP-Contrapositivo comprender la equivalencia de *NO Q implica NO P* y de *P implica Q*), manejo de notación y lenguaje (NL), conocimiento y manejo de la operación (O-ciclos).

Las respuestas de los estudiantes fueron:

E19	E24
D-C	D-GI
EE	EE
TP-Contrapositivo	TP-Contrapositivo
NL	NL
O	O

E19 y E24

Muestran un manejo de la equivalencia de probar una implicación con la de probar su contrapositivo, es decir *P implica Q* y *NO Q implica NO P*. Únicamente como muestra incluimos la respuesta de **E24**.



Podemos demostrar que si σ es un ciclo de longitud impar $\rightarrow \sigma^2$ es un ciclo

Si σ es un ciclo de longitud impar.

entonces σ tiene una órbita de longitud impar.

$\sigma = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ con n impar

$\sigma \circ \sigma = (a_1, a_2, \ldots, a_n)(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (a_1, a_3, a_5, \ldots, a_n, a_2, a_4, \ldots, a_{n-1})$

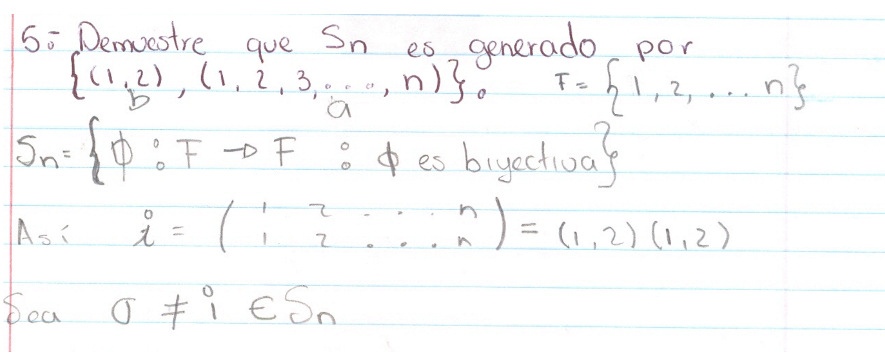
$\therefore \sigma^2 = (a_1, a_3, a_5, \ldots, a_n, a_2, a_4, a_6, \ldots, a_{n-1})$ es un ciclo.

Figura 21. Respuesta de E19 y E24 al ejercicio 4

<u>Ejercicio 5</u>: *Demuestre que* S_n *es generado por* $\{(1, 2)(1, 2, 3, \ldots, n)\}$

Este ejercicio requería de la comprensión y manejo de la definición de elemento generador (D-G), estructura del enunciado (EE/ hipótesis, conclusión y forma en que se presente, verificar la definición), conocimiento de la técnica de prueba (TP-encontrar regularidades), manejo de notación y lenguaje (NL), conocimiento y manejo de la operación (O-ciclos).

E19	E24
D-G	D-G
EE	EE
	TP-regularidades desde problemas más fáciles-generalizar
NL	NL
O	O



5: Demuestre que S_n es generado por $\{\underset{b}{(1,2)}, (1,2,3,\underset{a}{\ldots},n)\}$. $F = \{1, 2, \ldots n\}$

$S_n = \{\phi : F \rightarrow F : \phi \text{ es biyectiva}\}$

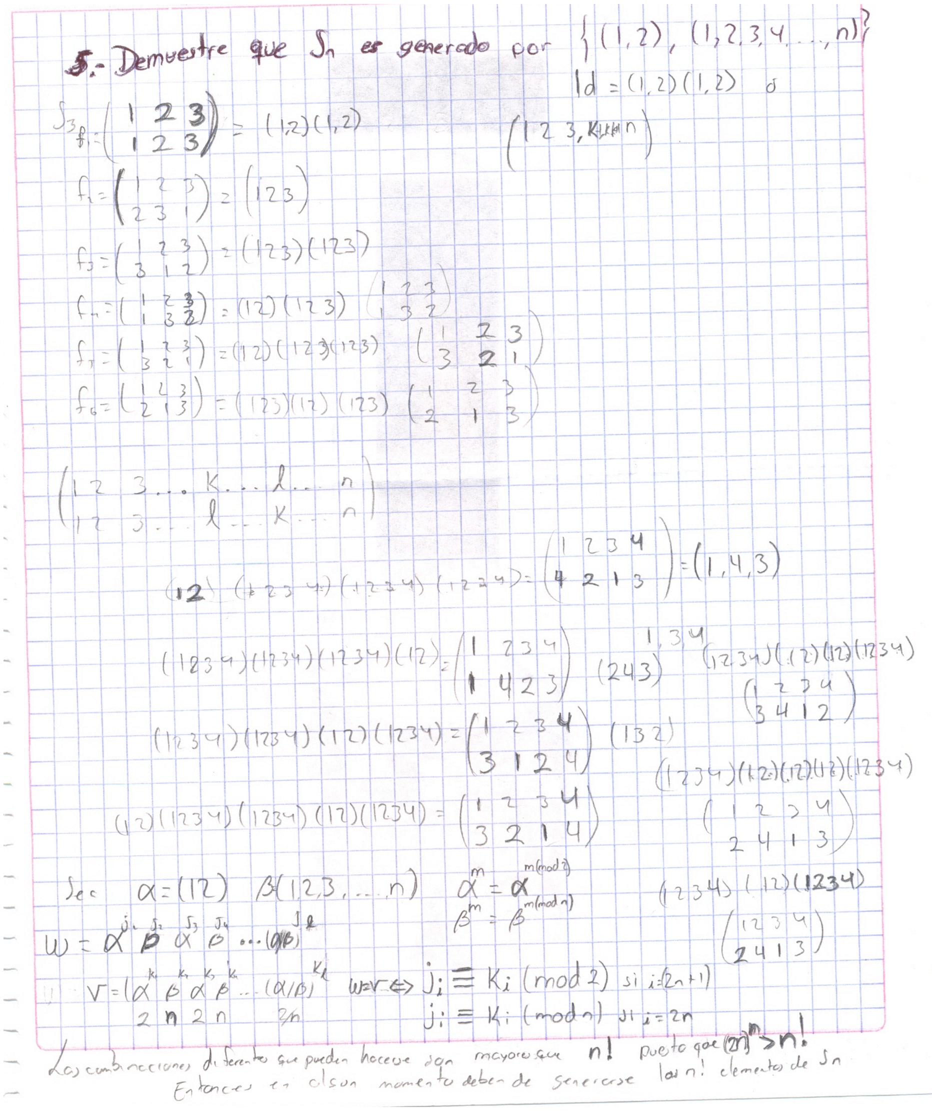
Así $i = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{pmatrix} = (1,2)(1,2)$

Sea $\sigma \neq i \in S_n$

Figura 22. Respuesta de E19 al ejercicio 5.

E19 Este ejercicio la alumna no lo terminó en el tiempo en que le fue solicitado su examen.

E24 En este ejercicio podemos notar, en la figura siguiente, que el alumno inicia explorando casos particulares (S_3 y S_4) con la intención de encontrar los ciclos generadores y de ahí extraer información, encontrando alguna regularidad. Esto podría verse como seguir la estrategia de convertir el problema a un problema más sencillo y de ahí extenderse a S_n.



5.- Demuestre que S_n es generado por $\{(1,2),(1,2,3,4,\ldots,n)\}$

$Id = (1,2)(1,2)$

$\alpha = (12)$ $\beta = (1\,2\,3,\ldots,n)$ $\alpha^m = \alpha^{m \pmod 2}$ $\beta^m = \beta^{m \pmod n}$

$j_i \equiv k_i \pmod 2$ si $i = 2n+1$

$j_i \equiv k_i \pmod n$ si $i = 2n$

Las combinaciones diferentes que pueden hacerse son mayores que $n!$ puesto que $(2n)^m > n!$

Entonces en algún momento deben de generarse los $n!$ elementos de S_n

Figura 23. Respuesta de E24 al ejercicio 5.

Finalmente se les hacen dos preguntas y sus respuestas son:

6. Qué le dirías a un estudiante que va a ingresar al semestre que cursas para describir en que consiste el estudio del álgebra moderna ¿y acerca de su importancia y utilidad?

Tabla 11. Respuestas/Análisis de los estudiantes a la pregunta 6

E19: Creo que es el área de las matemáticas que nos sirve para clasificar la mayoría de los objetos matemáticos. **E20** Rosa Elena: Que el curso se trata de aprender sobre grupos, permutaciones, conjuntos, ciclos y teoremas y demostraciones sobre estos temas. **E21** Elías: [No responde] **E22** Fátima: Consiste en estudiar grupos, como saber si son cíclicos, sus definiciones y lo que contiene cada uno de ellos. **E23** Marco: Que no se base sólo a lo que ve en clase y busque respuestas a sus dudas con el profesor o en un libro que trate del tema. Además que mantenga la mente	En estas respuestas podemos extraer de **E20** y **E22** que las estudiantes más que describir en que consiste el estudio del área, únicamente se centran en describir la clase de álgebra moderna en el sentido estricto en el que se dictó haciendo referencia a los temas, a sus definiciones, teoremas y demostraciones. En las respuestas de los alumnos **E19** y **E24** se puede ver que de manera general entienden el quehacer de esta área y su utilidad. Las palabras utilizadas muestran

abierta para captar mejor la enseñanza. **E24** Ricardo: Le diría que el estudio del álgebra moderna comprende diversas estructuras algebraicas, grupos, anillos, campos, por mencionar algunas y las relaciones que se cumplen entre ellas. Como se pueden caracterizar, reconocer, identificar. Y como otras estructuras y ramas de las matemáticas pueden relacionarse con las estructuras algebraicas.	su comprensión acerca del álgebra moderna: clasificar, caracterizar, reconocer, identificar objetos matemáticos de acuerdo a su estructura algebraica y estudiar sus relaciones. Finalmente **E21** no contesta y **E23** expresa su experiencia personal mencionando que no es suficiente lo que ve en clase para comprender.

7. En tu opinión, ¿cuáles son las principales dificultades en el aprendizaje del álgebra moderna?

Tabla 12. Respuestas/Análisis de los estudiantes a la pregunta 7

E19 Creo que a algunos nos cuesta al principio trabajo lo abstracto. **E20** Que nos tenemos que aprender muchísimos teoremas y a veces se confunden. **E21** [No responde] **E22** Una de las dificultades más grande es el no saber bien las definiciones y saber interpretar los teoremas. **E23** Para llevar a cabo el estudio de esta materia se necesita tiempo suficiente para verlo y analizarlo con calma. **E24** El nivel de abstracción que se requiere y que pueden ser necesarios ejemplos o aterrizar los conceptos abstractos en cosas con las que el estudiante tenga o haya tenido más contacto.	En las respuestas de las alumnas **E20** y **E22** encontramos en común que atribuyen la dificultad a “tener que aprender teoremas y definiciones” que confunden y no saben interpretar. Los alumnos **E19** y **E24** han mostrado un conocimiento estratégico para desenvolverse en el área y en estas respuestas atribuyen las dificultades al nivel de abstracción y sugieren la necesidad de conectar desde lo concreto o desde conocimiento previo que ya dominen. El estudiante **E23** al igual que la respuesta a la pregunta anterior, desde su experiencia considera que es necesario dedicar más tiempo para análisis y comprensión.

Para concluir con el estudio exploratorio del grupo podemos comentar que la instrucción fue de exposición de la clase por parte del profesor en un formato, definición, ejemplos, teoremas y resultados asociados seguidos de la demostración. El profesor deja una lista de ejercicios para trabajo fuera de clase y durante las sesiones pide que resuelvan alguno de ellos ante toda la clase. Durante la observación del examen pudimos apreciar la lucha de los estudiantes y la frustración al no poder abordar los problemas. Pasaron una hora y media para resolver el examen y como pudimos observar de los 6 estudiantes del grupo, 5 de ellos pudieron resolver el primero exhibiendo un contraejemplo adecuado y 1 de ellos muestra un manejo parcial de las definiciones y no distingue la hipótesis y conclusión del enunciado, además de considerar que ejemplos específicos constituyen una demostración. En relación al segundo y tercer ejercicio dos estudiantes lo resuelven correctamente y un estudiante muestra un manejo parcial de las definiciones sin comprender la estructura del enunciado, y el resto, tres estudiantes no exhiben ningún intento. En el ejercicio 2, antes de la proposición, aparece la definición de subgrupo transitivo en un conjunto y al entrevistar a los estudiantes notamos que no era claro si eso lo debían probar. Esto fortalece que es necesario un tratamiento cuidadoso para que los estudiantes puedan comprender qué deben probar y qué suponen cierto. El cuarto ejercicio es resuelto adecuadamente por dos estudiantes y cuatro estudiantes no muestran intentos de abordarlos. Finalmente el último ejercicio lo intentan dos estudiantes y sólo uno consigue demostrarlo.

Es notable que los estudiantes aún y cuando llevan al menos 5 semestres en la carrera únicamente dos muestran el conocimiento estratégico adecuado en matemáticas y tal conocimiento lo han obtenido fuera de las clases formales. Uno de ellos (**E24**: quién resuelve todos los problemas de manera correcta) en entrevista comenta que en el bachillerato él concursó en la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM) y en los cursos de entrenamiento conoció algunas técnicas para demostrar, uso de cuantificadores, notación, escritura y algunos artificios. Después durante la licenciatura ha participado como voluntario para preparar estudiantes de bachillerato en la OMM. Por su parte, la alumna **E19**, comenta que a ella al principio de la licenciatura le costó mucho trabajo la parte abstracta, porque durante el bachillerato era muy buena con la parte operativa, pero al iniciar la licenciatura empezó a trabajar otro tipo de matemáticas. Algo que ella cree que le ha ayudado es que cuando se enfrenta con una nueva definición de algún objeto matemático trata de buscar diferentes ejemplos para tener un conocimiento de los objetos y comprender la definición. Luego busca tener claro lo que debe probar y lo que le dan por hecho. También ella ha participado como voluntaria los entrenamientos en la OMM.
La alumna **E22** comenta que aunque estudia las definiciones, los teoremas y las demostraciones vistas en clase, durante el examen no sabe como interpretar las definiciones para poder usarlas como las está pidiendo el profesor y al final termina mezclando todo y no se siente segura. Ella se siente más segura cuando se trata de hacer operaciones y sacar un resultado.

3.2.6 Análisis a priori y perspectivas para el diseño de la ID

Debido a la ausencia de un curso previo al ingreso a la licenciatura que se enfoque a la formación y desarrollo de competencias en la demostración, a medida que avanzan en sus cursos habituales y por supuesto a medida que se adentran en la formalización de la matemática moderna, los estudiantes presentan dificultades y experiencias traumáticas relacionadas con la producción de demostraciones formales, derivadas de una exigencia de rigor que sobrepasa sus posibilidades de trabajo comprensivo. Se puede apreciar en el estudio exploratorio que en el primer semestre los alumnos se aventuran en el trabajo heurístico y muestran habilidades de visualización, exploran, analizan, conjeturan, presentan algunos casos etc. aunque dichas habilidades no están enfocadas hacia la práctica de la justificación debido a las pocas experiencias significativas en relación con la demostración. En el primer semestre muestran serias dificultades para distinguir una proposición y sus elementos: hipótesis y conclusión, pero más aún, hemos visto como esto prevalece aún en el quinto semestre: (grupo C) por ejemplo el alumno **E21.** Y aunque no lo exhiben en su trabajo escrito otros estudiantes no distinguen tales elementos cuando el ejercicio no se presenta en la forma habitual. Por ejemplo en el ejercicio 2 revisado en el grupo C en el que se incluye una definición en el enunciado. También encontramos que en el ejercicio 1 el alumno **E21** falla por el mal uso de las implicaciones matemáticas debido a la confusión entre hipótesis y conclusión. Esto nos sorprende porque tiene un avance significativo en la licenciatura (quinto semestre), aunque lo hemos encontrado también en la mayoría de los estudiantes iniciales (error de la recíproca). También encontramos como una debilidad fuerte, que no se tiene un manejo de las definiciones y no se extrae significado de ellas y vemos como aún y cuando las saben de memoria presentan un manejo parcial. Además aún y cuando dicen conocer las técnicas de demostración varios estudiantes manifiestan que no saben cómo empezar.

En función de los resultados obtenidos en el estudio exploratorio pensamos que es importante tomar en cuenta lo siguiente para el diseño de la ingeniería didáctica:

- Preliminares sobre la necesidad de verdad en matemáticas. Se puede apreciar que la lógica y la demostración se conciben de manera separada; para evitar esto, la enseñanza debería instruir acerca de la demostración como forma de validación y, acerca de la utilidad del lenguaje como necesidad para desarrollar y comunicar una demostración.
- Formas de presentar los argumentos a probar, partes del argumento, cuantificadores, conectivos, símbolos utilizados frecuentemente y estructuras básicas para establecer una verdad matemática. Que la enseñanza permita la intuición, el ensayo, el error, la especulación, la conjetura, las primeras ideas de la prueba, el análisis de la prueba, la selección de la técnica, la demostración y finalmente escritura de la demostración para ser comunicada.
- Variar el tipo de tarea usando por ejemplo los verbos, enunciar, probar, analizar, mostrar, argumentar y demostrar.

Finalmente el análisis de los grupos A, B y C nos han permitido explorar en forma longitudinal los esquemas de prueba de los estudiantes, los avances en las etapas para el desarrollo de una demostración y el tipo de errores cometidos en el abordaje de la DM. Esto nos sirve para perfilar la propuesta didáctica.

3.3 Diseño de la Ingeniería Didáctica

> "El mejor método para enseñar a otros consiste en conducirlos por el mismo camino que tuvo que seguir uno para enseñarse a sí mismo" (Condillac 1977,308).

En esta sección se presentan dos apartados relacionados con el diseño de la ingeniería. El primero concentra los fundamentos teóricos y las características principales del diseño de Ingenierías Didácticas. El segundo apartado expone las líneas generales que se han seguido para el diseño de nuestra Ingeniería Didáctica, describiendo el contexto, características y restricciones de la implementación. Se finaliza con un análisis a priori de las sesiones diseñadas agrupadas en cuatro bloques de acuerdo con su propósito.

3.3.1 Apuntes sobre Ingeniería didáctica

El concepto de *Ingeniería Didáctica* surge en Francia a comienzos de los ochenta como un medio para abordar dos cuestiones cruciales: 1) tener en cuenta la complejidad de los fenómenos del aula en cuanto a las metodologías y prácticas de investigación y 2) las relaciones entre investigación y acción en el sistema de enseñanza. Chevallard (1982, citado por Artigue (1995)) con respecto a la segunda cuestión puntualiza:

> Definir el problema de la ingeniería didáctica es definir, en su relación con el desarrollo actual y el porvenir de la didáctica de las matemáticas, **el problema de la acción** y de los **medios** para la acción, **sobre el sistema de enseñanza**. (p. 28)

En esa época la mayor parte de las investigaciones utilizaban metodologías externas a la clase (e.g. test, cuestionarios y entrevistas), con un énfasis exagerado en la comparación estadística entre grupos experimentales y de control y en consecuencia resultaban insuficientes para contemplar la complejidad del aula o sistema estudiado.

En resumen, las Ingenierías Didáctica tratan por un lado de desprenderse de las relaciones entre investigación y acción para afirmar la posibilidad de una acción racional sobre el sistema, con base en los conocimientos didácticos preestablecidos, y por otro lado, resaltar la importancia de la 'realización didáctica' en clase como práctica investigativa.

Desde el punto de vista teórico, durante las últimas tres décadas las Ingenierías Didácticas han resultado útiles, al ser un medio exigente para evaluar la validez de las suposiciones teóricas de la Teoría de las Situaciones Didácticas en las que se basan. Las discrepancias inesperadas y persistentes entre los análisis a priori y a posteriori, las dificultades encontradas en la difusión de los productos de la Ingeniería una vez validados por la investigación han jugado, ciertamente, un papel esencial en la evolución de la Teoría de las Situaciones Didácticas.

3.3.1.1 La Ingeniería Didáctica como Metodología de Investigación

La Ingeniería Didáctica como metodología de investigación (Artigue, 1995) se caracteriza por un esquema experimental basado en las realizaciones didácticas en clase. Esto se considera un ciclo repetitivo de reajuste sucesivo de las secuencias didácticas como se muestra en la figura 24.

Figura 24. ciclo repetitivo de ajuste las secuencias didácticas.

Otra de las características de las Ingenierías Didácticas, en particular cuando se compara con otros tipos de investigación basados en experimentación en el aula, es el registro en que se sitúa y los métodos de validación utilizados. La evaluación no se da en la comparación con validación externa basada en la confrontación estadística entre grupos experimental y de control. El modelo que sigue la Ingeniería Didáctica se basa en el modelo del estudio de casos, donde la validación es esencialmente interna, fundamentada en la confrontación entre los análisis a priori y a posteriori.

Al igual que cualquier metodología, tiene tanto ventajas como limitaciones. Entre las limitaciones identificadas debemos mencionar que no da acceso a los sistemas didácticos en su ambiente natural, sino que trabaja con sistemas limitados. Así, nos permite validar nuestros constructos didácticos a través de la habilidad demostrada en producir o reproducir fenómenos didácticos. Sin embargo, las Ingenierías Didácticas pueden considerarse un medio eficiente para aproximarnos a la complejidad de los procesos didácticos, tanto para propósitos teóricos como para objetivos de diseño de enseñanza.
Según el tamaño de la secuencia didáctica objeto de la investigación se distinguen, clásicamente, dos niveles: Micro-ingeniería y Macro-ingeniería.
Dentro de las Ingenierías Didácticas se distingue las investigaciones que abordan el estudio de los procesos de aprendizaje de un determinado concepto (e.g. González-Martín (2005) sobre la generalización de la integral definida), de aquellas que no se ciñen a los contenidos, así su sustento sea la enseñanza de un dominio preciso (e.g. Marilier, Robert, & Tenaud, 1987) sobre aprendizaje de métodos y trabajo en grupo; Chevallard (1982), dominio paramatemático, es decir, nociones que guardan estatus de herramienta de enseñanza, como en nuestro caso la

demostración matemática. Legrand (1988) y Alibert (1991), sobre estrategias didácticas globales: el debate científico.

3.3.1.2 Las Fases de la Metodología de la Ingeniería Didáctica

En el proceso experimental de una ingeniería didáctica se delimitan cuatro fases: 1) Análisis preliminares, 2) Diseño y análisis *a priori* de las situaciones de la Ingeniería Didáctica, 3) Experimentación y 4) Análisis *a posteriori* y evaluación.

Fase 1: Los análisis preliminares

En una investigación de Ingeniería Didáctica, la fase de concepción se basa no sólo en un cuadro teórico didáctico general adquirido en el dominio bajo estudio teniendo en cuenta de los objetivos específicos de la investigación. También se basa en unos análisis previos, como: i) análisis epistemológico de los contenidos de la enseñanza, ii) análisis de la enseñanza tradicional y sus efectos, iii) análisis de las concepciones de los estudiantes y las dificultades y obstáculos que caracterizan su desarrollo y iv) análisis del campo de las restricciones en las que tendrá lugar la producción didáctica.
Obviamente, se trata de un trabajo preliminar cuya serie de análisis realizados por el investigador constituyen pilares del diseño de la ingeniería y posteriormente se retoman y profundizan en el transcurso de las diferentes fases del trabajo. Por tanto, la primera fase corresponde con un primer nivel de elaboración.
Normalmente, una vez que se definen los registros en que se trabajará, los análisis preliminares se centran en tres dimensiones: a) *Dimensión epistemológica*, asociada a las características del conocimiento en juego, b) *Dimensión cognitiva*, asociada a las características cognitivas del público que recibirá la enseñanza y c) *Dimensión didáctica*, asociada a las características de los trabajos en el sistema educativo.

Fase 2: El diseño y análisis *a priori* de las situaciones

En esta fase, la distinción de las variables del sistema sobre las que actuará el investigador es esencial. Hay dos tipos de variables: a) *macro-didácticas* o *globales*, que conciernen a la organización global de la ingeniería y b) *micro-didácticas* o *locales*, que conciernen a la organización local, esto es, de una sesión o bloque.
Por otro lado, como se ha dicho, una de las características distintivas de las Ingenierías Didácticas es su modo de validación, esencialmente interno. El proceso de validación parte de la fase de diseño, por medio del análisis a priori de las situaciones didácticas de la Ingeniería, estrechamente ligado al diseño local de la misma. Este análisis a priori se concibe como un *análisis del control del significado del conocimiento*. La Teoría de las Situaciones Didácticas, que como antes mencionamos, actúa como un referente de la metodología de las Ingenierías desde sus comienzos, trata de ser una teoría de control de las relaciones entre el significado del conocimiento y las situaciones didácticas. De esta forma, el objetivo del análisis a priori es determinar de qué modo las elecciones realizadas permiten controlar el comportamiento de los estudiantes y los significados que construyen. Para ello, el análisis se basa en varias hipótesis, cuya validación estará indirectamente en juego durante la cuarta fase, en la confrontación entre el análisis a priori y el análisis a posteriori.

Este análisis a priori comprende, tradicionalmente, una parte descriptiva y predictiva y se centra en las características de una situación a-didáctica que se desea constituir y cuya devolución se tratará de dejar a los estudiantes.

Fase 3: Experimentación

Esta fase es bien conocida y no nos extenderemos en explicarla. En ella se pone en práctica la Ingeniería resultante del diseño basado en el análisis a priori y se realizan las observaciones y anotaciones.

Fase 4: El análisis *a posteriori* y la evaluación

La fase de experimentación viene seguida de un análisis denominado *a posteriori* que se basa en el conjunto de datos recogidos a lo largo de la experimentación (como grabaciones de audio y video, notas realizadas durante las sesiones de enseñanza, archivos o ficheros de algún software y registros escritos del trabajos de los estudiantes realizados durante y fuera de las clases). Estos datos pueden venir acompañados de otros obtenidos por medio de otros instrumentos, como cuestionarios o entrevistas individuales o grupales realizadas durante la enseñanza o después de ella. Como antes ya se había indicado, en la confrontación de los análisis *a priori* y *a posteriori* se fundamenta en esencia la validación de las hipótesis formuladas en la investigación.
Artigue (1995) señala algunas dificultades que se han hecho evidentes en trabajos publicados de Ingeniería Didáctica. Un análisis a priori, debido a su extensión, es prácticamente incomunicable en toda su extensión. Lo que se publica y se ve desde el exterior no es, salvo un ejercicio académico, un producto apegado a la descripción del análisis a priori. Más bien es una condensación de tal producto. En la mayoría de las publicaciones en relación a Ingenierías, la confrontación de los análisis a priori y a posteriori se producen distorsiones que están lejos de ser siempre analizadas en términos de validación; esto es, no se busca en las hipótesis formuladas aquello que las distorsiones constatadas invalidan. Con frecuencia los autores se limitan a proponer modificaciones con el objetivo de minimizarlas sin comprometer realmente la validación. Además, las hipótesis que se formulan explícitamente son a menudo relativamente globales, es decir, se corresponden con procesos de aprendizaje a largo plazo. Por esta razón, la amplitud de la Ingeniería no permite involucrarse realmente en un proceso de validación.

3.3.2 La ingeniería didáctica en este trabajo

La investigación aquí presentada se sitúa dentro de una perspectiva de Ingeniería Didáctica clásica: se considera la demostración matemática (DM) dentro del sistema didáctico asociado a la preparación de Licenciados en Matemáticas Aplicadas de la Universidad Juárez del Estado de Durango cuyo funcionamiento, por diversas razones, parece poco satisfactorio. Analizamos el funcionamiento de la demostración matemática y las restricciones buscando cierto equilibrio (en el capítulo anterior se presentó un estudio exploratorio). Posteriormente, al jugar con tales restricciones, pretendemos determinar las condiciones de un funcionamiento más satisfactorio. Determinar tales condiciones nos permitirá diseñar la ingeniería, la posterior intervención con los estudiantes y atemperar lo que pueda surgir durante dicha intervención. Se debe tener control sobre la organización del grupo, sobre las tareas que deberán resolver los estudiantes, sobre el tipo de estrategias que puedan utilizar, sobre los conocimientos que deben poseer para

comprender los enunciados de las tareas y para poner en juego sus estrategias y finalmente sobre el control que tienen los estudiantes sobre su acción.
Una vez implementada la situación didáctica diseñada (Ingeniería), se procede a un análisis a posteriori de cada una de las sesiones a partir de los datos regogidos como evidencia de la implementación. Se finaliza con una confrontación de análisis a priori y a posteriori con el que se establecen las conclusiones (capítulo V).

3.3.2.1 Análisis preliminar de la Demostración Matemática en el Sistema Educativo

En esta fase nos aproximamos al análisis de la demostración matemática teniendo en cuenta cuatro dimensiones: 1) Análisis de la DM, 2) Revisión del cuadro teórico-didáctico de la DM y del pensamiento matemático avanzado, 3) Análisis del medio; ventajas y restricciones donde tendrá lugar la realización didáctica y 4) Análisis de la *imagen del concepto* (Tall & Vinner, 1981) que tienen los estudiantes de la DM, así como las dificultades y obstáculos que determinan su desarrollo.
En los capítulos anteriores se presentaron avances de los primeros dos puntos, al igual que un estudio exploratorio realizado en el mismo medio en el que tendrá lugar la implementación del diseño de nuestra Ingeniería. A continuación describiremos el medio de implementación de la ID.

3.3.2.2 Análisis del medio

La Licenciatura en Matemáticas Aplicadas de la Universidad Juárez del Estado de Durango fue creada en 1986, con el siguiente plan de estudios:

<u>Primer Semestre</u>	<u>Segundo Semestre</u>
Cálculo Diferencial e Integral I; Geometría Analítica I; Álgebra Superior I; Lógica Matemática; Introducción a la Filosofía; e Inglés I	Cálculo Diferencial e Integral II; Geometría Analítica II; Álgebra Superior II; Computación I; Filosofía de las Matemáticas; e Inglés II
<u>Tercer Semestre</u>	<u>Cuarto Semestre</u>
Cálculo Diferencial e Integral III; Álgebra Lineal I Probabilidad I; Computación II; Sociología de las Matemáticas; e Inglés III.	Cálculo Diferencial e Integral IV; Álgebra Lineal II; Ecuaciones Diferenciales I; Probabilidad II; Computación III; e Inglés IV.
<u>Quinto Semestre</u>	<u>Sexto Semestre</u>
Análisis Matemático I; Álgebra Moderna; Variable Compleja; Estadística I; y Ecuaciones Diferenciales II	Análisis Matemático II; Análisis Numérico I; Estadística II; Topología I; y Ecuaciones en Diferencia
<u>Séptimo Semestre</u>	<u>Octavo Semestre</u>
Muestreo; Seminario de Análisis Combinatorio; Seminario de Matemáticas Aplicadas I; Investigación de Operaciones I; e Historia de la Cultura	Seminario de Matemáticas Aplicadas II; Diseño de Experimentos; Investigación de Operaciones II; Historia de las Matemáticas; y Ética Profesional

En el momento en que se realizó el estudio exploratorio (2008) la licenciatura contaba con 118 alumnos distribuidos en los 8 semestres. El ingreso es semestral, en agosto y en febrero, teniendo los jóvenes que ingresan 18 años en promedio.
En el medio nos hemos encontrado (ver estudio exploratorio, capítulo II) con que durante su ingreso en la Licenciatura de Matemáticas Aplicadas los estudiantes se deben enfrentar a tareas en las que deben poner en juego el razonamiento formal sin que haya un curso previo que ayude en la transición hacia esas matemáticas formales. Se enfrentan durante el primer semestre directamente a lecciones de matemática formal en las cuales los contenidos son abordados de

manera sistemática en el formato tradicional, mencionando primero las definiciones y axiomas de partida, luego las proposiciones, teoremas, lemas, acompañados con sus respectivas demostraciones y finalmente ejercicios donde aplican lo aprendido.

Naturalmente durante la instrucción en los niveles previos los estudiantes han adquirido conceptos, procedimientos y estrategias concretas de resolución de problemas. Tal instrucción los ayuda a resolver problemas estándar, pero tanto las nociones, como las ideas básicas y las sutilezas y cuidado que deben poner en el uso del lenguaje matemático no han sido desarrollados.

Por otra parte, al no tener tales nociones desarrolladas, muchas veces recurren a experiencias previas en el contexto cotidiano y modos de razonamiento informales que, en su mayoría, no se corresponden con el auténtico modo de hacer de los matemáticos.

Es así como los estudiantes, conforme avanzan en sus cursos de licenciatura, van poco a poco formándose una idea distorsionada de las formas de comunicarse en matemáticas. Estas ideas, en algunos estudiantes, se van adecuando a medida que deben enfrentarse con nuevas experiencias.

A partir de la constatación de las dificultades que tienen los alumnos con la DM a través del estudio exploratorio y de una revisión de la literatura se ha considerado pertinente iniciar a los estudiantes en este concepto mediante una intervención en la que se van a trabajar las nociones básicas que les permita construir el aparato lógico suficiente para introducirlos en la práctica de la demostración y al mismo tiempo les permita comunicarse de forma adecuada en matemáticas.

3.3.2.3 Diseño de la Ingeniería Didáctica

De acuerdo con los objetivos de la investigación consideramos pertinente el diseño de una experiencia didáctica con la intención de que los alumnos lleguen a entender la naturaleza de la demostración matemática (DM). Para sistematizar su enseñanza, se han tenido en cuenta los siguientes aspectos: La DM se aborda como objeto principal de estudio y elemento clave en la formación matemática, de manera previa a los cursos de la licenciatura, puesto que como hemos visto, y de acuerdo con el estudio exploratorio, la demostración matemática posee un estatus de herramienta que no tiene un espacio para enseñarse, es decir tiene una noción paramatemática.

El diseño se basa en las propuestas de Solow (2004)[20] y de Guzmán (2004) que han sido adaptadas teniendo en cuenta el marco teórico y la revisión detallada de la situación de partida que se obtuvo a través de un estudio exploratorio del funcionamiento de la demostración en el medio en el que se aplicará.

En la experiencia didáctica, derivado también del análisis a priori, se contemplan cuatro ejes principales de enseñanza: aproximación a la actitud y rigor matemático, lectura, escritura y producción de demostraciones. El cuarto eje se caracteriza por ser de carácter estructural[21].

Nuestro supuesto inicial ha sido que entender el proceso de demostrar requiere que los alumnos sean sometidos a situaciones de experimentación (Chevallard, 1991), estudiar ejemplos e investigar posibles contraejemplos (Lakatos, 1978), situaciones que impliquen definir e interpretar definiciones (de Villiers, 1998), modelar (Freudental, 1973), formular conjeturas y demostrarlas.

Idealmente la ID puede diseñarse para que la demostración aparezca ante los estudiantes como una necesidad de establecer la verdad de una conjetura propuesta. En este sentido, además se consideraron los tres principios pedagógicos para el diseño y la implementación en el currículo de matemáticas sugeridos por Harel (2000): *de lo concreto, de la necesidad y de la generalización.*

[20] Este libro corresponde a la cuarta edición. La primera fue en 1990.

[21] En el sentido de Alibert & Thomas (1991), ver dimensión didáctica.

Principio de lo concreto: Los estudiantes abstraen una estructura matemática de un modelo dado, en el cual dicha estructura es una entidad conceptual (o esquema) para los estudiantes; es decir, el estudiante tiene procedimientos mentales que pueden tomar estos objetos como entradas.[22]
Principio de la necesidad: Para que los estudiantes aprendan, deben verlo como una necesidad intelectual. [23]
Principio de la generalización: Cuando la instrucción está relacionada con un modelo concreto, esto es, un modelo que satisface el Principio de lo Concreto, las actividades instruccionales permiten mostrar y fomentar la generalización de conceptos.[24]

3.3.2.4 Dificultades y propuesta de atención en la Ingeniería

En este apartado presentamos las dificultades que muestran los estudiantes de cara a la demostración matemática, sus posibles causas y una propuesta de atención. Se ha organizado a partir del análisis preliminar en el que se han considerado las componentes didáctica, cognitiva, epistemológica y social presentado en el marco teórico y en el estudio exploratorio.

Ejemplos y contraejemplos

Los ejemplos en matemáticas son utilizados a menudo con la intención de mostrar que se cumple alguna propiedad. En ese sentido su función es de verificar y no de probar, dado que un caso no representa una prueba a menos que sea único. Por otra parte, un contraejemplo para una afirmación cuantificada universalmente, es un ejemplo proporcionado para el cual ésta es falsa.
Dificultades: Los estudiantes para probar enunciados universales suelen recurrir a algún ejemplo. Cuando se les indica que esto no es correcto, se quejan por el uso que hacen el profesor y los textos de los ejemplos.
Posibles causas: Los alumnos observan que el profesor habitualmente en el aula usa ejemplos pero no saben distinguir cuando un ejemplo puede constituir una demostración y cuando es sólo parte de una discusión para esclarecer la situación.
Han visto el uso de contraejemplos para refutar una proposición universalmente cuantificada y esperan que sean útiles también para probar proposiciones de este mismo tipo pensando en una simetría falsa, es decir, trasladan esta forma válida de pensamiento de refutar con un ejemplo pensando que es válido también probar con un ejemplo.
El alumno piensa que el ejemplo es genérico y que permite una forma de generalización universal. En los ejercicios que se les propone a los alumnos el cuantificador universal puede venir expresado mediante un artículo indefinido. Por ejemplo 'un' en lugar de 'cada' en el ejercicio «probar o

[22] La idea de formación de entidad conceptual está sugerida por Piaget, (1977). Este proceso es una instante de abstracción reflexiva, en la cual <<una acción física o mental esta reconstruida y reorganizada en un plano superior de pensamiento y llega a comprenderse a partir de lo conocido>>. Una entidad conceptual de acuerdo con Greeno, (1983) es un objeto cognitivo para el cual, el sistema mental tiene procedimientos que pueden tomar estos objetos como un argumento, como una entrada.
[23] Este principio esta alineado con la teoría Piagetana y la teoría de la problemática – [Balacheff,(1990)] y [Brousseau, (1994 y 1997)]. Ésta establece que la principal herramienta para modificar concepciones existentes esta en las actividades de verdadera resolución de problemas, donde el aprendiz aplica concepciones existentes para resolver problemas y modifica estas concepciones cuando encuentra conflictos cognitivos.
[24] Este principio apunta a permitir a los estudiantes abstraer conceptos que aprenden en un modelo específico. Su aplicación debe estar ligada al Principio de la Necesidad.

refutar que para un número *x,* $x^2>x$». Una interpretación correcta consiste en que para demostrarlo se debe verificar que con todo entero *x* debe suceder que $x^2>x$ o para refutarlo se debe exhibir un contraejemplo*.* Pero con frecuencia se da la interpretación incorrecta, es decir, exhibir 'un' entero *x que cumpla con que ,* $x^2>x$*.*

Intervención didáctica: Al ser la búsqueda de ejemplos la estrategia que más utilizan los estudiantes al comienzo del trabajo en procesos de prueba en matemáticas, así como para verificar, para dar sentido a las definiciones y en otras muchas situaciones, incluso en el contexto cotidiano consideramos conveniente partir de este hecho y presentar situaciones (Hojas de trabajo #3, #4 y # 5 del bloque III) para que los estudiantes ensayen su estrategia y encuentren una buena cantidad de ejemplos verificando que se cumple determinada proposición, pero que se den cuenta que cuando encuentran uno que no la satisface deben reconocer que la proposición es falsa. Tales experiencias pueden provocar que se dé la necesidad de un nuevo contructo y entonces estarán preparados para la construcción de métodos de demostración además de las pruebas exhaustivas.

Desenvolver definiciones

Un primer paso en la producción de demostraciones se da cuando se comprenden los conceptos involucrados y se utilizan las definiciones de manera adecuada. Usualmente, en el nivel universitario se parte del supuesto de que el estudiante debe ser capaz de manejar los conceptos y definiciones implicadas y su estructura. Sin embargo Selden & Selden (1995) muestran la dificultad que presentan los estudiantes para manejar los conceptos y sus definiciones, incluyendo su estructura lógica. Se tiene la necesidad de hacer las definiciones y conceptos *formalmente operables* para un individuo (Bills & Tall, 1998), es decir los estudiantes deben ser capaces de usarlo para crear o reproducir (significativamente) un argumento formal.

Dificultades: Moore (1994) ha investigado sobre ciertos aspectos de la comprensión o éxito de los estudiantes en la escritura de demostraciones y entre sus hallazgos menciona que cuando los estudiantes intentan escribir demostraciones formales, no necesariamente están entendiendo su contenido ni muestran evidencias de conocer cómo usarlas para desarrollar demostraciones. Por su parte Edwards (1997) encuentra que tareas donde se involucran definiciones de "límite" y "continuidad" resultan problemáticas para algunos estudiantes. Además, los estudiantes de matemáticas avanzadas, aún aquellos que serían considerados exitosos basándose en sus calificaciones, tienen dificultades para entender el papel que juegan las definiciones en matemáticas en general. También tienen dificultades particulares para entender la clasificación filosófica de las definiciones matemáticas así como para la utilización de las mismas en la realización de tareas matemáticas y la demostración de teoremas. Edwards & Ward (2004) señalan que los estudiantes aparentemente pueden entender el papel de las definiciones formales en matemáticas sin comprenderlo realmente. Muchos estudiantes no categorizan las definiciones matemáticas como lo hacen los matemáticos[25], más aún algunos no las usan en este sentido, aún cuando pueden enunciarlas y explicarlas correctamente[26].

---

[25] Es decir como *definiciones estipuladas* en el sentido de Robinson significa la explícita y personal conciencia para fundamentar la relación de significado entre alguna palabra y algún objeto, el acto de asignar un objeto a un nombre (o un nombre a un objeto). La principal ventaja es la mejora de conceptos o la creación de nuevos conceptos, están basadas en el consejo de expertos y su meta es la facilidad y exactitud para la comunicación en la ciencia.

[26] Para esta parte muestran casos en los que la definición del concepto entra en conflicto con la imagen del concepto y finalmente gana la imagen del concepto.

De la misma manera Bills & Tall (1998) encontraron que muchos estudiantes no poseen definiciones operables, más bien recurren a experiencias anteriores e imágenes de los conceptos inoperables. Algun estudiante manejaba un concepto sin una definición operable en una demostración usando imágenes que casualmente dan la información requerida.

En nuestro caso, en el estudio exploratorio, se comprobó que los estudiantes no utilizan las definiciones de los objetos para demostrar un enunciado donde están implicados. Utilizan más bien un representante concreto del objeto, o alguna fórmula que los represente (como es el caso de Nancy presentado en el estudio exploratorio, ver también Alvarado & González, 2010), o sólo piensan en alguna característica del objeto o una definición "corta".

En el estudio exploratorio los estudiantes dejaron sin contestar en los exámenes aquellos items que implican una demostración y muchos de ellos, aunque son capaces de repetir las definiciones de los conceptos que aparecen en los enunciados de las proposiciones, sin embargo no extraen información relevante para derivar deducciones y transitar entre ellas.

Posibles causas: Los estudiantes suelen aplicar una definición de manera incorrecta por al menos dos razones. La primera tiene que ver con una comprensión incompleta o errónea del concepto que se define. La otra podría ser una comprensión matemáticamente incorrecta del papel de las definiciones matemáticas en general.

Por otro lado, los estudiantes necesitan experiencias que les permita extraer el significado de las definiciones y poder establecer relación entre la definición y los objetos que ésta representa.

Intervención didáctica: Edwards & Ward (2004) sugieren que la naturaleza especial de las definiciones debería tratarse en cursos introductorios de la demostración como un concepto en sí mismo para que fuera comprendida por los estudiantes. Además sugieren que se realicen actividades y se investigue su efectividad. Nuestra propuesta se presenta en las hojas de trabajo # 1 y 2 del primer bloque.

Escritura y lectura de demostraciones

La escritura en matemáticas tiene un papel central para la comunicación de ideas y resultados. Ésta debe ser lo más precisa y ordenada posible para facilitar su lectura. Pero es algo que no se trata en los procesos de enseñanza. Aunque hay una recomendación a nivel mundial para incluir en la instrucción actividades que habiliten a los estudiantes de matemáticas de todos los niveles a plasmar las explicaciones correspondientes a sus respuestas, en realidad, esto sólo se realiza en contadas ocasiones. Así, muchos estudiantes llegan a la universidad sin haber escrito una oración completa en un curso de matemáticas.

Dificultades: Las importancia de la escritura en matemáticas (Misfeld, 2003), es confusa para los estudiantes puesto que se presenta el producto final del trabajo matemático y no cómo surgen las ideas. Esto último refuerza la idea de las matemáticas como un conocimiento acabado presentado en forma lineal que conduce a la interpretación de que el conocimiento también se genera de la misma forma.

Posibles causas: La instrucción habitual en matemáticas no ofrece oportunidades para que los alumnos se expresen verbalmente o por escrito, por lo que muestran importantes deficiencias al intentar exponer una idea o al plasmar por escrito la solución de un problema o el desarrollo de una demostración. Además, en general, se les ha instruído para exponer sus razonamientos de manera concisa, lo que les lleva a dar sólo una versión abreviada de sus ideas.

Intervención didáctica: Es posible que la resolución de problemas mejore con la reflexión en cuanto al uso de ideas, a su puesta en práctica y al reconocimiento de conexiones entre conceptos. Esto normalmente no se escribe linealmente utilizando notación simbólica, pero se les debería insistir a los estudiantes para que las escribieran y volvieran a reescribirlas cada vez más

detalladamente para asegurarse que sus razonamientos son correctos y pueden ser leídos por otros.
La ingeniería didáctica en su totalidad está diseñada para que los estudiantes ensayen la escritura de explicaciones, pero la escritura enfocada a la demostración se atiende principalmente en las hojas de trabajo # 6 a la #10 correspondientes a los bloques III y IV.

Noción paramatemática de la demostración en el aula

Las dificultades de los estudiantes universitarios para el manejo de la demostración ha sido centro de atención de numerosos artículos de investigación en educación. En México, al igual que en muchos otros países, es un bloque actualmente marginado en el curriculum preuniversitario y aún en el nivel universitario está concebida únicamente como herramienta transparente, no cuestionada y que aparece en el discurso matemático como algo útil para describir otros objetos (obtener la veracidad de un resultado). A esta noción Chevallard (1985) la llama ***paramatemática***. Por ejemplo, en un curso de álgebra, cálculo, geometría, etc., se usa esta noción de la demostración sin que se cuestione a los estudiantes sobre la naturaleza o significado de la demostración, o simplemente sobre ¿qué es una demostración? Sin embargo en un curso de lógica matemática formal sí que puede tomar un papel relevante y verse por sí misma como un objeto de estudio, o bien como una noción matemática.
Dificultades: En el estudio exploratorio, que aparece en el capítulo anterior, se observa que son contados los estudiantes que esbozan una demostración completa y consistente, y aún en estos casos se aprecia imprecisión en el uso del lenguaje. Para Moore (1994) e Ibañes & Ortega (2002), incluso las pruebas más triviales son grandes desafíos para los estudiantes de matemáticas superiores que no sólo tienen dificultades para producirlas, sino también para reconocerlas como demostraciones.
Para Thompson (1996) y Goetting (1995) las demostraciones más difíciles, incluso para estudiantes de los cursos avanzados de matemáticas, son la prueba por contradicción y la prueba por contraposición, porque gran parte del tiempo se está trabajando con afirmaciones que son falsas y si no se está atento a la situación, esto puede provocar una gran confusión de ideas.
Posibles causas: Weber (2001) señala que las dificultades de los estudiantes universitarios con la demostración se deben a la ausencia de *conocimiento estratégico,* es decir, conocimiento de técnicas de demostración, de cómo elegir los hechos y los teoremas que se deben aplicar o de cuándo utilizar o no un conocimiento sintáctico (como opuesto a conocimiento conceptual o semántico) basado exclusivamente en la manipulación simbólica y el uso de procedimientos matemáticos.
La demostración no se enseña como contenido. En el estudio exploratorio, al cuestionar a los estudiantes sobre la forma en que aprenden a demostrar, en su mayoría la respuesta es: «cuando el profesor realiza alguna en el pizarrón o leyendo el libro». Un retrato de la forma en que los estudiantes aprenden a demostrar nos lo proporciona la experiencia personal de Thurston[27] (1994), «cuando comencé como un estudiante de licenciatura en Berkeley, tuve problemas imaginando como podría "demostrar" un teorema nuevo e interesante. Realmente no entendía qué era una demostración. Asistiendo a seminarios, leyendo artículos, y dirigiéndome a otros estudiantes de licenciatura, gradualmente empecé a entenderlo.»
Intervención didáctica: En las hojas #6 a la #10 se introduce a los estudiantes el conocimiento estratégico para demostrar. En la hoja #6, #7 del bloque III se trabaja sobre el método avance-retroceso como un método directo de prueba y se abordan diferentes estrategias para apoyar el

[27] Medalla Fields 1982

tránsito entre deducciones. También se presentan oportunidades para demostrar proposiciones de situaciones en apariencia alejadas del contexto matemático, por ejemplo, derivar palabras de un alfabeto bajo ciertas reglas. También en las hojas #7 y #8 se pone especial enfásis en apoyarlos a conectar y organizar en forma escrita sus producciones para después realizar versiones condensadas de las demostraciones para comunicarlas en la forma científica y formal aceptada en matemáticas (para artículos, libros, conferencias, etc). En la hoja #8 se trata de desarrollar habilidades para que los estudiantes sean capaces de leer versiones condensadas de demostraciones y puedan extraer significado con las justificaciones de cada paso reconstruyendo el camino que probablemente siguió el autor de la demostración, transmitiendo con ello a los estudiantes que el conocimiento no se concibe de manera lineal.
En las hojas #9 y #10 se abordan los métodos indirectos de prueba (reducción al absurdo y contrapositivo), que son aquellos que más cuestan a los estudiantes dado que no reconocen la equivalencia lógica con el método directo para implicaciones y que además deben lidiar con contradicciones y con negaciones. También en este bloque se presentan situaciones de prueba que en apariencia no son del contexto matemático poniendo el enfásis, al igual que antes, en la organización de las ideas para que generen una versión final lista para comunicar.

Lógica y deducción

Otro aspecto reflejado en diversas investigaciones y, que es causa de los problemas que tienen los alumnos con la demostración, es que muestran un aparato lógico deficiente, siendo el rol de la lógica, central en los esquemas de prueba deductivos. Por ejemplo, en relación al tratamiento de implicaciones y los errores lógicos que cometen podemos mencionar lo siguiente:
Dificultades: Wason (1966) mostró que la mayoría de los estudiantes usa en las demostraciones el *modus ponens* (de $p \rightarrow q$ y p podemos deducir q), muy pocos utilizan el *modus tollens* (de $p \rightarrow q$ y $\neg q$ deducimos $\neg p$), y gran parte de ellos cometen errores de afirmación del consecuente y negación del antecedente. Epp (2003) menciona además "el error de la recíproca" (de si p entonces q y q, deducen p), la dificultad para aceptar que p sólo si q es lógicamente equivalente a si p entonces q, la dificultad en la interpretación de proposiciones cuantificadas, los errores al tratar de negar afirmaciones del tipo *si-entonces* y la dificultad para negar enunciados que contienen "y" y "o". Así, Dorier, Robert, Robinet & Rogalsky (2000), después de varios diagnósticos realizados entre 1987 y 1994 para determinar las dificultades de los estudiantes en el aprendizaje del Álgebra Lineal, concluyen que la ausencia de conocimientos previos en lógica y teoría elemental de conjuntos contribuye a los errores que cometen los alumnos en Álgebra Lineal. Entre las dificultades observadas en los alumnos también mencionan el mal uso de las implicaciones matemáticas por la confusión entre hipótesis y conclusión que también fue detectada en un estudio posterior por Ibañes & Ortega (2002).
De las dificultades antes mencionadas algunas las pudimos observar en el estudio exploratorio realizado para este trabajo, entre ellas nos encontramos con que no se reconoce el papel condicional de la hipótesis, con falacias provenientes de falsas simetrías, manejo indistinto de implicación y su recíproco o de $p \rightarrow q$ y $\neg p \rightarrow \neg q$. Encontramos también dificultades en la utilización de las tablas de verdad para establecer la equivalencia lógica ya que, aún cuando presentan un buen manejo de ellas confían más en ejemplos particulares y además no establecen conexiones con la demostración.
Posibles causas: Para dar una explicación de por qué los alumnos cometen estos errores Epp (2003) sugiere que puede ser la diferencia existente entre el lenguaje cotidiano y el matemático, así como la interpretación que tienen las proposiciones en el ámbito exclusivamente matemático. El lenguaje cotidiano contiene muchas y diferentes variedades de enunciados *si-entonces* distintas de las estrictamente matemáticas, como las que se refieren a relaciones causales, relaciones

temporales, situaciones falsas, etc. lo que da lugar a algunas de las dificultades que tienen los alumnos. Por otra parte Thurston (1994) al referirse al pensamiento matemático habla de que en lógica y deducción tenemos algunos modos de razonamiento o de asociación de conceptos distintos de la propia deducción lógica: causa y efecto (relacionado con la implicación), la contradicción o la negación, etc. Además dice que: «los matemáticos al parecer generalmente no confían en las reglas formales de deducción tanto como ellos piensan. Más bien, sostienen sólo un bit de estructura lógica de una demostración en sus cabezas, rompiendo demostraciones en resultados intermedios de modo que, no tienen que sostener demasiada lógica de una vez. Es interesante que aunque "o", "y" e "implica" tengan un uso formal idéntico, pensamos "o" e " y" como conjunciones mientras que " implica" lo vemos como un verbo».
Intervención didáctica: En las hojas de trabajo #3 y #4 (bloque II) se enfatiza en el reconocimiento de proposiciones matemáticas y sus componentes, el manejo de la verdad o falsedad de las mismas, la comprensión de la negación y el uso adecuado de los conectivos "o", "y", implica y bicondicional. Mientras que en las hojas de la 6 a la 10 (bloque III y IV) se enseña a los estudiantes a desarrollar demostraciones dividiéndolas en resultados y argumentos intermedios para facilitar su comprensión.

Unidad cognitiva (conjetura, argumentación, demostración)
El término unidad cognitiva (Boero et al, 1996; Garuti et al, 1998; Mariotti 2001), en principio fue acuñado para expresar una hipótesis de continuidad. Posteriormente fue redefinido para expresar la posible congruencia entre la fase de argumentación y la subsecuente producción de la demostración, asumiendo claramente que puede o no ocurrir. Lo anterior surge cuando en diferentes estudios se pretende aclarar la relación entre la demostración matemática y la producción de argumentos.
Dificultades: De acuerdo con Harel & Sowder (2007) la creencia de los estudiantes de que la demostración es utilizada únicamente para verificar hechos ya conocidos hace que no tengan sentido los propósitos y el significado de la demostración. Por otra parte los estudiantes no sienten la necesidad de probar una proposición cuando intuitivamente para ellos es cierta.
Posibles causas: La matemática se presenta al estudiante como conocimiento acabado y a menudo se le solicita probar de entrada que algo es cierto o falso.
Intervención didáctica: Consideramos que es necesario involucrar al estudiante en procesos de producción de conjeturas en las que la intuición pueda crearles conflicto y que les lleva a una producción rica de argumentos que puedan utilizarse para realizar posteriormente una demostración. Asimismo crearle una necesidad de encontrar la causa por la cual su aserción no es cierta o sí lo es. En esta ingeniería atendemos estas dificultades aprovechando que el manejo de ejemplos es una técnica natural que emplean los estudiantes para "verificar" o probar verdad. En la hoja #5 del bloque II se presentan tareas en las que los alumnos se aventuren a conjeturar. En estas tareas es necesario encontrar números con ciertas características y se espera que los estudiantes busquen patrones que les permitan identificar ciertas clases de números o espacios de ejemplos (Watson & Mason, 2002, 2005) de forma que durante el proceso, de manera similar a como se produce en la práctica matemática surjan cuestionamientos. De esta forma los estudiantes intuyen y construyen conjeturas en base a los ejemplos o no ejemplos generados.

3.3.2.5 Objetivos y Características Globales de la Ingeniería

El concentrado anterior nos guía en la búsqueda de situaciones que provoquen la emergencia del conocimiento necesario (construible por el alumno) para su adecuado manejo y para facilitar la transición entre el conocimiento informal y la matemática formal. Por tanto en el diseño de esta

Ingeniería, nuestro objetivo es dar al estudiante de nuevo ingreso a la licenciatura la oportunidad de incorporar ***conocimiento técnico, sutilezas y artificios*** que le permitan acceder a los primeros cursos de matemática formal. El objetivo es centrarnos tanto en desarrollo de habilidades como de sutilezas. Distinguimos *habilidad* de *sutileza* en la línea de McClure (2000); por *habilidad* entendemos cosas tales como: encontrar un par conveniente de triángulos congruentes o semejantes, encontrar una relación oculta en una figura, o dibujar una línea suplementaria útil. Algunos ejemplos de *sutileza* son: modificar un problema en una forma lógicamente equivalente que resulte más fácil de resolver, manipular una definición o cuidadosamente relacionar dos definiciones, o la demostración por contradicción. Así pues, la habilidad implica la manipulación experta de objetos, mientras la sutileza implica la manipulación experta de conceptos. Aunque sin duda es necesaria la habilidad sólo los estudiantes que son expertos en la sutileza pueden entender lo que es un sistema axiomático, ya que la idea de axiomatización se refiere no a objetos, ni aún a proposiciones o resultados sobre ellos, sino a relaciones entre enunciados sobre objetos.

3.3.2.5.1 Recursos mediacionales

En esta Ingeniería Didáctica, ocasionalmente, se trabaja con herramientas tecnológicas como los sistemas de geometría dinámica (DGS) y los sistemas de cálculo algebraico (CAS). El uso de estas herramientas se limita a las partes de la Ingeniería en las cuales se requiere conjeturar y construir objetos siendo cuidadosos de no apoyar la idea de que generar múltiples ejemplos nos aproxima o constituye una demostración.

Otro recurso utilizado serán las hojas de trabajo, que son una herramienta fundamental para realizar actividades en el aula ya sea con calculadora o cualquier herramienta tecnológica o las habituales con lápiz y papel. En ellas, en algunos casos, se presenta un problema de manera sucinta, se explora acerca de la *definición y la imagen* de los conceptos a trabajar y se formulan preguntas con alguna sugerencia implícita para que los alumnos empiecen a resolver el problema propuesto. En otros casos se utilizan para la construcción de conceptos partiendo de una exploración de los conocimientos previos para posteriormente guiar y apoyar la construcción de dichos conceptos. En las actividades planteadas es necesario que los alumnos contesten por escrito a las preguntas que se formulan en las hojas de trabajo. Esto tiene un doble propósito. Por un lado, obliga a los alumnos a reflexionar sobre el procedimiento que utilizaron y el resultado que obtuvieron –ya sea empleando la calculadora o la computadora, su propio razonamiento y el de sus compañeros, o bien guiados por ciertas sugerencias y cuestionamientos – y a sintetizar su experiencia para comunicarla; por otro lado, proporciona información al profesor acerca de la comprensión que los alumnos han alcanzado de los conceptos matemáticos involucrados en la tarea. Esta información es fundamental para que el profesor decida qué acciones pondrá en práctica en las clases sucesivas y para que conozca y evalúe el progreso de sus alumnos. En cuanto a nosotros es útil para evaluar los progresos de los estudiantes y la pertinencia de las secuencias didácticas.

Con las actuales formas de instrucción no se presentan al estudiante oportunidades para escribir y plasmar sus ideas. Con el uso de las hojas de trabajo, un propósito implícito es educar progresivamente al estudiante en la organización de un pensamiento claro que le permita plasmarlo por escrito consiguiendo con ello prepararse en una de las principales actividades de un matemático “escribir para comunicar ideas”.

3.3.2.5.2 ¿Porqué hojas de trabajo en esta ingeniería?

La enseñanza de la demostración requiere un acercamiento didáctico diferente, centrado en el alumno, su interacción con los conceptos, la construcción de un lenguaje común en el aula o el establecimiento de la parte formal retórica, la negociación de los significados y la comunicación de resultados. Con ello se busca construir los conceptos y desarrollar de manera colectiva los tópicos, de tal manera que los alumnos en grupos de dos o tres den forma a sus ideas construyendo enunciados y argumentos, para luego someterlos a la crítica de otros grupos y, en conjunto, buscar esquemas de prueba convincentes lo más cercanos posible a las demostraciones que se construyen a partir de un sistema axiomático y que éste crezca paso a paso con cada resultado demostrado. En este sentido las hojas de trabajo guían al equipo para que organicen y plasmen sus ideas de tal manera que esta comunicación sea lo más provechosa posible y, algo muy importante, le transfieran la responsabilidad de su aprendizaje.
La razón más importante para escribir en matemáticas es que esto mejora el aprendizaje y la comprensión de los estudiantes. Esta razón nos ha llevado a tomar la decisión de incluir hojas de trabajo como mediador para nuestra Ingeniería Didáctica, al igual que otras razones tales como: 1) Cuando los estudiantes tienen la oportunidad de escribir se involucran en un proceso reflexivo para poder explicar su pensamiento y defender sus ideas. 2) Un reporte escrito (en nuestro caso una hoja de trabajo) constituye un ensayo para el período de discusión en gran grupo y los apoya a no olvidar los detalles que se consideraron importantes al resolver un problema o responder una pregunta. Y finalmente, 3) un reporte escrito permanece una vez terminada la clase y puede retomarse y depurarse.

En nuestro caso para diseñar las hojas de trabajo se ha considerado, en cada una de ellas, el tema, el objetivo didáctico que se persigue, los textos y la herramienta computacional –si es el caso –que se plantean utilizar y algunas otras características como las siguientes.
1. *Se plantea un contenido a desarrollar o bien una situación problemática*.
2. *Se formulan preguntas que ayudan a reflexionar sobre el problema o contenido*. Estas preguntas tienen como objetivos explorar los conocimientos previos y la imagen del concepto de los alumnos organizados en pequeño grupo; se trata de que entiendan el problema o contenido planteado y formulen algunas expectativas y predicciones antes de trabajar.
3. *Se pide a los alumnos que en su equipo de trabajo exploren, manipulen, discutan y/o resuelvan* la situación planteada, apoyándose en la herramienta computacional –si es el caso – y las ideas propias y de sus compañeros.

4. *Se plantean preguntas sobre los resultados así como retos* para que los alumnos no se limiten a realizar la actividad. Conviene brindar la oportunidad para que cuestionen los resultados y expresen otras ideas relacionadas con el problema.
5. *Discusión y conclusiones*. Es importante que los alumnos en pequeños grupos traten de extraer conclusiones de la actividad y que las exponga ante el grupo para su discusión. En este caso se tiene que guiar a los alumnos para destacar los elementos más importantes de la actividad.
6. *Trabajo extra*. Un grupo siempre es heterogéneo y con frecuencia hay alumnos o equipos que terminan de trabajar más rápido. Para ellos se propone al final de cada actividad un trabajo extra.
Como puede observarse, el inicio de la hoja de trabajo se dirige a los equipos y ya al final se vuelve más abierta para que tenga la posibilidad de explorar sus ideas.

3.3.2.5.3 Formas de interacción en el aula y normas sociomatemáticas implicadas

Un elemento esencial en esta ID son las actividades y relaciones en el aula. Durante el proceso de instrucción de la demostración matemática y los objetos, procesos y conceptos implicados, la actividad desarrollada es sin duda de naturaleza esencialmente cultural y social.

Las interacciones que aparecen como 'obligaciones' o normas, explícitas o no, entre profesor y alumnos son las nociones de **norma social** y **norma socio-matemática** (Cobb & Bauersfeld, 1995 y Yackel & Cobb, 1996)**,** resultando de la discusión de cómo las influencias ambientales determinan las creencias de los estudiantes, permiten la comunicación y condicionan la actividad dentro del marco de una clase**.**

Las normas sociales diferencian las actividades que corresponden al profesor y las que corresponden al alumno. Un ejemplo de esto, es la actitud crítica que se debe adoptar, frente a las afirmaciones que se hacen dentro del salón de clases. Consideramos como una norma social lo que se espera de los alumnos por ejemplo, al intentar justificar las soluciones propuestas a las distintas cuestiones generadas.

Las normas sociomatemáticas corresponden únicamente a la actividad matemática escolar, por ejemplo, cuando una solución se considera matemáticamente diferente, matemáticamente sofisticada, matemáticamente eficiente y matemáticamente elegante, además, otra norma sociomatemática es, «qué se asume como una explicación o justificación matemáticamente aceptable» Yackel & Cobb (1996 p. 461); por supuesto que estas normas, influyen en las oportunidades de aprendizaje y regulan la actividad de argumentación.

D'Amore, Font, & Godino (2007) clasifican las normas según dos direcciones complementarias:

a) El momento en que intervienen las normas: diseño curricular, planificación, implementación y evaluación. Las normas no sólo se ponen de manifiesto en los momentos o fases en que tienen lugar las interacciones profesor–alumnos (implementación), sino también en los momentos de planificación, evaluación, y en la fase de diseño curricular, donde se configuran los significados de referencia que orientan y condicionan los significados pretendidos, implementados y evaluados.

b) La dimensión del proceso de estudio a que se refiere la norma: epistémica, cognitiva, interaccional, mediacional, afectiva y ecológica, permite fijar atención en las normas que regulan:

- El trabajo del profesor en relación con el saber matemático (entendido como sistema de prácticas institucionales).
- El trabajo de los estudiantes en relación con el saber matemático (entendido como sistema de prácticas personales).
- El uso de los recursos tecnológicos y temporales (faceta mediacional).
- La interacción docente–discente y discente–discente.
- La afectividad de las personas que intervienen en el proceso de estudio.
- La relación con el entorno (sociocultural, político, laboral,...) en el que se desarrolla el proceso de instrucción (faceta ecológica).

Destacaremos enseguida las interacciones en el aula: docente-discente y discente-discente.

Interacciones en pequeño y gran grupo

En necesario considerar la importancia de conectar el análisis de la enseñanza-aprendizaje con el análisis de los contextos y dinámicas de la interacción dentro del aula. La interacción social como mediador es esencial. Para Forman (2003), la naturaleza de la comunidad de aprendices se ve afectada no sólo por la cultura creada por el profesor, también por la amplitud social y la historia cultural de las personas que comparten el salón de clase.

En la gestión de dinámicas colaborativas se da la oportunidad a los estudiantes de construir el conocimiento y de expresar sus ideas en forma verbal. En este ejercicio, naturalmente puede ocurrir que los alumnos se distraigan y hablen alejándose del tema matemático en cuestión. Sin embargo, también se pueden dar situaciones donde haya construcción conjunta de aprendizaje matemático.

Por su parte Cobb (1999) centrado sobre la evolución de las prácticas matemáticas, combinan una perspectiva social sobre comunidades de práctica con una perspectiva psicológica sobre las diferentes formas de razonamiento de los estudiantes y como ellos participan dentro de estas prácticas. Los autores dibujan la noción de actividades para recibir y compartir (taken as shared).

Para Voigt (1995), a través de las discusiones, los estudiantes y el profesor constituyen una explicación que quizás no es posible construirla de manera individual. Se llega al conocimiento compartiendo y dando (taken as shared) ideas.

Planas & Morera (2011) argumentan que la interacción es una habilidad que debe ser practicada por estudiantes y profesores en la clase de matemáticas, y esta práctica está influenciada por el concepto que se tiene sobre su valor en el aula. También visualizan la interacción como un mediador positivo en la activación y el avance de los procesos de aprendizaje matemático y señalan que algunas veces la interacción no facilita el aprendizaje porque quienes interactúan tienen poca experiencia sobre cómo escuchar a los otros, hablar con ellos, llegar a acuerdos. En este sentido, la función de la interacción como mediador está influenciada por la habilidad de alumnos y profesores en su uso.

Para ellas, todo contexto de interacción se fundamenta en el derecho de dejar que cualquier participante exprese su opinión e intente convencer sobre la validez de sus ideas. Si la interacción ocurre en la clase, las opiniones tienen que estar relacionadas con la tarea y los argumentos para convencer con la construcción de conocimiento. Pero no siempre hay acuerdo sobre cuándo una opinión no está relacionada con la tarea o cuándo no se construye conocimiento.

Desde su experiencia investigadora, las autoras reconocen en la repetición y el refraseo, acciones que dan cuenta del desarrollo de la habilidad de interactuar y contribuir al desarrollo de discursos conceptuales en el aula de matemáticas. En ocasiones, tales acciones se presentan como aportaciones para justificar un enfoque de resolución, para orientar reformulaciones y para contribuir a la reconstrucción de aprendizajes vinculados a la tarea matemática. También, sustentadas en datos recogidos del trabajo en aulas, confirman que, para explicar excepciones sobre por qué hay interacciones que no ayudan al aprendizaje, es útil analizar las expectativas de los participantes sobre el trabajo con los otros y las normas de clase.

En este sentido, la relación entre interacción y aprendizaje proporciona de manera simultánea avances y limitaciones. Sin embargo, enfatizan que algunas limitaciones del trabajo desarrollado en pequeños grupos se supera durante la discusión en gran grupo puesto que la interacción se amplía a un grupo mayor de participación, entre ellos el profesor.

Esto último, condiciona nuestro actuar en relación a la dinámica de interacción de nuestra Ingeniería Didáctica, primero brindando las oportunidades de construcción del conocimiento en las interacciones en pequeños grupos y, posteriormente soportándolas por la discusión en gran grupo para librar las limitaciones de las producciones en pequeños grupos.

Desde un análisis de la literatura hemos considerado que las interacciones pueden resultar *efectivas* si se caracterizan por un intercambio o comunicación real y verdadera. Es decir si los

participantes: 1) Se comprometen de manera voluntaria en las interacciones sociales con sus compañeros y con su profesor; 2) participan activamente en las interacciones y se involucran con la tarea; 3) tienen desarrolladas las bases para compartir y recibir (taken-as-shared) en igualdad de condiciones, es decir participan con ideas y puntos de vista, al mismo tiempo que respetan y valoran las participaciones de sus compañeros y su profesor; y 4) no representan una autoridad matemática durante el desarrollo de la interacción.
Los puntos 3) y 4) son rasgos que Cobb (1995) y Steffe & Wiegel (1992) consideran, en sus trabajos que son necesarios en interacciones en pequeños grupos, para una buena comunicación y un aprendizaje colaborativo genuino en matemáticas.
En este sentido es de esperar que de una interacción efectiva se derive un producto (definición, justificación, conjetura, método, argumento, demostración, ejemplo, etc) convenido por todos los participantes de ella.

En relación a las interacciones en gran grupo hemos considerado que se da un proceso de construcción guiada y para ello tomamos en cuenta los *movimientos productivos en el discurso (productive talk move,* Sohmer, Michaels, O'Connor, & Resnick, 2009, p. 107) como un giro en la conversación que: 1) responde a lo que se ha dado antes; (2) añade elementos al discurso; y (3) anticipa 'o establece' lo que vendrá después.
Los autores, basados en estudios detallados observando profesores que han sido efectivos en sus prácticas usando la "conversación" para promover el aprendizaje, en la tabla 13 identifican el conjunto de movimientos que los profesores pueden utilizar para modelar y para lograr conversaciones academicamente productivas:

Tabla 13. Movimientos en la conversación

Descripción de la acción para el movimiento	*Formas prototípicas*
Repetición	'Déjame ver si entiendo correctamente. ¿Tú dices XXX?' (con espacio para que el estudiante pueda seguirlo)
Petición a los estudiantes para que repita a su manera el razonamiento de otro	'Puedes repetir con tus propias palabras, lo que él dijo'
Pedir a los estudiantes que razonen sobre el razonamiento de alguien más	'Estás de acuerdo o en desacuerdo y por qué'
Motivar para una mayor participación	'¿Alguien quiere añadir algo más?' 'Digan más sobre esto'
Solicitar a los estudiantes que expliquen su razonamiento y proporcionen evidencia	'¿Por qué piensas esto?' '¿Cómo llegaste a esa respuesta?' '¿Qué evidencia tienes?' 'Puedes darnos un ejemplo'
Desafío o suministro de un contraejemplo	'¿Funciona siempre así? '¿Qué hay acerca de XX?'
Usando tiempo de espera	'Toma tu tiempo… te esperamos'

Para las discusiones en grupo orquestadas por el profesor, en esta Ingeniería hemos anticipado que el profesor tenga en cuenta los movimientos productivos para tratar de ponerlos en práctica.

También consideramos en nuestro diseño, que durante el trabajo en pequeños grupos el profesor puede monitorear para observar si los estudiantes pasan mucho rato buscando una manera de abordar la tarea. En este caso sugerimos que interactúe con ellos para dar un apoyo adecuado a su pensamiento y actuar dentro del pequeño grupo. Para ello puede tomar en cuenta los cuatro "movimientos del profesor" (Jacobs & Ambrose, 2008) para que continuen sin desanimarse en la tarea. Estos movimientos son: a) Asegurarse que los estudiantes entienden la tarea (¿qué saben acerca del problema?) y de ser necesario cambiar el contexto a uno más familiar, b) cambiar el problema a uno paralelo con valores más simples, c) preguntar a los estudiantes que han intentado hasta el momento, y d) sugerir el uso de otra estrategia (has pensado acerca de las propiedades de estos números).

Hasta ahora hemos agotado las posibles interacciones que pueden ocurrir en la implementación de la Ingeniería y podemos pasar a definir las variables didácticas.

3.3.2.5.4 Variables Didácticas

Las variables didácticas son elementos de la situación en juego que el profesor modifica provocando cambios de estrategia en el alumno para que construya el saber matemático deseado. No se puede pretender que en una situación "todo" sea variable didáctica, sino únicamente aquel elemento tal que si actuamos sobre él, podemos provocar adaptaciones y aprendizajes. Así pues, las variables didácticas involucradas en este trabajo en relación con la demostración matemática en el aula son: ***definiciones, implicaciones y mecanismos de control.***
Como variables macro-didácticas podemos tomar en cuenta el papel mediador de las **interacciones** y **las hojas de trabajo**. También el papel mediador del profesor es de suma importancia. En nuestro caso, el investigador es diferente del profesor que participa en la puesta en práctica de nuestra Ingeniería. El profesor que la implementa fue seleccionado, primero preguntando a los profesores del primer semestre de la licenciatura en juego, quiénes estarían interesados en colaborar, posteriormente se pensó en elegir al profesor de grupo que tuviera cierta influencia sobre él y para quien la demostración fuera un tópico relevante y considerado un problema real que enfrentaban los estudiantes. Así, se decidió que el profesor de materia de Cálculo I (Análisis Matemático) era adecuado. Esto era crucial, dado que de otra manera era complicado que los estudiantes accedieran a participar ya que no era una materia curricular y en consecuencia no tendrían una calificación. Al profesor previamente se le mostraron las hojas de trabajo y se puso en antecedentes sobre la organización de los equipos, acerca de darles oportunidad de interactuar y llegar a construir conocimiento nuevo para ellos. Se le pidió que luego del tiempo necesario para el trabajo en equipo, apoyara en sesión plenaria la socialización de producciones tratando de apoyarlos entrelazando las producciones, cuestionando para lograr afinarlas y finalmente destacar los puntos importantes. Se le proporcionó un listado de movimientos del profesores considerados importantes para lograr discursos académicamente productivo en el aula Sohmer, Michaels, O'Connor & Resnick (2009).
En este sentido habría que dar cuenta de los cambios provocados por la interacción, el uso de hojas de trabajo y las acciones del profesor en la activación y avance de los procesos de aprendizaje matemático.

3.3.3 Ingeniería Resultante

El supuesto inicial de la ID ha sido que entender el proceso de demostración requiere que los estudiantes sean sometidos a situaciones de experimentación (Chevallard, 1992), estudiar ejemplos e investigar posibles contraejemplos (Lakatos, 1976), situaciones que impliquen definir e interpretar definiciones (de Villiers, 1998), modelar (Freudental, 1973), formular conjeturas y demostrarlas, desarrollar *habilidades* y *sutilezas* (McClure, 2000) y finalmente llevarlos a organizar sus producciones y escribir la versión para comunicarse. Idealmente la ID puede diseñarse para que la demostración aparezca ante los estudiantes como una necesidad de establecer la verdad de una conjetura propuesta.

3.3.3.1 Análisis a Priori de los Bloques

Se ha organizado la ID en cuatro bloques que se van a describir de forma detallada a continuación. Para cada uno se indican el número de sesiones, su contenido, los objetivos, las interacciones en el aula, la dimensión didáctica y la matemática.

TABLA 14. BLOQUE 1. DEFINICIONES

Sesión 1. Reflexión sobre definiciones conocidas	**Sesión 2.** Definir a partir de la construcción de un objeto y viceversa
• Negociación de las definiciones • Uso de ejemplos y contraejemplos • Organizadores genéricos	• Identificación de objetos de la construcción y relaciones entre ellos • Identificación de invariantes • Uso adecuado del lenguaje • Identificación de objetos presentes en la definición, relaciones entre ellos y representación de los mismos • Validación a partir de invariante

OBJETIVOS

Establecer la diferencia de trabajo con los objetos en matemáticas avanzadas con respecto a las matemáticas elementales, esto es, en las primeras se "definen" mientras que en las segundas se "describen".
Educar progresivamente los hábitos de los estudiantes de forma que las definiciones formen parte de su experiencia y de sus esquemas conceptuales.
Presentar elementos de reflexión a través de ejemplos conflictivos que les permitan obtener las definiciones adecuadas e identificar los riesgos de las definiciones "económicas".
Fomentar la comprensión de las definiciones de objetos matemáticos por su caracterización de invariantes y sus representaciones.

DIMENSIÓN MATEMÁTICA

En la primera sesión del bloque se proponen 12 objetos a definir. Estos objetos son abordados en algún nivel previo a excepción del de *número feliz*. La tarea de buscar definiciones precisas se realiza por equipos y constituye un espacio problemático común al maestro y a los estudiantes para construir significados. Una vez que tienen sus "definiciones" se presenta una discusión grupal en la que se pone en juego la importancia de definir, de tal manera que no se admitan ambigüedades. Se trata de exhibir la utilidad de una buena definición como, por ejemplo, al intentar persuadir al grupo de que «el producto de dos números impares es impar», con lo que también podemos introducirlos en las definiciones formalmente operables. Otro punto importante a destacar en esta discusión es el de interpretar definiciones, es decir dada la definición poder proporcionar ejemplos apegados a la misma y eventualmente no ejemplos. Es decir, concienciar al grupo de que saberse de memoria las definiciones no garantiza en absoluto comprender su significado. Al acordar en grupo las definiciones hay que procurar que la definición se exprese en la forma más corta, directa posible y que incluya en su totalidad y sólo a los objetos deseados. Para ello es conveniente exhibir en la discusión diferentes casos que propicien el conflicto, por ejemplo: al revisar la definición de cuadrilátero mostrar figuras no cerradas de cuatro lados, o con lados curvos, con dos lados que se intersectan más de una vez y presentar tanto ejemplos de cuadriláteros cóncavos como convexos. Para el cierre se puede realizar alguna construcción geométrica en un ambiente DGS de algunos de los conceptos definidos, por ejemplo el ortocentro, que se presenta problemático por estar asociado al concepto de altura de un triángulo.

En la segunda sesión se presenta primero la construcción de un objeto complejo en el sentido que integra el manejo de diferentes objetos relacionados y se pide que a partir de estas relaciones se defina para obtener su construcción o representación gráfica. Por otra parte, se refuerza la conexión de las definiciones con una o más de sus representaciones. En la parte de discusión y debate se recomienda analizar en grupo las construcciones e integrar la definición apropiada a partir de las obtenidas por los equipos para terminar destacando las relaciones encontradas. Es importante antes de pasar a otro tópico dejar claro con diferentes ejemplos de definiciones que, en matemáticas, por convención *si* significa *si y sólo si* –reforzar posteriormente esto cuando se trabaje con la implicación y la doble implicación –. Finalmente ayudado con los ejemplos producidos enumerar los atributos de una buena definición: debe ser concisa, precisa, consistente con otras definiciones, y comprensible dentro del nivel donde se opere.

DIMENSIÓN DIDÁCTICA

Las dos sesiones del bloque se inician con trabajo en equipo guiado por hojas de trabajo (las hojas #1 y #2 que aparecen en el anexo) que proponen una actividad para negociar la construcción de definiciones, que presenta preguntas para la reflexión y proporciona espacios para organizar sus resultados por escrito una vez aceptados por todos los integrantes del equipo. Al final de las hojas de trabajo se proporciona trabajo extra para atender la diversidad del grupo. Posteriormente se presenta un espacio para la socialización con la totalidad del grupo de las producciones de los equipos utilizando el debate científico siendo la primera cuestión a debatir la obtención de la definición de los conceptos listados aceptada por la totalidad del grupo; la segunda, a partir de la representación del objeto proporcionar su definición; y por último, a partir de una definición construir las representaciones del objeto. Finalmente las sesiones se cierran con un resumen de conceptos e ideas principales en torno al uso y la importancia de las definiciones en matemáticas.

FORMAS DE INTERACCIÓN

El papel del profesor es de **mediador**, es decir, es responsable de promover el intercambio de ideas y la discusión en grupo al dirigir el debate científico, al mismo tiempo que actúa como intermediario entre el estudiante, las herramientas mediacionales y los conceptos, al asistir a los estudiantes en su trabajo con las actividades de clase compartiendo con ellos el mismo medio de expresión. El profesor **regula** el proceso al interactuar con los equipos, observando sus avances y dificultades y realizando intervenciones oportunas. El profesor también actúa como **organizador** de los contenidos al sintetizar al final de las sesiones las ideas principales, las definiciones y resultados aceptados por los estudiantes.

En las interacciones alumno-alumno se discuten y negocian las definiciones dentro del marco de aprendizaje colaborativo activando sus conocimientos previos e imágenes de los conceptos, se organizan y presentan por escrito sus aportaciones, para posteriormente exponerlas en el debate científico con la totalidad del grupo. El trabajo colaborativo ayuda a que los alumnos reflexionen y encuentren por sí mismos una definición aceptable para el equipo.

Las normas sociomatemáticas implicadas son: las producciones del equipo representan el acuerdo de todos los integrantes, es decir la producción matemática se negocia y se presenta por escrito. Posteriormente todo lo que se expone al grupo se debe acompañar de una explicación o argumentación; las definiciones resultantes deben ser concisas, precisas, consistentes con otras definiciones, y comprensibles dentro del nivel donde se operan. Para ello, en la socialización el profesor guía la discusión identificando los aspectos importantes de cada contribución tratando de guiar la discusión para que sean los mismos estudiantes quienes vayan identificando las inconsistencias y afinando sus producciones tomando en cuenta las aportaciones de sus compañeros. Finalmente el profesor concentra y resume la producción de manera precisa de acuerdo a la disciplina.

MEDIACIÓN

El *medio* presentado consiste en dos hojas de trabajo, una para cada sesión.
La primera contiene un listado de objetos matemáticos (presuntamente conocidos por los alumnos) que deben definir y su diseño permite a los estudiantes activar la imagen de los conceptos para reflexionar y poder negociar una definición con sus compañeros de equipo. Además en el listado se incorporan objetos que de acuerdo a múltiples investigaciones resultan conflictivos para los alumnos. Se espera entonces que esto dote de riqueza las discusiones dentro y fuera del equipo con la totalidad del grupo.
La segunda contiene una construcción guiada en un ambiente DGS de la representación gráfica de un objeto matemático y se espera que a partir de la exploración, manipulación del objeto, identificación de sus componentes y conexiones entre ellas y las preguntas formuladas se provoque una reflexión en los equipos y se pueda negociar una definición del objeto en cuestión. En esta hoja de trabajo se presenta una actividad de ampliación suponiendo heterogeneidad en el grupo. Esta actividad propone la construcción de dos objetos matemáticos a partir de su definición.
El material que se reparte a los alumnos y el que guía también la discusión lo constituyen las hojas de trabajo que eventualmente se apoyan en la tecnología al trabajar con ambientes DGS.

TABLA 15. BLOQUE II. INICIANDO EN ACTITUD Y RIGOR MATEMÁTICO

Sesión 3 (hoja 3): Proposiciones Matemáticas (PM)	**Sesiones 4 y 5 (hoja 4)**: Conectivos Lógicos	**Sesión 6 (hoja 5)**: Ejemplos y contraejemplos
• Construir la definición: proposición matemática • Identificar PM y justificar su valor de verdad • Definir y reconocer hipótesis y conclusión en implicaciones	• Negación, conjunción, disyunción excluyente y no excluyente, implicación y bicondicional ligadas al contexto cotidiano y extender al contexto matemático para construir sus tablas de verdad. • Tautologías de conectivos lógicos del punto anterior. • Leyes lógicas vinculadas a métodos para demostrar en matemáticas	• Ejemplos y contraejemplo vinculados a la demostración matemática • Construir espacios de ejemplos • Aventurar conjeturas • Probar verdad o falsedad partiendo de la construcción de ejemplos y contraejemplos

OBJETIVOS

Los principales objetivos en este bloque son:
Construir la definición de proposición matemática y reconocer sus componentes y los elementos que les permitan identificarlas.
Identificar proposiciones matemáticas en diferentes contextos matemáticos.
Determinar y justificar el valor de verdad de proposiciones matemáticas diversas.
Identificar hipótesis y conclusión en implicaciones, desde enunciados presentados en formas no habituales y que generan conflicto en los estudiantes.

Comprender la función de la hipótesis y la conclusión de una implicación en el proceso de demostración matemática.

DIMENSIÓN MATEMÁTICA

Los tópicos desarrollados en este bloque fueron seleccionados considerando, desde un análisis a priori que, su manejo era crucial para soportar con ellos el proceso de la demostración matemática. Después de identificar el tipo de errores cometidos por diferentes alumnos en el mismo medio en el que se implementaría la Ingeniería, consideramos que en el diseño de las tareas se debería tener especial cuidado para que los conceptos y objetos fueran construidos por los alumnos a partir de sus experiencias y conocimiento previo en el contexto cotidiano y en el contexto matemático y después en gran grupo fueran afinados para formar parte de su conocimiento científico y formal.

Entre los tópicos tratados se da la construcción de la definición de proposición matemática, así como oportunidades para probar y refinar la definición generada, a partir de identificar de una lista de enunciados extraídos desde diferentes contextos y presentados en diferentes formas. Hay una parte específicamente dedicada a las implicaciones lógicas en la que se espera que los estudiantes identifiquen la forma "si,..., entonces" de la implicación, sus diferentes variantes, así como sus componentes (hipótesis y conclusión) y el papel que juegan en el proceso de la demostración. Se trata de brindar oportunidades para juzgar el valor de verdad de algunas de ellas y pedirles que realicen justificaciones.
Los conectivos lógicos (conjunción, disyunción incluyente y excluyente, implicación y bicondicional) son otro tópico de gran relevancia y fundamentales para abordar y comprender la estructura de las proposiciones matemáticas (obtención de nuevas proposiciones compuestas de otras simples) y su relación con las tablas de verdad asociadas. También para estudiar las tautologías o leyes lógicas y su sentido para demostrar en matemáticas.
Comprender la negación de enunciados que contienen disyunción, conjunción y/o cuantificadores (para todo, para cada, para algún, etc) son de gran importancia para trabajar en un ambiente matemático formal. Sin embargo éste es un tópico que no resulta sencillo para los estudiantes principiantes en este ambiente, en virtud de que, al no tener oportunidades para aclarar estas nociones, ellos extraen significado de su uso informal lo que suelen confundirlos cuando se preparan para trabajar en un ambiente matemático formal.
En resumen, desde el análisis a priori (revisión teórica y estudio exploratorio del medio) creemos que bridar oportunidades para que los estudiantes construyan conocimiento de las nociones básicas de lógica elemental y para que relacionen y distingan el funcionamiento del lenguaje de conectivos lógicos y cuantificadores en la práctica formal e informal dota a los estudiantes del aparato lógico suficiente para introducirlos en la demostración.
Finalmente, en este bloque los estudiantes se familiarizaran con el uso de ejemplos y contraejemplos en el contexto de la demostración matemática. El uso de ejemplos es una técnica natural de los estudiantes para probar la verdad en matemáticas. No obstante deben entender que para probar la falsedad de una proposición es suficiente exhibir un ejemplo en el que no se cumpla (contraejemplo), mientras que para probar la verdad de la proposición no es suficiente mencionar algunos casos, de manera que es necesario buscar estrategias para agotar todos los casos. En este sentido se presentan oportunidades para que los estudiantes puedan enfrentar este conflicto, establecer conexiones, construir significado y, apoyados posteriormente por el profesor, puedan desplazarse hacía el conocimiento formal.

Dimensión Didáctica

Las cuatro sesiones de este bloque están guiadas por hojas de trabajo (las hojas #3, #4 y #5 que aparecen en el anexo) que serán resueltas por equipos de trabajo de 3 a 5 estudiantes. Para la dinámica de trabajo primero se presentan a los equipos las tareas (convencionales y de desafío para atender diversidad) para que sean discutidas en los equipos y se convenga una solución grupal, en forma de registro escrito en la hoja de trabajo correspondiente. A continuación, en una sesión en gran grupo mediada por el profesor, se presentan las producciones de los equipos, se comparan y discuten para acordar un producto final que resuelva las tareas encomendadas. Finalmente, se cierran las sesiones con un resumen de conceptos e ideas principales en torno al uso y la importancia de las proposiciones, los conectivos lógicos y el manejo de ejemplos y contraejemplos para demostrar verdad en matemáticas y en consecuencia desarrollar actitud y rigor en matemáticas. Durante el trabajo en equipo, los estudiantes tienen oportunidad de interactuar con sus pares sin miedo a cometer errores y desde su conocimiento previo, que la mayoría de la veces viene condicionado por su uso en el lenguaje cotidiano (al no ser temas tratados en el curriculum, como ya lo hemos mencionado derivado del análisis a priori), creemos que al hacerse explícitos errores conceptuales, procedurales, de interpretación, etc. pueden debatirse y algunos corregirse. Otros pueden ser persistentes o bien representar una debilidad de todo el equipo y es en la socialización donde el profesor y otros equipos ayudan a que el error sea reconocido y con ello inicia una fase de construcción del "nuevo concepto" que será sucedida por una etapa de ajuste al utilizarse en diferentes contextos siendo deseable que, al realizarlo con éxito o identificar por ellos mismos el error cuando vuelve a activarse o es persistente, se inicie una etapa de consolidación para afianzar y fortalecer el concepto.

Formas de Interacción

Primero se da tiempo para el trabajo en pequeños grupos. Durante las interacciones entre los alumnos discuten y negocian la resolución de la tarea. Para ello, activan sus conocimientos previos, sus experiencias en contextos informales e informales y establecen las conexiones necesarias. Las producciones derivadas en la forma descrita se organizan y presentan en forma escrita en las hojas de trabajo correspondientes para guiarse posteriormente al exponerlas en el debate científico con la totalidad del grupo.

Las normas sociomatemáticas implicadas son: las producciones en el equipo representan el acuerdo de todos los integrantes, es decir, la producción matemática se negocia y se presenta por escrito. Posteriormente, todo lo que se expone al grupo se debe acompañar de una explicación o argumentación; las producciones deben ser concisas, precisas, consistentes con otras definiciones, y comprensibles dentro del nivel donde se operan. Para ello, en la socialización el profesor media la discusión identificando los aspectos importantes de cada contribución tratando de regular la discusión para que sean los mismos estudiantes quienes vayan identificando las inconsistencias y afinando sus producciones tomando en cuenta las aportaciones de sus compañeros. Finalmente el profesor actúa como organizador al concentrar y resumir la producción de manera precisa de acuerdo a la disciplina.

Mediación

El *medio* presentado consiste de tres hojas de trabajo (#3, #4 y #5), una para cada sesión, salvo la hoja #4 que apoya las sesiones 4 y 5.

En la hoja # 3 los alumnos iconstruyen la definición apropiada de proposición matemática estableciendo conexiones con su conocimiento previo y con las experiencias en las que las han utilizado. Ellos han tenido experiencias con las proposiciones cuando sus profesores han escrito algunas y las han demostrado, o también las han podido ver en sus libros de texto durante los cinco meses anteriores, incluso en experiencias en educación secundaria y bachillerato. Sin embargo, no hemos podido identificar momentos en los cuáles se les explique qué es una demostración y cómo identificarla. Después de construida y aceptada en su equipo de trabajo, ésta se pone a prueba identificando, entre una lista de enunciados extraídos desde diferentes contextos matemáticos y en una variedad de formas y estructuras, áquellas que satisfacen su definición y son reconocidas por ellos como proposiciones matemáticas. Durante este reconocimiento su definición puede sufrir adaptaciones. Entre las proposiciones son tratadas específicamente las implicaciones de las que se presentan diferentes tipos para que sean identificados sus componentes: hipótesis y conclusión, así como el papel que juegan cuando se determina su valor de verdad. Con estas experiencias se da un paso a la demostración, justificando el valor de verdad de diferentes ejemplos propuestos comenzando a tener sentido el "demostrar" cuándo es V o F una proposición.

La hoja de trabajo # 4 constituye el medio para acercarlos a los conectivos lógicos desde el contexto cotidiano, que de acuerdo al análisis a priori juega un papel determinante en los errores cometidos con su manejo (e.g. Epp, 2003; y Alvarado & González, 2009;2010), construyendo un puente hasta el manejo de los mismos en el contexto matemático. El diseño de la hoja permite que puedan distinguir las diferencias asociadas en ambos contextos y los apoya para construir las tablas de verdad y vincular las leyes lógicas o tautologías a los métodos de demostración que han observado en clases anteriores aunque no las comprendieran.

Por último, en este bloque para la sesión 6, se propone como mediación la hoja de trabajo #5, que brinda la oportunidad de sacar provecho del uso de ejemplos como principal estrategia de verificación de verdad que es utilizada de manera natural por los alumnos. Aquí se presentan ejemplos que dan oportunidad para crear el conflicto y poder entender que para probar la falsedad de una proposición matemática es suficiente exhibir un ejemplo que no cumpla, mientras que para probar su verdad no es suficiente mencionar algunos casos, es necesario revisar todos los casos. Para esta parte también se utiliza un video de una serie televisiva y los estudiantes pueden utilizar calculadora, software como Excel y Scientific World Place.

TABLA 16. BLOQUE III. MÉTODOS DIRECTOS DE DEMOSTRACIÓN

Sesión 7 (hoja 6): Demostrando con el método avance-retroceso • Reconocimiento de información relevante y estructura • Extracción de significado y noción de pregunta clave • Pregunta clave y avanzar para deducir • Pregunta clave y retroceder desde la extracción de significado de lo que se pretende probar • Organizar información en formato dos columnas • Demostraciones de proposiciones extraídas de contextos "no matemáticos	**Sesión 8 (hoja 7)**: Práctica del método avance-retroceso • Información relevante y extracción de significado. • Buscando puntos de avance y retroceso. • Organización de la información para la demostración • Escritura de la versión condensada para comunicar la demostración	**Sesiones 9 y 10 (hoja 8)**: Leyendo y entendiendo demostraciones • Extracción de significado de demostraciones en versiones condensadas • Justificación detallada de los elementos y pasos de una demostración comunicada en forma condensada

OBJETIVOS

Desarrollar la noción de pregunta clave para derivar información matemática nueva de la información disponible.

Comprender y manejar el método directo de demostración de implicaciones a través de la extracción de significado de sus elementos.

Organizar información y escribir demostraciones para comunicarlas en las formas apropiadas del registro matemático

DIMENSIÓN MATEMÁTICA

En este bloque se desarrolla la noción de pregunta clave como estrategia para derivar enunciados verdaderos a partir de la extracción de significado de la información disponible hasta el momento, o bien tomando en cuenta la información que es necesaria para llegar a la conclusión. En esta parte se ponen en juego el manejo de definiciones (trabajado en el bloque I) y el manejo de conectivos lógicos, estructura de las implicaciones y papel condicional de la hipótesis (tópicos abordados en el bloque II). Este conocimiento es crucial para el manejo de los procesos de avanzar y retroceder, como el tránsito de un enunciado verdadero a otro también verdadero. Avanzar significa derivar a partir de un enunciado verdadero P otro nuevo enunciado P_1 también verdadero. Retroceder se entiende como, a partir de la conclusión Q, anticipar un enunciado Q_1 verdadero que me conduzca a Q.

También se pone especial énfasis en la forma de organizar las ideas en un escrito que después los apoye en la elaboración de una versión condensada para comunicar bajo los lineamientos del medio matemático, es decir, tal como aparecen las demostraciones en los libros de texto, artículos de investigación o conferencias.

Por último, a partir de demostraciones en su versión condensada o en el formato del medio matemático, se presentan oportunidades a los estudiantes para extraer significado, presentar detalles y argumentaciones que los ayuden a leer entre líneas encontrando significado a esta manera de comunicarse.

DIMENSIÓN DIDÁCTICA

Las cuatro sesiones de este bloque están reservadas para aprender como contenido, y no en forma paramatemática, el método de avance y retroceso. Este método es útil para demostrar implicaciones mediante la extracción de información relevante organizada de manera que sean identificados los principales elementos, deducciones y argumentos con la intención de poder realizar una versión de la demostración para comunicarla en las formas de registro matemático de la disciplina. Además se trata de que los estudiantes que sean capaces de leer demostraciones de diferentes fuentes aceptadas por los profesionales del área. Las sesiones están guíadas por las hojas de trabajo (#6, #7 y #8 que aparecen en el anexo).

En este bloque el profesor comienza con un ejemplo de cómo demostrar una proposición en forma de una implicación, apoyándose en el conocimiento que han logrado los estudiantes en las sesiones anteriores para que sean ellos mismos los que vayan realizando los pasos y respondiendo a los cuestionamientos del profesor. Después, los estudiantes organizados en pequeños grupos tienen oportunidad de trabajar para demostrar diferentes implicaciones, apoyándose en la noción de pregunta clave y registrando en sus hojas de trabajo el significado de los elementos y conceptos presentes en la implicación. La interacción con sus compañeros, las nociones previas y las hojas de trabajo los ayudarán a encontrar diferentes maneras de demostrar, además de apoyarlos para

escribir y leer en matemáticas. Para mantener activos a los estudiantes que terminan antes de lo esperado, se les deja un trabajo extra o tarea de desafío que implica mayor demanda cognitiva.
A continuación, se realizar la socialización con la totalidad del grupo de las demostraciones producidas de los equipos. Al darles la oportunidad de compartir y comparar las producciones se identifican puntos de desacuerdo e inconsistencias siendo el profesor quien desde su conocimiento especializado puede organizar la discusión provocando los movimientos pertinentes para lograr concretar producciones formales y aceptadas por el grupo. Finalmente las sesiones se cierran con un resumen de conceptos e ideas principales en torno a las demostraciones y a los aspectos importantes generados en la discusión.

FORMAS DE INTERACCIÓN

El profesor comienza con un ejemplo que ilustra el método de demostración avance-retroceso y las nociones asociadas, cuestionando a los estudiantes para que con sus aportaciones construyan la demostración correspondiente. Se trabaja en pequeños grupos, discutiendo y negociando para construir las demostraciones solicitadas. Para ello, extraen significado de las definiciones de los conceptos involucrados y de la estructura de los enunciados, realizan deducciones, organizan sus producciones guiados por las hojas de trabajo y finalmente hacen un registro escrito en versión condensada de la demostración para comunicarla en gran grupo.
El profesor puede dar soporte a los equipos cuando observe que se ha producido un bloqueo.
En la socialización, el profesor media la discusión identificando los aspectos importantes de cada contribución y trata de regularla para que sean los mismos estudiantes quienes vayan identificando las inconsistencias y afinando sus demostraciones tomando en cuenta las aportaciones de sus compañeros. Finalmente el profesor actúa como organizador al concentrar y resumir la demostración de manera precisa para ser comunicada de acuerdo a los requerimientos de la disciplina.

MEDIACIÓN

En este bloque la mediación se da con las hojas #6, #7 y #8 que guía el trabajo de los estudiantes y ofrece espacios para extraer información, regular su avance, para registrar y organizar las ideas importantes y por último para llevarlos a escribir versiones condensadas de sus demostraciones para que sean comunicadas en la comunidad de práctica con las reglas aceptadas por los matemáticos. En el caso de la hoja # 8 se da oportunidad para prácticar en el proceso inverso, es decir a partir de una versión condensada de las demostraciones, se guía a los estudiantes para poder extraer su significado, leerla y entresacar las principales ideas y detalles dando sentido a la demostración y logrando su completa comprensión. En este bloque se da oportunidad a la construcción de las demostraciones, pero además se va más allá, dado que defendemos la postura de que se avanza en el nivel de comprensión cuando se puede comunicar en forma escrita su producción y cuando puedes leer la producción de otros y reconstruir el camino que recorrieron para llegar a su demostración.

TABLA 17. BLOQUE IV. MÉTODOS INDIRECTOS DE DEMOSTRACIÓN

Sesión 11 (hoja 9): Método de Reducción al Absurdo • Identificar con la tautología o ley lógica correspondiente • Revisión de ejemplos de demostraciones con el método • Generar demostraciones en formato dos columnas	**Sesión 12 (hoja 10)**: Método de Demostración de Contrapositivo • Identificar con la ley lógica correspondiente • Relación con otros métodos • Revisión de ejemplos que ilustran método • Generar demostraciones en formato dos columnas

• Versiones condensadas para comunicar • Relación con otros métodos	• Versiones para comunicar • Demostraciones por el método en contextos en apariencia“no matemáticos”

OBJETIVOS

Introducir el método de reducción al absurdo a partir del método avance-retroceso y establecer la conexión con su correspondiente tabla de verdad para comprender la equivalencia lógica y utilizar este hecho para demostrar proposiciones de la forma *si P entonces Q*.
Introducir el método del contrapositivo a partir del método avance retroceso y de reducción al absurdo, establecer la conexión con su correspondiente tabla de verdad para comprender la equivalencia lógica y utilizar este hecho para demostrar proposiciones de la forma *si P entonces Q*.
Comparar los tres métodos vistos hasta el momento para distinguir las diferencias (mayor número de conexiones para una mejor comprensión).

DIMENSIÓN MATEMÁTICA

En este bloque cobran sentido todos los bloques anteriores. Es en los métodos indirectos de prueba dónde se establecen el mayor número de conexiones con las sesiones previas de la ingeniería didáctica. Tales conexiones dan sentido a los métodos, que presentados sin conectarlos con una tabla de verdad los ayude a comprender la equivalencia lógica o mediante un método más cercano a la intuición en el sentido de realizar deducciones a partir de cierto conocimiento aceptado como verdadero, son métodos que confunden a los estudiantes y no son transparentes, más aún los encuentran artificiales. En el estudio exploratorio se puede ver cómo los alumnos no encuentran equivalencia en $p \rightarrow q$ y $\neg q \rightarrow \neg p$ (ver fallas en el problema de las tarjetas, reactivo 6 en el instrumento 1 A y 2 en el 2 A).

DIMENSIÓN DIDÁCTICA

Las dos sesiones del bloque se inician con la intervención del profesor, que a través de preguntas o comentarios que invitan a la reflexión, guia la realización de demostraciones, de implicaciones que ilustran los métodos indirectos de demostración: reducción al absurdo y contrapositivo, vinculando esto con las leyes lógicas obtenidas en el bloque II, hoja de trabajo # 4 (Sesión 5, tarea de desafío).
A continuación organizados en pequeños grupos los estudiantes realizan las tareas presentadas en las hojas de trabajo #9 y #10 (anexo) negociando en el seno de los equipos la extracción de significado de los elementos presentes en las implicaciones a probar, las preguntas claves y las respuestas que los llevan a construir las deducciones apropiadas y aclarando hacia dónde quieren llegar y lo qué eso significa.
Finalmente en grupo se abre un espacio de discusión para compartir las producciones y en este momento el profesor toma un rol determinante para dirigir la discusión hacia la construcción de demostraciones consistentes en el formato adecuado para ser comunicadas y negociadas.

La interacción se prevé en el mismo sentido que en el bloque anterior.

MEDIACIÓN

El medio lo constituyen las hojas de trabajo #9 y #10, y las conexiones que se realizan con las tareas del bloque I, II y III.

Capítulo 4. Implementación de la Ingeniería: Descripción y Análisis

It is important to prove, however, it is more important to improve.
Center of Mathematical Modeling and Scientific Computing (CMMSC), National Chiao Tung University (NCTU)

Este capítulo concentra el análisis de datos obtenidos durante la implementación de nuestra Ingeniería Didáctica. Después de describir los instrumentos de toma de datos, se realiza el análisis a posteriori de las sesiones desarrolladas organizadas en cuatro bloques y siguiendo las interacciones en pequeños grupos, sus registros escritos y finalmente la socialización conducida por el profesor.

4.1 Rasgos generales

La Ingeniería consta de doce sesiones organizadas en diez hojas de trabajo que los pequeños grupos debían completar. Estas sesiones fueron organizadas en cuatro bloques o etapas jerárquicas: *construcción de definiciones, iniciando la actitud y rigor matemático, métodos directos de demostración y métodos indirectos de demostración*. Tal estructura jerárquica es apropiada para nuestros propósitos en virtud de los conceptos y procesos que pueden construirse a partir de la construcción y consolidación de otros más básicos. Como veremos más adelante esta organización será un factor para elegir el modelo metodológico para analizar los procesos de abstracción.

Para la obtención de datos se realizaron grabaciones de audio de las interacciones en equipo (a excepción de la sesión 5 por olvido no intencional y de la sesión 10 por no respetarse la dinámica planeada en pequeño grupo), grabaciones de audio de la socialización con el grupo completo (excepto la sesión 5), se entregaron informes escritos de las hojas de trabajo realizadas en los pequeños grupos, se tomaron notas de campo y se tomaron en cuenta los archivos informáticos en Excel y en el software Cabri Geometry. La tabla 18 muestra la estructura y detalles de la ingeniería implementada.

Tabla 18. Estructura y detalles de la ID

I. Construcción de definiciones	
Sesión 1 (2 en el diseño). Definiciones geométricas de las cónicas	11 de junio de 2009/130 minutos/ Hoja de trabajo 2/12 alumnos de primer semestre/ 4 equipos.
Sesión 2 (1 en el diseño). Definiciones	12 de junio de 2009/100 minutos/Hoja de trabajo 1/ 23 estudiantes de diferentes semestres/9 equipos.
Bloque II. Iniciando la actitud y rigor matemático	
Sesión 3. Proposiciones	13 de junio 2009/75 minutos/Hoja de trabajo 3/ 8 alumnos/2 equipos de primer semestre
Sesión 4. Conectivos lógicos (Parte I)	15 de junio 2009/90 minutos/Hoja de trabajo 4/8 alumnos/2 equipos de primer semestre
Sesión 5. Conectivos Lógicos (Parte II)	16 de junio de 2009/70 minutos/Hoja de trabajo 4/8 estudiantes/2 equipos primer semestre.
Sesión 6. Ejemplos y Contraejemplos	17 de junio de 2009/95 minutos/Hoja 5/participación igual que la sesión anterior.
Bloque III. Métodos directos de demostración	
Sesión 7. Demostrando método avance- retroceso	24 de junio 2009/ 100 minutos/Hoja 6/8 alumnos de primer semestre/2 equipos.
Sesión 8. Práctica del método avance-retroceso	29 de junio 2009/110 minutos/Hoja 7/5 alumnos de primer semestre /1 equipo.
Sesión 9. Leyendo y entendiendo demostraciones I	29 de junio 2009/75 minutos/Hoja 8/5 alumnos de primer semestre /1 equipo.
Sesión 10. Leyendo y entendiendo demostraciones II	30 de junio 2009 / 90 minutos/5 alumnos de primer semestre/1 equipo/Hoja 8.

Bloque IV. Métodos indirectos de demostración	
Sesión 11. Reducción al absurdo	1 de julio de 2009/100 minutos/5 alumnos de primer semestre/1 equipo/ hoja 9.
Sesión 12. Contrapositivo	2 de julio de 2009/ 60 minutos/5 alumnos de primer semestre/Hoja 10.

Como se detalla en la tabla 18, para el desarrollo de las sesiones se organizó el grupo en equipos (de diferente manera) y se les entregó una hoja de trabajo donde se describían las tareas a realizar y en ella, después de la discusión en el seno del equipo, registraran los acuerdos convenidos. Estos acuerdos serían discutidos posteriormente en gran grupo en la socialización de respuestas conducida por el profesor. Como veremos, esta forma de trabajo resulta muy conveniente.

Para organizar el análisis se seguirá esta misma dinámica de construcción del conocimiento. Primero presentaremos, en cada tarea, un análisis de la transcripción de la interacción en uno o dos equipos, luego se presentará un concentrado de respuestas de todos los equipos acompañado de su respectivo análisis y finalmente se presenta la transcripción y análisis de la puesta en común de las producciones derivadas del trabajo en pequeños grupos con la totalidad del grupo y conducidos por el profesor.

Algunos de los hallazgos derivados de este capítulo han sido documentados por los autores en Alvarado & González (2013a; 2013b; 2013c; 2014) y González & Alvarado (2015).

4.2 El modelo RBC como herramienta teórica para el análisis

La comprensión de la relación entre la construcción de conocimiento por los individuos y la construcción del conocimiento compartido (de una diada, de pequeños grupos y de grupos completos) es crucial en la investigación relativa a los procesos de aprendizaje en el aula e involucra los dominios cognitivo y social. No obstante observar y analizar con detalle dichos procesos dentro de un contexto (e. g. aula) es sumamente complicado en virtud de que los datos son masivos y confusos. Hershkowitz, Hadas, Dreyfus, & Schwarz (2007) proporciona un ejemplo de investigación en la cual se analiza el flujo de conocimiento de un estudiante a otro, hasta que consiguen una base común de conocimiento. Este tipo de investigación se centra sobre los *procesos de construcción* y los *constructos* en un momento dado del tiempo, al igual que su *consolidación*. Los autores hablan de *conocimiento compartido,* si la base común de conocimiento permite a los estudiantes del grupo continuar construyendo y actualizando conocimiento de manera colaborativa en el mismo tópico. Los autores reconocen que se han basado en el trabajo de Cobb de aprendizaje colaborativo (taken-as-shared activities), pero Hershkowitz, Hadas, Dreyfus, & Schwarz (2007) van más allá en varias perspectivas:

- La micro-perspectiva: proveen evidencia detallada de las bases compartidas de conocimiento, la manera en la cual éste emerge desde los procesos individuales de la construcción de conocimiento, y la manera en la cual éstos constituyen una base compartida que permite a los estudiantes continuar construyendo mayor conocimiento juntos.
- La perspectiva de la continuidad del microanálisis: enlazan los datos y su análisis a lo largo del tiempo en varias lecciones para observar y analizar a los estudiantes construyendo nuevo conocimiento matemático en una actividad, y observar y analizar en detalle si y cómo los estudiantes usan su conocimiento en otras actividades (consolidación).
- La perspectiva teórica: consideran cómo los estudiantes van a través de un proceso de abstracción en el sentido de construir una nueva pieza de conocimiento por matematización vertical y cómo ellos interactúan con otros estudiantes en el grupo para seguir procesos paralelos de abstracción.

- La perspectiva metodológica: para analizar los puntos o perspectivas anteriores utilizan el modelo de abstracción RBC-C y muestran como el modelo es eficiente para un análisis profundo de la construcción del conocimiento compartido del grupo.

Hemos revisado la evolución de esta investigación y su modelo teórico-metodológico conocido como *Abstraction in Context (AiC)* (Schwarz, Dreyfus & Hershkowitz, 2009). En este capítulo, se revisarán los procesos de abstracción para caracterizar la emergencia de un nuevo constructo, a partir del análisis de las interacciones en pequeños grupos y en gran grupo a la luz de este modelo teórico-metodológico. Tal proceso de abstracción pasa por tres etapas: la necesidad de un nuevo constructo, su emergencia y su consolidación al utilizarlo en diferentes contextos. En éste, a las acciones epistémicas ocurridas durante la emergencia de un nuevo constructo, *Recognizing, Building with, Constructing* o bien *R-acciones*, *B-acciones* y *C-acciones* se les conoce como *modelo RBC* y modelo *RBC-**C̲*** con la segunda C correspondiente a la etapa de consolidación, nosotros en lo sucesivo denotaremos una acción de consolidación como ***C̲**-acción*.

Para entender las acciones de reconocimiento, *R-acciones*, podemos presentar algunos ejemplos ligados al desarrollo de este capítulo. En analogía con "bloques de construcción" o "deltablocks" para la emergencia de la definición de número primo, una *R-acción* puede verse como un "bloque", cuando los alumnos recurren a algunos números primos conocidos (2, 3, 5, etc) para observar sus características, o bien pensar en la división como una operación necesaria para la definición, o algún contexto o procedimiento donde han sido utilizados (cálculo del mínimo común múltiplo). Otro ejemplo que podemos citar es: cuando los estudiantes enfrentan la tarea de demostrar una proposición. Ahí algunas de sus *R-acciones* serían cuando expresan la definición o significado de los conceptos u objetos que aparecen en el enunciado de la proposición; o cuando reconocen sus componentes (hipótesis y conclusión en una implicación); o bien su estructura (implicación, bicondicional).

Las acciones para edificar o *B-acciones,* ocurren cuando se entrelazan algunos de los elementos derivados de las *R-acciones* para construir con ellos una pieza mayor (compuesta de más de un bloque siguiendo con la analogía de "bloques de construcción"). Por ejemplo, cuando los estudiantes tratan de definir número primo, ellos relacionan algunos números primos conocidos con la división: «es que estos números no tienen divisores»; o extraen significado del cálculo del mínimo común múltiplo «aquí lo importante es que cuando a un número lo divides entre 2, 3, y así aparecen los primos que ya son indivisibles». Otro ejemplo, de *B-acción*, sería cuando de la definición de los conceptos que aparecen en el enunciado de la hipótesis de una implicación, los estudiantes derivan información para avanzar en la demostración de una proposición.

Las *C-acciones,* o acciones de construcción, ocurren cuando *R-acciones* y *B-acciones* se entrelazan para reunir los elementos que permiten por primera vez expresar la definición aceptada de número primo (siguiendo los ejemplos de los parrafos anteriores), o bien en la tarea de demostrar una proposición, cuando se entrelazan *R* y *B-acciones* para expresar por primera vez la demostración completa. Si aprovechamos la analogía de los "bloques de construcción, podemos observar que una vez concretada una *B-acción*, al retomarla para ligarla con otra, esta toma ahora forma de *R-acción*. Al igual que una *C-acción* una vez terminada la definición o la demostración, cuando es utilizada en otro proceso de construcción, puede tomar forma de *R-acción* en el nuevo proceso, o bien si está vinculada al proceso donde fue construida, constituye una ***C̲**-acción* de consolidación del proceso de construcción anterior. La emergencia de un nuevo constructo (e.g una definición o la demostración de una proposición, etc) construido y aceptado en un pequeño grupo es una *C-acción*, aún cuando posea debilidades, pero al tratarse en la discusión en grupo es una *R-acción* que al contrastarla con *R-acciones* de otros pequeños grupos, da lugar a un nuevo proceso de construcción que finaliza con una *C-acción*.

4.3 Análisis del Bloque I: Construcción de definiciones

El objetivo cognitivo de este bloque es desarrollar en los estudiantes habilidades para "definir" y manipular definiciones. Para el desarrollo de la primera habilidad, se les plantean tareas dirigidas a retomar conceptos u objetos conocidos, intentando "reconstruir" sus definiciones para posteriormente compararlas y negociarlas con otros estudiantes en un proceso de socialización mediado por el profesor. Para la segunda parte del manejo de definiciones, se proponen definiciones para que encuentren los objetos matemáticos correspondientes o bien otra forma de representación.

Las tareas mencionadas se dan desde una aproximación genética o reconstructiva caracterizada por no presentar los conceptos u objetos como productos terminados, sino más bien, centrándose en procesos matemáticos genuinos mediante los cuales pueden desarrollarse o reconstruirse conceptos u objetos. Sin embargo, esta aproximación no necesariamente implica un aprendizaje por descubrimiento, en virtud de que, el profesor puede participar con una explicación reconstructiva durante la negociación en el grupo.

Para la tarea de definir se les presentan un conjunto de conceptos matemáticos (que para el análisis los hemos agrupado en geométricos y no geométricos). En relación a la formas de definir de Villiers (1998), él las clasifica en dos maneras de definir.
La primera es, *definir en forma descriptiva* (*a posteriori*), si el concepto y sus propiedades ya son conocidas con anterioridad y se define después. Para definir a posteriori por lo general se selecciona un subconjunto apropiado de propiedades, que sirve como definición, mediante el cual se pueden deducir el total de propiedades.
La otra manera es *definir en forma constructiva* (a priori) si una definición dada se modifica por exclusión, generalización, especialización, reemplazo o adición de propiedades, de modo que un nuevo concepto se construye en ese proceso. Estas formas de definir se distinguen por su función. Mientras que la función de definir a posteriori es sistematizar conocimiento existente, la de definir a priori es la producción de nuevo conocimiento. En las tareas desarrolladas en equipos principalmente se define en forma descriptiva y en la discusión orientada por el profesor se define en ocasiones en forma descriptiva y otras constructiva.

Las tareas que implican el manejo de definiciones se han presentado desde la propia definición. Es decir, no como parte de alguna tarea de demostrar o en la resolución de un problema (esto sucede en los siguientes bloques de la ID), sino más bien presentando una definición y sugiriendo que muestren diferentes objetos que correspondan con la misma y/o que construyan otra forma de representación que corresponda a la representación escrita o verbal. En la actividad de manejo de definiciones Pinto & Tall (1999) consideran que los estudiantes manejan de dos maneras distintas las definiciones formales: o bien *dando significado* a través de la consideración de ejemplos o por *extracción de significado* a través de la manipulación y reflexión sobre la definición misma. Para tener éxito usando la primera opción se requiere dirigir la reconstrucción de ideas personales y centrarse sobre las propiedades esenciales de la definición para integrarlas en la teoría formal. La segunda forma evita algunas dificultades respecto a la primera y los estudiantes terminan construyendo una teoría formal no relacionada con imágenes informales. Más aún, los alumnos pueden tener éxito o no con cualquiera de las dos formas descritas. Alcock & Weber (2005) obtienen resultados similares de estas dos aproximaciones, aunque las denominan como *referencial* y *sintáctica*. En el análisis de las producciones no geométricas de los estudiantes ampliamos esta caracterización.

En este bloque se atiende uno de los principales procesos de construcción del conocimiento matemático, el proceso es definir siendo el resultado de este proceso la definición negociada (proceso de definir/definición negociada). Aunque las definiciones tratadas son de objetos y conceptos en apariencia utilizados y dominados por los estudiantes, al tener la necesidad de "definirlos", se ven envueltos en un proceso de abstracción que pasa por tres etapas: la necesidad de acordar una definición, la emergencia de la definición negociada y la consolidación de la definición, al utilizarla en diferentes contextos. Este proceso de la reconstrucción de definiciones matemáticas se analiza, como mencionamos en el apartado anterior, a la luz del modelo teórico-metodológico *Abstraction in Context (AiC)* (Schwarz, Dreyfus & Hershkowitz, 2009) y las acciones epistémicas correspondientes al *modelo-RBC*. La palabra reconstrucción se utiliza puesto que se trata de definiciones en apariencia ya dominadas, pero para las que es necesario ascender desde lo concreto, desde las formas vagas y ambiguas a definiciones consistentes. En este sentido en el *método de ascender desde lo concreto* (Davydov, 1990), la abstracción comienza como una forma inicial simple, vaga, no desarrollada y ausente de consistencia. El desarrollo de abstracción procede desde el análisis de la etapa inicial, a la síntesis para llegar a una forma elaborada.

El bloque consta de dos hojas de trabajo: (1) la primera destinada a la reconstrucción de definiciones de conceptos matemáticos sugeridos y también a generar ejemplos de objetos en correspondencia con una definición dada; (2) en la segunda, se pretendía que intentaran construir dos representaciones de un mismo objeto matemático (mediatriz de un segmento), una descripción sintética o definición y una representación visual de manera articulada. Luego, partiendo de las definiciones de las cónicas como lugares geométricos, se esperaba que construyeran una representación visual de cada una en un ambiente de geometría dinámica.

En principio, al profesor, que aplicó la ID, le pareció que la primera hoja de trabajo era innecesaria por ser demasiado elemental y sencilla. Decide entonces, comenzar con la segunda hoja, que suspende después de la exploración y construcción de la parábola, una vez que se convence de la dificultad que representa para los estudiantes manejar las definiciones y el lenguaje matemático. Posteriormente, decide implementar la primera hoja para retomar a continuación la segunda. Aunque en el análisis se consideró este inconveniente se respeta el orden inicial.

4.3.1 Análisis de la Hoja de trabajo #1: Definiciones

La sesión correspondiente a esta hoja de trabajo se llevó a cabo el 12 de junio de 2009. Para realizar la tarea los alumnos debían trabajar en pequeño grupo durante 45 minutos. Dicha tarea consistía en 12 conceptos, para los que debían construir, de la manera más precisa, sus definiciones. Además, incluía dos apartados adicionales donde se les solicitaban ejemplos de objetos a partir de las definiciones de número feliz y número primo feliz.

Posteriormente se efectuó la socialización en gran grupo durante 56 minutos, aunque inicialmente se pensó que 20 minutos serían suficientes. Sin embargo, dada la riqueza de las aportaciones y la necesidad de discutir las debilidades encontradas, para poder afinar y modificar de manera conveniente las definiciones se decidió, y fue posible, extenderse. La dinámica impuesta por el profesor, la mayoría de las veces, permitía la participación de los alumnos y su intervención se limitaba a cuestionar sobre el lenguaje que ellos utilizaban, por ejemplo: «3.M-"ascendiendo", qué significa eso», o bien, cuando identificaba alguna debilidad provocaba que enfrentaran el conflicto y los obligaba a precisar cada vez más la definición.

Aunque en las siguientes sesiones participan sólo alumnos del primer semestre de la licenciatura en Matemáticas Aplicadas de la UJED, en esta sesión participaron 23 alumnos, por lo que el grupo se dividió en 9 equipos de 2 o 3 estudiantes; de esos 9 equipos, 4 (**A**,**B**,**C**,**D**) eran del primer semestre y los 5 restantes (**E**,**F**,**G**,**H**,**I**) eran de diferentes semestres.

La presentación y análisis de la hoja 1 lo realizamos en dos apartados distinguiendo entre las definiciones no geométricas y las geométricas, aunque en la sesión se trabajaron dichas definiciones de manera alternada. En cada apartado se caracterizan y analizan en primer lugar, las definiciones que reconstruyeron los estudiantes en equipos, posteriormente algunas interacciones seleccionadas de los equipos y finalmente la socialización en gran grupo. Las interacciones seleccionadas para el análisis fueron las de los equipos del primer semestre (**A**,**B**,**C** y **D**), dado que son los alumnos que participarán en todas las sesiones de la Ingeniería. De estos equipos, se eligieron los que aportaban elementos interesantes para el análisis. Si una producción es discutida ampliamente en la socialización y la interacción en el equipo pero no aporta más elementos que los encontrados en la socialización no será incluida en el análisis evitando la repetición. Cabe mencionar también que cuando se presenta el análisis de los diálogos del equipo **A** se captan fragmentos, que ocurren antes o durante la socialización, donde se realiza una comparación intencional o casual con las producciones de otros equipos y que la mayoría de las veces este hecho provoca un cambio en sus respuestas. La explicación de que esto no aparezca en otros equipos es que al finalizar el trabajo en equipo se apagaron las grabadoras de audio dejando únicamente una para registrar la socialización. Sin embargo la grabadora del equipo **A** se dejó encendida, sin planearlo, y esto nos permitió explorar en el impacto que tiene el comparar respuestas con otros equipos.

En relación a la codificación utilizada para el análisis, distinguiremos las acciones de construcción de un concepto, es decir cuando por primera vez sea enunciado de manera consistente, con una C seguida de subíndices para indicar a qué equipo corresponde la construcción y el segundo subíndice indica el número de acción de construcción. Por ejemplo, si ocurre una tercera C-acción o acción de construcción y la realiza el equipo B, aparecerá indicada como C_{A3}.
En cuanto a la numeración de las interacciones se iniciará en 1 y continuaran en orden ascendente con un nuevo número cuando cambia de estudiante. Como se colocan en cada mesa de trabajo grabadoras de voz, en el análisis de las interacciones en cada equipo se seguirá el mismo método de numeración durante toda la sesión. Por esta razón nos encontraremos con transcripciones de diferentes equipos con la misma numeración. También con frecuencia encontraremos que los alumnos realizan una tarea, continúan con otras y en algún momento retornan a las tareas, razón por la cual, en el análisis acerca de la resolución de una tarea al citar la numeración de transcripciones se notaran cambios significativos que romperán la continuidad de la numeración. En el caso de la socialización, se iniciarán también en 1 y seguirán en orden ascendente.

4.3.1.1 Definiciones no geométricas

De acuerdo con Weber & Alcock (2004, 2009) y Weber (2009) el razonamiento en matemáticas avanzadas puede ocurrir, al menos, de dos maneras cualitativamente diferentes: 1) centrado en el formalismo y la lógica, comenzando con definiciones, axiomas, utilización de manipulación lógica y deducciones formales para producir nuevos teoremas o resultados; o bien, 2) enfocado en representaciones informales de conceptos matemáticos (diagramas, gráficos, gestos o ejemplos prototípicos) y utilizar dichas representaciones como base para el razonamiento matemático.

Distinguen además entre el *razonamiento sintáctico* inherente a un sistema de representación de demostración, para designar el conjunto de caracteres primitivos (letras, palabras, números, símbolos lógicos) y una estructura sintáctica (reglas para combinar los símbolos, para formar configuraciones permitidas y desplazarse entre tales configuraciones) y el *razonamiento semántico* asociado a cualquier otro sistema de representación (diagramas, gestos, ejemplos, gráficos, etc).

Dentro de este marco clasificamos las definiciones en *sintácticas* y r*eferenciales* para categorizar las definiciones que reconstruyen los alumnos a partir de otras ya conocidas y utilizadas previamente. Las definiciones referenciales se corresponden con el razonamiento semántico y el término señala el sistema de representación al que se refiere. (la misma definición u otra, un procedimiento, un diagrama, etc). Además, en ambos casos, incluimos al final de las definiciones de los equipos atributos, tales como:
a) En relación al tipo de lenguaje utilizado: *cotidiano, simbólico, mixto o formal*.
b) Si la definición presentada es *no económica* (de Villiers, 1998), es decir si se incluyen en el texto propiedades que pueden excluirse sin que afecte al enunciado, por ser innecesarias o bien porque son deducibles de otra parte del enunciado.
c) Si la definición es *correcta*, dado que determina unívocamente al objeto matemático en juego, incluye todos los casos u objetos y se presenta libre de incoherencias y errores.
d) Si la definición es *parcial,* es decir es correcta en un dominio restringido; determina unívocamente al objeto matemático excluye casos particulares u objetos. Por ejemplo en la definición de número primo el grupo **E** dice «número que no es divisible por ningún otro número excepto 1 y sí mismo», la definición es consistente para los enteros positivos y, como más adelante veremos, éste es un dominio que en la práctica corresponde al situado.
e) Cuando aparece el atributo *incoherente* significa que se percibe una falta de conexión, relación o unión de unas palabras o ideas con otras. Es decir presenta debilidades lógicas.
f*)* Las definiciones *ambiguas* son las que pueden entenderse de varios modos o admitir distintas interpretaciones y dar, por consiguiente, motivo a dudas, incertidumbre o confusión.

A) Reconstrucción de las definiciones de número par e impar

En los pequeños grupos se realizó la reconstrucción de las definiciones de número par e impar. A continuación se muestran las interacciones de dos de esos equipos, **A** y **C**.

La interacción en el equipo **A** se inicia reconocimiento la necesidad de la noción general de múltiplo (*R-acción*), con la consideración errónea de *n* como número real. Al pedir una aclaración [2], que actúa como mediador en la modificación de la definición construida, se produce una *C-acción* [3] ($\mathbf{C_{A0}}$): la primera definición de números pares como múltiplos de 2. Tratar de explicar las definiciones mediante la repetición, propicia que el lenguaje se vaya precisando cada vez más y permite identificar que *n* debe ser entero en la expresión que representa a los números pares.

[1] Son todos los números múltiplos que se pueden ver de la forma *na*, para *n* real

[2] Cómo, se pueden qué
[3] [corrige] Ver de la forma *2n*, para *n* real. Bueno, más bien con *n* entero

Se establece una equivalencia entre [3] y [4] aunque un estudiante plantea un problema con el "cero" que se comporta de manera diferente [6]. Tiene lugar una *R-acción,* decidir si pertenece o no al conjunto en juego, no está claro si se considera múltiplo de 2 o bien no considera que tenga la forma requerida [*2n: n* entero]. Más aún para un tercer estudiante [7] el 0 no es número par ni impar y el silencio es entendido como exclusión del 0. A la luz del conflicto se percibe la necesidad de un nuevo constructo (primera etapa en el modelo AiC): la definición apropiada de número par.

[4] Vendría siendo como cualquier múltiplo de 2
[6]Ajá, sí // Sí, pero el cero no está
[7] No el cero no es par ni impar, bueno yo digo. Eso tengo entendido ( )

Aunque han construido una definición aceptada en el grupo [3], se aprecia una disposición para escuchar y compartir otras aportaciones [4 y 15]. Identificar al cero como caso crítico y discutir su inclusión en la definición es una *B-acción*. Además los estudiantes producen otra manera de decir lo mismo [8] lo que clarifica el significado y amplia la imagen del concepto.

[8] Y luego, bueno, es casi lo mismo. Cualquier número entero que se divide entre *2* y me sigue dando un número entero. Sí, ¿no? [asienten comentando que sí es casi lo mismo]
[14] [Risas] un número par que qué
[15] Un número que es múltiplo de 2*.* No, espérame, un número que tiene la forma *2n*, donde *n* es un número entero.

Casualmente se produce una comparación (causal o intencional) con otros equipos. Al escuchar la definición de otro equipo se activa un ejemplo [287], «0 entre 2 es igual a 0» que se usa (*R-acción*) para disipar las dudas sobre su inclusión en la definición. Se verifica que encaje en las definiciones antes discutidas para decidir que sí es o no par (*B-acción*). Las normas establecidas de manera implícita permiten una discusión rica con la que se acuerda que «0 está en los enteros». Así en [291] tiene lugar una *C-acción* ($\mathbf{C_{A1}}$), en la que construyen aparentemente la misma definición, $\boldsymbol{C_{A0}}$ en [3], pero ahora son conscientes de que deben incluir al *0*. Nuevamente al escuchar otra definición [294], diferente de las comentadas, vuelven a probar que funcione con el *0* (caso crítico) para validarla.

[287] [Retomando la discusión más tarde al escuchar casualmente a otro equipo] *0* entre *2* es igual a *0.*
[289] Sí. En estas definiciones sí seria par [el cero] Sí es par [otro estudiante apoya la idea]
[291] Creo que si consideramos al cero como un número entero sí sería par
[292-293] Sí ¿Cero? ( ) // Sí,
[294] Este menos *2*, cero [al ver que son pares los números obtenidos al sumar y restar *2* a partir del *0*]

En cuanto al equipo **C** se observa una *R-acción* al invocar la división para reconstruir la definición de número par y una *B-acción* al comprobarla con ejemplos de números pares [6] como el *10* convenciéndose de que "se puede dividir" entre otros además de entre él mismo.

[3] Entonces un número par es aquel que se puede dividir entre él
[4] Y otros [otro estudiante cuestiona] Y otros?
[6] Sí, porque por ejemplo el *10* se puede dividir entre él, entre *5*, entre *2*

Comprueban la definición con otro número par [12] y verifican la conjetura expresada en [9]. Son conscientes que cuanto mayor sea el número divisible entre *2*, mayor número de divisores tendrá.

[7-8] Y así. Como va subiendo, bueno,…
[9] Y sí, mientras va subiendo, mientras más grande es el número entre más números se puede dividir
[10] A ver, otro par
[12] El *18*, entre el *18*, entre el *9*, entre *2* [otro estudiante pide ensayar más valores] Entre que más

Hasta el momento se puede ver una generalización basada en patrones de resultados (RPG) (y no en procesos (PPG)[28]. Los ejemplos anteriores [por lo menos] conducen a una conjetura [14] y para verificarla recurren nuevamente a comprobarla con ejemplos *B-acciones*.

[14] Todos los números pares se pueden dividir entre 2 ¿no? [contesta otro estudiante] Sí, creo que sí
[16] A ver espérame [ensayan] el 2 sí, el 4 sí, 6 también, el 8, 14 también

Ocurre nuevamente una *B-acción* al ligar lo anterior [3 y 14] con el hecho de que 2 es primo [22, 23 y 27] y producen la "definición" expresada en [18 y 26]. Se puede apreciar que establecen similitudes con la definición de número primo, ambos tienen dos divisores [26 y 27], sin embargo, hay un problema con el manejo de los cuantificadores.

[18] Entonces número par [escribe] Es aquel que se divide, que se puede dividir entre…¡ah no!
[20] Entre sí mismo
[21] Y otro número
[22] El número 2 no dijimos
[23] Entre 2 ¿no?
[24] Qué le vas a poner acá
[26] Entre sí mismo y entre 2
[27] Entre 2 ¿no?, es primo

Aunque se presenta una objeción [29] un estudiante [30] evita la discusión que conduciría a una comunicación efectiva. Otra integrante adopta el rol de mediadora [31] verificando que los números "puedan dividirse" entre ellos mismos y entre 2 en los ejemplos vistos anteriormente: 10, 18, 2, 4, 6 y 8.

[28] El número y el ¿?
[29] No pero aquí lo que cuenta…
[30] Yo quiero ponerlo
[31] Qué pusiste [otra integrante revisa]
[32] Sí está bien mira [señala los ejemplos] todos los números pueden dividirse entre el mismo y entre 2

Aunque han verificado la definición con los ejemplos, para la alumna que había objetado no es suficiente [29] y produce otra definición [33] que se tiene en cuenta en el equipo y que podemos considerar como una *C-acción* ($\mathbf{C_{C0}}$). En este momento pasan a la siguiente definición de número impar que se construye [35] sin discusión alguna derivada directamente de la anterior [26] por la estudiante que toma el rol de autoridad.

[33] Los pares son los que van de dos en dos ((Ra)) Porque el 4, el 6, el 8 van de dos en dos
[35] [Para número impar] Sólo se pueden dividir entre el mismo y entre 1

[28] Harel (2001, p. 191) distingue dos tipos de generalización: basada en patrones de resultados (RPG) y basada en patrones de procesos (PPG). La primera se centra en la regularidad de los resultados y la segunda en la regularidad de los procesos. Esto se discute de manera más amplia en el marco teórico.

En esta interacción en el equipo **C** podemos concluir que aún en las situaciones más simples los alumnos utilizan ejemplos como verificadores y derivan conjeturas a partir de los resultados y no de los procesos. Podemos concluir también que para construir las definiciones visualizan las similitudes entre los ejemplos que han sugerido y no las diferencias[29]. De la misma manera exploran las similitudes con otras definiciones y no las diferencias (percibiendo además dificultades con los cuantificadores) lo que deriva en definiciones inconsistentes.

En la figura 25 vemos que el equipo **C** utiliza como referente la definición de otro concepto y establece conexiones para negociar las definiciones de números par e impar.

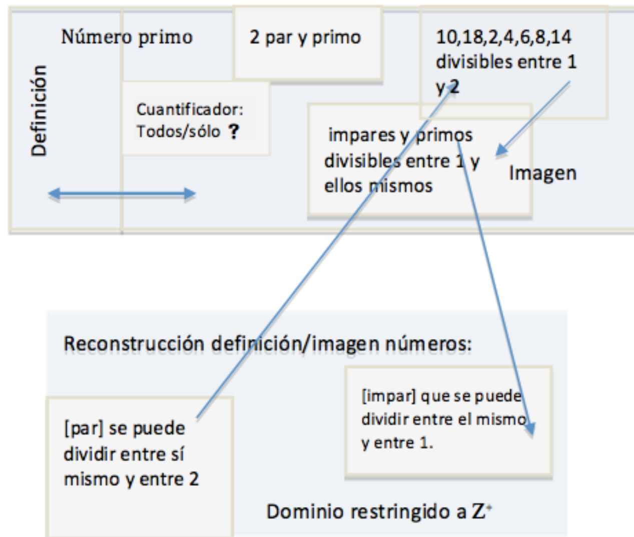


Figura 25 Usando definición de número primo para construir definición de par e impar

La tabla 19 presenta el conjunto de las producciones escritas generadas durante el trabajo en todos los pequeños grupos acompañado de un análisis.

Tabla 19. Producciones escritas y análisis del trabajo en equipos

	Número par	*Número impar*
1. Referencial (66.6 %) /(55.5%)	*1a) a procedimiento (44.4%)* $\boxed{B}$ Es un número que está en los enteros tal que su división por dos es exacta. (*n/2=p donde p* $\in Z$). [lenguaje mixto-correcta-no económica] $\boxed{E}$ Todo número entero tal que al dividirlo entre *2* su residuo es 0 [lenguaje cotidiano-correcta] $\boxed{I}$ Es aquel que es divisible entre *2* o que es *0* [lenguaje cotidiano-no económica-correcta] $\boxed{D}$ Son los números que van ascendiendo de *2* en *2* a partir del 0. [lenguaje cotidiano-parcial] *1b) a otra definición (22.2%)* $\boxed{C}$ Es aquel número que se puede dividir entre sí mismo y entre dos. [definición(primo)-lenguaje cotidiano-ambigua-no económica] $\boxed{H}$ Son todos los números múltiplos del número 2. [lenguaje cotidiano-correcta]	*1a) a procedimiento (33.3%)* $\boxed{B}$ Es un número que está en los enteros tal que su división por dos deja residuo 1. [lenguaje cotidiano-correcta] $\boxed{H}$ Son aquellos números que al dividirse entre el *2* o múltiplos del *2* queda residuo *1*. [lenguaje cotidiano-no económica-ambigua] $\boxed{D}$ Son los números que van ascendiendo de *2* en *2* a partir del *1*. [lenguaje cotidiano-parcial] *1b) a otra definición (22.2%)* $\boxed{C}$ Es aquel número que se puede dividir entre el mismo y entre *1*. [refiere definición de primo-lenguaje cotidiano-incoherente] $\boxed{E}$ Todo número que no es par. [lenguaje cotidiano-correcta]

[29] (Vinner S. , The role of examples in the learning of mathematics and in everyday thought processes, 2011, p. 248) establece que el proceso de formación de un concepto involucra dos mecanismos cognitivos. El primero es el de identificar similitudes, la mente distingue en qué se parecen dos objetos y; el segundo consiste en distinguir las diferencias.

2.Sintáctica (33.3%)/ (44.4%)	$\boxed{\text{A F G}}$ Son todos los números que se pueden escribir de la siguiente forma: *2n* donde *n∈Z,* $\{2n / n\in Z\}$ [lenguaje formal-correcta]	$\boxed{\text{A F G I}}$ Son todos los números que se pueden escribir de la forma: *2n+1* para *n∈Z.* $\{2n+1 / n\in Z\}$ [lenguaje formal-correcta]

La mayoría de las definiciones son referenciales para número par (66.6%) y para número impar (55.5%). En ambos casos se construyen de forma mayoritaria a partir del referente a un procedimiento y a partir de otra definición.

Dadas las similitudes de las definiciones de los dos conceptos nos concentraremos en el caso de la definición de número par. En los equipos **A**, **F**, **G**, **D** y **H** se centran en la noción de múltiplo, en concreto los grupos **A**, **F** y **G** (*definiciones correctas*) apoyan su definición con lenguaje simbólico apropiado, lo que puede ser debido a que los estudiantes de los grupos **F** y **G** no son de nuevo ingreso y ya están familiarizados con esta notación. En el caso del grupo **H** producen una definición *ambigua* dado que el uso del conectivo "o" tiene interpretaciones distintas en el lenguaje matemático y en el lenguaje cotidiano. En matemáticas tiene un significado no excluyente, y cuando se quiere utilizar como excluyente la expresión utilizada es "o bien …o bien". En el lenguaje cotidiano el significado es excluyente, que es el sentido que dan los estudiantes por lo que admite más de una interpretación resultando ambigua. Además se considera *no económica* porque en el texto se puede prescindir de «… o múltiplos del *2…* ». En cuanto al grupo **D** se da una definición *parcial* que no incluye a los pares negativos y está expresada en un lenguaje cotidiano.

Por otra parte, también en relación con los números pares, los grupos **B**, **C**, **E**, **I** apoyan su definición en la noción de divisibilidad. En el caso del grupo **C**, señalan que número par *es aquel número que se puede dividir entre sí mismo y entre dos*, es decir, sobra la parte sombreada. Además el significado de la expresión «que se puede dividir» da lugar a más de una interpretación y por tanto se considera *ambigua.* Posteriormente en la discusión en gran grupo nos encontraremos que el significado de «se puede dividir» corresponde a que la división sea exacta. Cabe decir también lo innecesario de indicar que *1* sea divisor para decidir que el número sea par.

En cuanto a las definiciones de los grupos **B** y de **I** se clasifican como *no económicas correctas*. Tales aportaciones se caracterizan porque el texto sombreado no aporta información adicional, es decir, se puede derivar del resto del texto o bien se ha incluído en él de manera implícita. Sin embargo, aún y cuando la definición que producen los equipos es correcta, este tipo de sutilezas implican un razonamiento deductivo. En el caso de la respuesta dada por **B**, se agrega que «el número está en los enteros» y no se percibe que esto se derive del hecho de que el cociente de la división entre dos es exacto. Por su parte, en la definición del grupo **I** , *es aquel que es divisible entre 2 o que es 0*; podemos concluir que presenta una definición correcta y se aprecia en las respuestas a las definiciones posteriores (número impar y divisibilidad) una clara comprensión de cuándo un número es "divisible" entre otro. Sin embargo, aunque incluyen al cero en los números pares, no consideran que sea también divisible entre dos y tal vez tampoco lo consideran múltiplo de dos. El criterio de incluir al cero puede estar relacionado con la imagen visual de los espacios ocupados por los números pares y con el tamaño de los saltos en la recta numérica más que con el hecho de que sea un ejemplo prototípico de número par en el contexto escolar. En el caso del grupo **I** consideran el cero como un caso aparte de manera explícita, no obstante la definición del equipo **A**, aunque aparece como sintáctica en la clasificación, en la discusión dentro del equipo se observa la duda de si el cero es o no par.

A continuación se presenta la discusión en gran grupo de las producciones anteriores. Como hemos visto antes, el trabajo en equipos permite una relación entre interacción y aprendizaje, que proporciona de manera simultánea avances y limitaciones. Algunas limitaciones del trabajo en equipos se superan durante la discusión en grupo dado que se amplía a un grupo mayor de participantes, entre ellos el profesor. En la discusión se pueden recuperar aspectos o puntos de vista ignorados en el equipo (e.g. la definición alternativa de número par dada por el estudiante del equipo **C** que no fue tomada en cuenta). Todas las producciones se generan en grupo, es decir, se parte de las respuestas de los alumnos y se van modificando de acuerdo a sus aportaciones, aunque sean inducidas por cuestionamientos del profesor. Aquí el profesor tiene un rol como mediador en la activación y avance de los procesos de aprendizaje.

Para el análisis, la socialización se ha dividido en cinco fragmentos de acuerdo a la discusión en torno a las diferentes ideas principales Para documentar cómo ocurre el proceso de construcción de las definiciones se utiliza el modelo RBC-**C**.

Al principio de la socialización [2-9; 21-25] de la definición de número par se parte de la definición del equipo **D**, posteriormente en los fragmentos [13-26] se discute sobre la definición de **C** y extendiendo su significado entra en juego la producción previa del equipo **E**. Finalmente, el profesor discute las producciones de **A**, **F** y **G** para construir otra definición de par.
La idea principal del fragmento [2-9], es partir de la construcción de una definición espontánea y de naturaleza intuitiva, una lista de números que inicia en 0 y se van incrementando en 2 aunque la definición previamente fue discutida en equipo necesita cambios importantes.

[2] Alumnos: Son los números que van ascendiendo de 2 en 2 a partir del cero [Equipo **D**]
[3] Profesor: "Ascendiendo", ¿qué significa esto?
[4] As: Que va subiendo
[5] P: A ver expliquen
[6] As: Que vamos sumando o agregando
[7] P: Por ejemplo ¬ [responde un alumno] 2,4,6,…
[9] P: […]Entonces, son los números a los que se les va sumando 2 a partir del 0. […]

En el fragmento vemos que se parte de una construcción previa $\mathbf{C_0}$ [2] que es equivalente a una *C-acción* del equipo **C** ($\mathbf{C_{C0}}$ línea 33 de la interacción). En [3] el profesor demanda explicación del significado "local" de las palabras empleadas con el propósito de clarificar el lenguaje utilizado y buscar la manera apropiada de escribirlo. Esto constituye una *R-acción* de la necesidad de un lenguaje común al grupo. La explicación ofrecida por los alumnos utilizando diferentes palabras y ejemplos como mediadores para clarificar constituyen *B-acciones* que los conducen a la *C-acción* [9] como un primer intento de definición en gran grupo ($\mathbf{C_1}$), que de momento no se acepta ni rechaza en espera de otras "definiciones" para ampliar la discusión. Resumiendo, en esta parte para clarificar el lenguaje, se observó la demanda de explicación y la solicitud de ejemplos.
En el fragmento [21-25] vemos que no hay una participación de los alumnos, el profesor exhibe las debilidades de la definición, la completa y formaliza. Cabe destacar que, aún y cuando respeta la idea inicial de los alumnos, toma el papel de autoridad para extender el conocimiento en una *forma constructiva* de definir de acuerdo con (de Villiers, 1998).

[21] Profesor: [Retomando] Entonces para la definición de número par tenemos hasta el momento 2 opciones: 1)Esto de ir ascendiendo se llama progresión aritmética, parto de un número, en este caso 0, y vamos agregando siempre la misma cantidad, en este caso, dos. Por otra parte […]
[22] P: Pero resulta que únicamente obtenemos los pares positivos, así que para completar con los pares negativos, hacia la izquierda voy restando.

[23] P: Pero eso de ir "ascendiendo" es una palabra muy ambigua. Vamos a acostumbrarnos a que en matemáticas debemos ser muy precisos.
[24] P: En este caso podemos definirlo como la sucesión de números enteros, donde partiendo del 0 vamos sumando y restando 2 unidades. Esto se vería como [escribe] $\{....-8,-6,-4,-3,-2,0,2,4,6,8,...\}$
[25] P: formalizando $\{0\pm 2n \mid n\in Z\}$. Esto quiere decir que *n* es un entero o *n* varía en los enteros.

En esta intervención el profesor exhibe una *R-acción* al reconocer que falta incluir a los pares negativos y la importancia del lenguaje. A partir de esto se da una *C-acción*, $\mathbf{C_2}$ en [24] y ocurre una nueva *C-acción* $\mathbf{C_3}$ [25] como extensión de la anterior. En el fragmento observamos que se cierra la posibilidad de interactuar con los alumnos. Aquí observamos que C_2 y C_3 son acciones que concreta el profesor y no son propiamente construcciones de los estudiantes. No obstante, hemos decidido incluirlas dado que en Hershkowitz et al (2007), investigación en la cual presentan el modelo teórico-metodológico RBC-C, consideran que la construcción del conocimiento compartido en ensambles (entendidos como diadas, pequeños grupos o gran grupo) el profesor puede o no estar incluido en el ensamble.

En el fragmento [10-13] la idea principal de la discusión es decidir sobre los divisores de los números pares. Y, como ya se discutió antes en la interacción del equipo **C**, se centran en explorar similitudes ignorando las diferencias con respecto de otros números no pares que les permitirían en un momento dado identificar las «características exclusivas».

[10] Alumnos: Son los números que se pueden dividir entre sí mismos y entre el 2 [Equipo **C**]
[11] As: Y el 1 [lo cuestiona otro alumno] Y el 1 qué?
[13] Profesor: A ver revisemos. ¿Necesitamos decir que se "puede dividir" entre el mismo y entre el 1? En realidad cualquier número se puede dividir entre sí mismo y 1. Entonces esta no es una característica exclusiva para los números pares. Veamos entonces, qué distingue a los pares

A diferencia del fragmento anterior, sí hay participación de los alumnos. No obstante en [13] aunque hay una demanda genuina (en términos del lenguaje utilizado por los alumnos) que invita a reflexionar si es necesario decir que el 1 y el mismo número sean divisores, el profesor no espera el tiempo suficiente una respuesta y la ofrece él mismo.

En el fragmento [14-26] la idea principal es identificar un número par en función de su residuo al dividirlo entre 2.

[14] Alumnos: Que los pares se pueden dividir entre 2
[15] Profesor: Exacto, pero [...]tenemos un problema, por ejemplo, yo puedo dividir 3 entre 2 ¿cierto?
[16] As: Sí
[17] P: Entonces afinemos en la palabra dividir
[18] A: Lo que me interesa es que la división me dé un entero
[19] As: Sí, que no tenga decimales [un alumno del equipo **E** interviene] Que me dé cero el residuo
[26] P: La opción 2) Un número que al dividirlo entre 2 su residuo es [un alumno reponde] Cero

Encontramos que derivada de la reflexión que ocurre en el fragmento anterior, se activa una *B-acción* [14] al mencionar una característica exclusiva de los números pares. En [15-17] se producen *R-acciones* al demandar una *negociación de significado*[30]. Para algunos estudiantes el significado de «se puede dividir» es expresado en *B-acciones* como que el cociente sea entero [*18 y 19*] y que

[30] práctica que en matemáticas no es usual ya que las definiciones son estipuladas, pero que en educación matemática es recomendada.

el residuo sea 0 [20]. Estas *B-acciones* juntas completan el significado. Es interesante destacar que la frase, «se puede dividir», aparece reiteradamente en las interacciones de los equipos. No obstante, los alumnos durante su educación básica realizaban divisiones donde el cociente es un decimal. Este hecho lo podemos atribuir a que cuando se divide, por ejemplo 3 entre 2, es común escuchar que los niños dicen «no se puede» o «no cabe» entonces toca a 1 y sobra 1; y como podemos ver esta manera espontánea de uso del lenguaje se mantiene hasta el nivel universitario. Por otra parte, vemos que aunque se discute sobre las aportaciones de **C** y **D**, el profesor orienta la discusión para tratar la definición producida previamente en el equipo **E** ampliando con ello la definición del concepto, *C-acción* $\mathbf{C_4}$ [26]. En el fragmento [28-42] el profesor aborda las producciones de **A**, **F** y **G** para construir otra definición de número par.

[28] Profesor: […]se fijan que la primera definición aunque es correcta tiene algunas palabras que cuesta trabajo escribirlas claramente. […] la idea es […] definir las cosas de la forma más clara y simple posible.

[29] P: A ver, que pasa si divido 10 entre 2, a cuánto toca y cuánto sobra ¬

[30] Alumnos: 5 y sobra cero

[31] P: Entonces digo que es par. Recuerden cuando estaban en primaria que les decían: "revisen su operación a ver si está bien." ¿Qué operación tenían que hacer? ¬

[32] As: La operación inversa de la división, que es la multiplicación más lo que sobra

[33] P: Por ejemplo aquí, en este caso 2*5+0, como el residuo es cero simplemente ponemos 2*5 y decimos que 10 tiene la forma 2*5. Entonces los números pares qué forma deben tener ¬

[34] As: 2 por "algo"

[35] P: 12 tendrá la forma 2 por "algo" ¬[responden los alumnos] Sí 2 por 6, así que es par

[37] P: 13 tendrá la forma 2 por "algo" [responden los alumnos] No

[39] P: Entonces los números pares qué forma tienen [contesta un alumno] 2 por un entero

[41] P: […] tenemos otra definición *los números pares son aquellos que tienen la forma 2n donde n es un entero* [escribe] Los números pares son de la forma $\{2n \mid n \in Z\}$. Lo de $n \in Z$ se interpreta como *n* variando en los enteros […]. Esta es la forma clara de decirlo y sino tiene esta forma qué pasa ¬

[42] A: Pues no es par

Aunque antes se obtuvieron definiciones de número par aceptadas por el grupo, en este fragmento la idea principal es lograr una definición sintáctica como una *forma constructiva* de definir.

Para construir la definición de número par [41] tiene lugar la *C-acción* $\mathbf{C_5}$, el profesor edifica sobre *B-acciones* provocadas y orientadas. Estas *B-acciones* se presentan como cadena de ejemplos: [29 y 30], [31 y 32], [33 y 34], [35 y 36], [37 y 38], [39-41]. Donde se transita de un ejemplo particular [29], de un procedimiento [30], hasta construcciones genéricas [39, 40], pasando por la verificación que garantiza que se identifican y descartan no ejemplos [37,38].

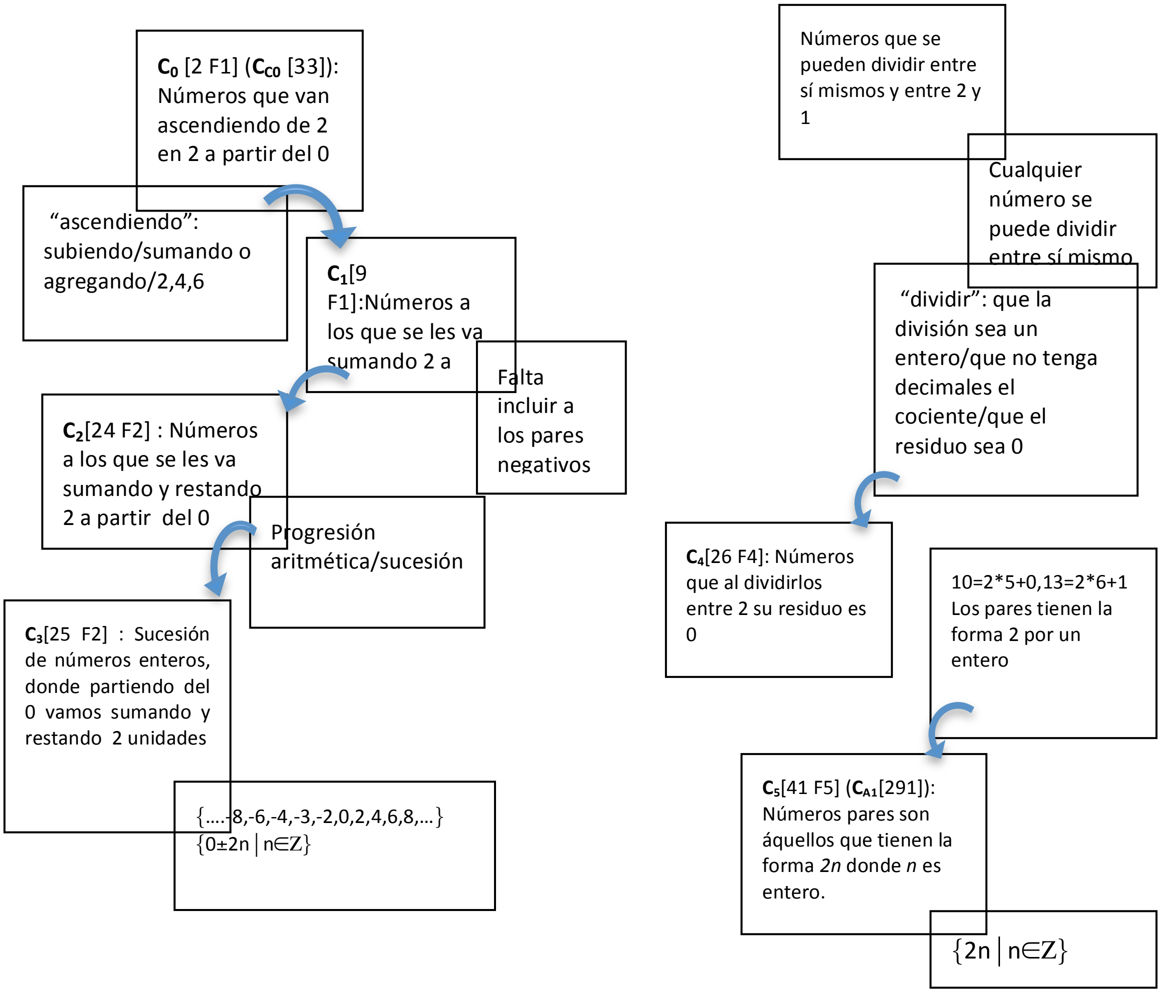


Figura 26 Definiciones de número par producidas en los equipos C y D

Se destaca también que es posible la producción de una definición sintáctica en gran grupo dado que se enfoca la generalización de patrones sobre la regularidad de los procesos (*PPG*)[31] y no de los resultados de cada ejemplo. Primero se discutió acerca de las producciones de los grupos **C**, **D** y **E**, y luego se abordan las de los grupos **A**, **F** y **G**. Cabe destacar que esto requiere de la observación del profesor en las interacciones entre los equipos para orientar una socialización efectiva.

A manera de resumen, en las figuras 26 y 27 se presenta la socialización de las dos definiciones de los equipos **C** y **D**, así como la transformación de la definición del equipo **E** a las definiciones de **A**, **F** y **G**. señalando cómo éstas se van transformando al reconocer las debilidades del lenguaje y al emprender *B-acciones* para formar las bases sobre las que descansa la definición y su construcción. Tal transformación deriva en nuevas definiciones, convenidas para salvar debilidades y construidas a partir de acciones y de asociaciones hechas a partir de la discusión entre el profesor y los estudiantes.

[31] En este sentido Harel (2008) y Pedemonte & Buchbinder (2011) puntualizan que sólo los estudiantes que generalizan a través de los *PPG* proponen los argumentos requeridos para la construcción de demostraciones por inducción matemática.

[Profesor-Equipo E] Un número que al dividirlo entre 2 su residuo es cero

[Profesor-Alumno]
R-acciones y *B-acciones*
1) 10 entre 2, toca a 5 y sobra 0⇒ es par
2) Qué verifica una división? Multiplicación más residuo
3) 12 tiene la forma 2*6⇔ es número par
4) 13 no tiene la forma ⇒no es número par
5) 2*5+0 ⇔ 2*5 ⇒10 tiene la forma 2*5⇒los números pares tienes la forma 2 por "algo"
6) Números pares ⇔2 por un número entero

[Profesor-Equipos AFG] Los números pares son de la forma $\{2n \mid n \in \mathbb{Z}\}$. ***$C_5$***

Figura 27. Transformación de la definición construida en C_4 a la obtenida en C_5

En las figuras 26 y 27 se utiliza: ***C_i*** para identificar las definiciones construidas (*C-acciones*) en la socialización, **C_{Ai}** para indicar las definiciones construidas en el equipo **A** y **C_{Ci}** en **C**. En los recuadros asociados a las *C-acciones* se presentan las *R-acciones* y *B-acciones* que permiten la construcción de las definiciones de número par. Los subíndices indican el orden de aparición y los números entre corchetes la línea de transcripción donde aparece y el fragmento en el caso de la socialización en gran grupo (F1 corresponde a 2-9; F2 a 14-26; F3 a 28-39).

B. Reconstrucción de la definición de divisibilidad

La tarea propuesta a los estudiantes fue completar el siguiente enunciado: *Un número a divide a un número b cuando…*

Primero tiene lugar la discusión en pequeños grupos. Revisaremos la interacción en el equipo **A** en la que podemos apreciar que cuando la entidad lingüística "divide" entra en juego los alumnos activan todas las situaciones y el criterio de selección con frecuencia está vinculado al uso reciente de la palabra (considerada como algo físico, visual o vocal) y no del concepto (considerado como abstracto como se puede ver en la *R-acción* [93] donde se habla de número impar previamente visto, y en la frecuencia con la que se ha utilizado a nivel operativo [86-89]. Lo primero lo podemos atribuir a que están habituados a una organización secuenciada de los contenidos escolares y a que la matemática elemental se ha tratado como un conjunto de procedimientos a dominar. En [95] la *B-acción* se produce cuando vinculan y aplican que la división entre 0 no es posible que finalmente se concreta en la *C-acción* (**C_0**) compuesta por las *B-acciones* [88, 94 y 95].
En la lluvia de ideas sobre la noción de "divide" se aprecia una participación activa y una disposición para aportar, para escuchar y convenir la definición en el grupo.

[83] *Un número a divide a un número b cuando*… [leen]
[84]…cuando *b* entre *a* [otro alumno] …cuando el resultado
[86] No, cuando al operarlo su resultado es un número entero
[87] Más bien al operarlo, ((Pva)). A ver, cuando…( )
[89] Y no tenga…( )
[90] Y que al dividirlo // [otro alumno] Y luego aquí ya
[93] Cuando *c* es un número impar, ¿o entero? ¬
[94] Ya no tengan ideas diferentes, [c es] entero.

[88] Dije, cuando el resultado de *b/a* es igual a *c*

[95] Y que por ejemplo, al dividirlo *a* no sea cero.

La comparación causal con la definición producida por otro equipo, aunque es igual a la producida antes por ellos, hace que dos estudiantes [344-346] duden sobre la producción. Al igual que en el análisis del fragmento anterior retoman [342-343] el conflicto que presentaron en la discusión relativa a incluir o no al 0 en los números pares (ver interacción del equipo **A** 287-295 p. 155) y no se establece la diferencia por parte del estudiante de la intervención.

También es notable que se presenta inmadurez en el pensamiento deductivo, dado que no perciben que a≠0 puede derivarse de la definición obtenida en [340].

[340] Cuando el resultado es igual de *b* sobre *a* es igual a *c* para *c* un número entero
[341] O sea lo mismo

[342] Que es igual a *c* entero [otro alumno agrega] Y *a* diferente de cero
[344] No, pero sí da cero. //Sí
[346] El dos

Finalmente no se atiende la inquietud manifestada en [344-346] sobre si un número puede dividir al 0, por ejemplo el dos, y no se retoma la definición escrita para reconsiderar esta situación. Escuchar esta aportación, intentar comprender y buscar argumentos para convencerlos de su confusión los conduciría a encontrar que a≠0 puede derivarse de que *b/a* debe ser entero

Por su parte en el equipo **C,** mediante *R-acciones* tratan de identificar cuándo es posible realizar la división. Pensando que dividendo y divisor deben ser diferentes, descartan el “caso trivial” centrándos así en cuando no está definida o no se puede realizar la división. Sin embargo confunden dividendo y divisor y concluyen de manera errónea que b≠0.

[91] *Un número a divide a un número b cuando*¬
[92] Cuando a≠b
[93] No, cuando b≠0

[94] Sí, porque no se puede dividir entre cero
[95] ¡Ah sí! [escriben] Cuando b≠0 ya que no se puede dividir entre cero

Aquí podemos concluir que la lectura de la tarea no se realiza con cuidado y la interpretación no es adecuada. Podemos ver que para los alumnos la matemática es vista como conjunto de procedimientos y no es fácil distinguir la diferencia entre frases como: “se puede dividir”, “es divisible”, “divide”, “es posible realizar”, “divide exactamente”, etc y esto conduce a utilizar o entender en ocasiones la misma frase con sentidos distintos.

En la socialización entran en juego casi la totalidad de producciones (**C**,**D**,**H**,**B**,**E**,**F**,**G** e **I**). La riqueza en la discusión se atribuye a que fue de las últimas definiciones en socializarse y ya se tenía preparado un clima de confianza para que los alumnos se animaran a compartir sus producciones. El análisis lo dividimos en 5 fragmentos para identificar las ideas principales.

En el fragmento [104-106] no avanzan para completar una definición, el profesor cambia la dinámica y esto se retoma después. Se aprecia que, al igual que la interacción en el equipo **C**, la interpretación de la tarea se da en el sentido de cuándo es posible realizar divisiones.

[104] Alumnos: [Un número a divide a un número b] cuando *a≠0* [Equipo **H** o **D**]

[105] As: No, cuando *b≠0* [Equipo **C**]
[106] As: Sí, no hay división entre cero

El profesor enfoca la discusión para tratar de entender qué significa "que un número divide a otro" [107-110] y que significa "que un número sea divisible entre otro" [111-114] y establecer una conexión entre ambas identificando similitudes y diferencias. Para la comprensión de esto las *R-acciones* provocadas por el profesor se dan a través de ejemplos identificando si sucede o no "que divide" o "sea divisible" [108, 110, 112 y 114].

[107] Profesor: A ver *a=3*, ¿3 divide a 10? Voy a usar esta notación para "divide" [escribe 3│10]
[108] Alumnos: Que al 10 lo parte en 3 partes iguales
[109] P: A ver, ¿el 3 divide al 10 en 3 partes iguales? ¬ [responden que no los alumnos]

[111] P:[…]cuando digo un número es divisible entre 5, ¿cuáles son los números divisibles entre 5
[112] As: Son los que cuando se divide entre 5 sobra 0
[113] P: Por ejemplo 10 es divisible entre 3
[114] As: No, porque 10 entre 3 no sobra cero

En la transcripción del fragmento siguiente aún encontramos confusión en si dividendo o divisor debe ser distinto de 0 [116 y 118]. Pero en un ejemplo [119] y un contraejemplo [121] el profesor convence. Aquí no deja que sean los estudiantes los que argumenten por qué no pueden dividir un número entre 0, hecho no trivial como lo hemos visto desde las definiciones de número par e impar y lo veremos en otras definiciones, por ejemplo, en número racional.

[115] Profesor: Entonces, no nada más necesito *a* divide a un número *b*, claro en la división, éste, como es el divisor [*a*] es diferente de cero
[116] Alumnos: Ah entonces lo agarramos al revés
[117] P: Pero que más necesito

[118] As: $b \neq 0$, ¿no?
[119] P: […] si dividen 0 entre cualquier número diferente de 0 ¿qué pasa? [escribe 0 entre 3]
[120] As: Toca a cero y sobra cero
[121] P: Pero al revés no. Vean como no se vale [escribe]. Bueno entonces lo primero es que $a \neq 0$

Partiendo de que el divisor (*a*) sea distinto de cero, se quiere determinar qué se debe agregar para decir que un número *a* divide a un número *b.* Esto es, percibir la necesidad de la existencia de un número que multiplicado por *a* nos dé *b*. Para lo anterior un estudiante, de manera errónea, afirma que el cociente debe ser múltiplo de *b.* Pero el profesor con un ejemplo del tipo "que sucede si" y la respuesta, como *B-acción*, a tal ejemplo descarta [123].

[122] Profesor: Y qué más necesito ¬ [además de *a* divide a *b* si el divisor (*a*) es diferente de cero]
[123] Alumnos: Que el cociente sea múltiplo del número
[124] P: Por ejemplo el 20 lo divido entre 4 toca a 5 y sobra cero. ¿Qué pasa con el cociente? ¬
[125] As: Que el cociente multiplicado por 4 me dé 20

En la interacción se aprecia una participación activa y, al igual que como se da de manera natural en el contexto cotidiano, se parte de construir una serie de ocurrencias del concepto para las cuales se supone que éste se aplica (*R-acciones*) y se establecen conexiones entre significados (formas de decir lo mismo para clarificar) como «4 divide a 20 o bien 20 es divisible entre 4 o 20 es múltiplo de 4». Es decir, a partir de la imagen del concepto se construye su significado con ayuda de ejemplos conectados *(B-acciones)* que van provocando modificaciones encaminadas hacia la definición del concepto (*C-acción*). Como en las definiciones anteriores encontramos como la activación y demanda de ejemplos resultan mediadores eficaces para la construcción de definiciones y ampliación de significado.
A continuación vemos *B-acciones* inducidas por el maestro en las que se desplazan de los ejemplos [128-129], a los no ejemplos [126-127] y posteriormente a construir ejemplos genéricos. Se aprecia continuidad en la estructura, al igual que en el caso de los números pares los patrones de generalización están basados en procesos (PPG) y esto hace posible la *C-acción* que muestra una

definición no económica correcta [137]. Aunque es el profesor el que escribe y verbaliza esta *C-acción* la construcción se produce en el seno del grupo.

Falta dar el paso hacia una definición sintáctica, podemos ver como la discusión parte de que los estudiantes consideran que para que *a divida a b* se necesita que $a \neq 0$ y este hecho ocupa gran parte de la discusión. Consideramos valioso que el maestro vaya conduciendo la reconstrucción de la definición a partir de las aportaciones de los alumnos y en ese afán se omite un análisis fino de los elementos que se pueden derivar de otra parte del texto, como en este caso la imposición innecesaria de que *a* sea distinto de cero.

[126] Profesor: Bien, que exista un número multiplicado por 4 (el divisor) sea 20. Por ejemplo existe un número que multiplicado por 3 me dé 10 [responden los alumnos que no, que entero no existe]
[128] P: Existe un número que multiplicado entonces por 4 me da 20
[129] Alumnos: Sí, el 5
[130] P: Entonces 4 divide a 20 [escribe $4|20$] o bien 20 es divisible entre 4 o 20 es múltiplo de 4. Tres formas de decir lo mismo.
[131] P: Entonces en general como escribimos esto acá [señala la hoja] *a* divide a *b* si $a \neq 0$ y existe, por ejemplo [señala un ejemplo] existe el 5. Entonces existe un número (el 5) que multiplicado por 4 me da 20.
[132] As: ¿Existe un número entero?
[133] P: Sí, existe un número entero *q*, vamos a llamarlo así. En el ejemplo quién sería *q*
[134] As: El 5
[135] P: Entonces qué debe cumplir *q* ¬ [contesta un alumno] Que multiplicado por 4 me da 20
[137] P: [Continúa escribiendo] *a* divide a *b*…si existe un número entero *q* tal que $q*a=b$ y $a \neq 0$ [escribe enseguida la notación simbólica $a | b$ si $\exists\, q \in \mathbb{Z}$ tal que $q*a=b$ y $a \neq 0$] [verifica la definición con ejemplos], 26 es divisible entre 13 o 13 divide a 26 ¬ existe un entero que multiplicado por 13 me dé 26
[138] As: Sí el 2
[139] P: 9 divide a 14 [un alumno] No, porque no hay un entero que multiplicado por 9 sea 14

Finalmente las producciones escritas derivadas del trabajo en equipo se presentan en la tabla 20 con la misma clasificación que antes y siguiendo el mismo esquema de un marco explicativo.

Tabla 20. Análisis de producciones escritas de definiciones no geométricas de los equipos

1. Referencial (88.8%)	*1a) a procedimiento (55.5%)* $\boxed{A}$ el resultado de $b/a=c$ para $c \in Z$ y $a \neq 0$ [lenguaje mixto con debilidades, correcta-no económica] $\boxed{B}$ su división es un número entero y su residuo es cero, y $a \neq 0$ [lenguaje mixto con debilidades-ambigua] $\boxed{C}$ cuando b sea diferente de cero ya que no se puede dividir entre cero. [posibilidad de dividir, lenguaje cotidiano-incoherente] $\boxed{H}$ *a* es distinto de cero [posibilidad de dividir, lenguaje cotidiano-incoherente] $\boxed{D}$ cuando $a \neq 0$ [lenguaje mixto-posibilidad de dividir-incoherente] *1b) a otra definición (33.3%)* $\boxed{F}$ *a* es múltiplo de *b* [lenguaje cotidiano-incoherente] $\boxed{GI}$ $b=ka$ [lenguaje simbólico-incoherente]
2. Sintáctica (11.1%)	$\boxed{E}$ se cumple que $xa=b$ para algún *x* entero [lenguaje formal-correcta]

En estas definiciones nos encontramos sólo con una definición sintáctica (**E** *correcta*) y el resto referenciales. De las referenciales el 55.5% tienen como referente el procedimiento de la división y de ellas, se consideran dentro de las *incoherentes* a **C**, **H** y **D** por centrarse únicamente en destacar que cuando $a \neq 0$ es posible realizar la operación de división y esta idea no está ligada con la definición de divisibilidad. En el caso de **A** se considera una definición *no económica correcta*, dado que no visualizan que $a \neq 0$ se puede deducir del resto del enunciado. A la producción de **B** se le considera *ambigua* porque no indican quién es dividendo y quién divisor, situación que es común confundir. El resto de referenciales (el 33.3%), refiere a la definición de múltiplo, todas son *incoherentes*; **F** confunde el orden de *a* y *b*, mientras que **G** e **I** no indican que *k* debe ser entero. En el uso del lenguaje 33.3% usan el cotidiano, 22.2% simbólico, 33.3% mixto y sólo 11.1% lenguaje formal.

C. Reconstrucción de la definición de número primo

Respetando la estructura de las definiciones anteriores finalmente se presenta el mismo esquema, interacciones en equipos (**A** y **C**), producciones escritas y discusión en gran grupo.

Veamos primero la interacción en el equipo **A**, en la cual se observan *R-acciones* [50-60] en las que se recuerdan palabras que intervienen en la definición y tratan de reconstruirla conectándolas en forma de *B-acciones* con números que han reconocido antes como "primos" [61 y 62] y no hay una discusión real que los lleve a verificar si su definición funciona o no.

[50] Es el número que solamente puede ser dividido [interrumpe otro alumno mostrando desacuerdo]
[52] Exactamente entre 1 y por 3 ( ). Entre uno
[53] Es un número que al dividirlo [Escriben]
[54] Que sólo tiene división exacta entre uno
[55] Que sólo tiene ((Pva)) ¡Ah ya! Tiene división exacta
[57] Al dividirlo
[58] Entre ese mismo ¿o no? [otro estudiante responde] No exactamente
[60] Es un número que al dividirlo ()
[61] // No todos los números
[62] Al dividirlo entre uno es exacto ((mm)) entre sí mismo sería el 7 o el 13. ¿O no?

Ahora en el equipo **C,** al igual que en **A**, observamos *R-acciones* que retoman conceptos tratados anteriormente [45-46], recuerdan ejemplos concretos de números primos [48] y los relacionan con el contexto operativo más frecuente [51] (el cálculo del máximo común divisor y mínimo común múltiplo). En [51] además se percibe una *B-acción* cuando intentan extraer la información del cálculo del MCD y mcm y conectarla para reconstruir la definición.

[45] Es aquel que se puede dividir entre sí mismo y entre que
[46] Cómo arriba [definiciones de número par e impar]
[47] Cuáles son los números primos
[48] Eran el 2,5 y el 7 ¿no?
[49] No me acuerdo. Número primo [Piensa en voz alta]
[51] Yo nada más me acuerdo que eran, por ejemplo 10 y encontrar los mínimos. Cuando le sacas común. […] le pones así [escribe] se puede dividir entre 2 y el 5. Esos son primos. Lo vimos en cálculo.
[52] Son los números que ( ) [otro alumno con su ejemplo dice] Esto está comprobado

Enseguida, se exhibe una *C-acción* en [54] al establecen la definición en sentido negativo (números indivisibles) esto se puede asociar con el contexto de donde ha surgido la definición (cálculo del MCD y mcm) y con los textos en los que se habla de encontrar los bloques o ladrillos indivisibles (números primos) con los cuales están formados los números enteros (se construye una metáfora entre "construcción" y factorización de un número). Al parecer en [56] se da una *R-acción* de reconocimiento de que el 1 no es primo, o bien que no entra en la definición dado que todo número es divisible entre 1. Esta es una sutileza que consideramos importante no se discute en equipo y más adelante veremos tampoco se retoma en la discusión en grupo. Luego mediante [60] *R-acciones* se retoman ejemplos concretos de números primos.

[54] Son los números indivisibles entre otro número que no sean en el mismo y en el 1
[56] El uno no se contaba
[57] Entre el 2,3,4,5,6,..
[58] Indivisibles entre otro número que no sean..
[59] No pero está tomando el 1
[60] Nada más es el 2,3,5 [otro alumno agrega] y el 7

Las *R-acciones* [63, 67, 68] son intentos de comparar la definición que han construido en los números impares y la de primo posiblemente para establecer similitudes y diferencias que permitan depurarlas. Sin embargo en la interacción no se le permite al estudiante exponer su idea. En [65] vuelven a exhibir la *C-acción* mostrada en [54].

[63] Pues si en el número impar consideramos…
[64] // No, ahorita pensamos en el impar ¡déjalo!
[65] Número primo es un número que es indivisible en otro número que no sea el mismo y el 1
[66] Es lo mismo que pusimos arriba
[67] Sí pero ahorita vamos a ver lo del impar
[68] Es lo del impar
[69] Es parecido pero no es lo mismo

La tabla 21 presente el registro escrito de los equipos para la definición de número primo es:

Tabla 21. Producciones escritas de los equipos para la definición de número primo.

1. Referencial (100%)	*1a) a procedimiento (100%)* A Son todos los números que sólo tienen división exacta al dividirlos entre 1 y entre sí mismo [lenguaje cotidiano-parcial] D H Es el número que puede ser dividido entre dos números (el mismo y el 1) [lenguaje cotidiano-incoherente] B Es el número entero que únicamente es divisible por el mismo y por la unidad [lenguaje cotidiano- parcial] C Es aquel número que es indivisible en otro número que no sea el mismo y el 1 [lenguaje cotidiano en forma de negación-parcial] E Número que no es divisible por ningún otro número excepto 1 y sí mismo [lenguaje cotidiano-parcial] G I Un número es primo sólo si es divisible entre el mismo y el 1[lenguaje cotidiano-parcial] F Un número *a* es primo si y sólo sí *p* divide a *a* entonces *p=a* o *p=1* [lenguaje formal-parcial]

La totalidad de respuestas fueron referenciales asociadas a un procedimiento. No se obtuvó ninguna respuesta correcta, contamos 22.2% como definiciones incoherentes (**D** y **H**) esto dado que la frase "que puede ser dividido" admite más de una interpretación, de manera exacta, o bien que es posible realizar la división aún cuando el cociente sea decimal. Además en cualquiera de los dos casos "todos los números enteros son divisibles entre 1 y entre ellos mismos", así, se presenta un problema al no distinguir la diferencia entre cuantificadores existenciales y universales, además de sujetar su validez a interpretar «puede ser dividido».
El resto, 77.7% fueron consideradas parciales. Esta distinción se hace cuando consideramos que son válidas en un dominio restringido. Tales definiciones tienen validez sobre el conjunto de los números enteros positivos, aunque de manera explícita no lo dicen, al pensar en la existencia de únicamente dos divisores. La interpretación que podemos dar es que ésta es una definición típica en Educación Primaria y los niños lo aprenden desde el 4º grado (a la edad de 9 años). Naturalmente, entonces, ellos tratan con números naturales y no es hasta Educación Secundaria (entre 12 y 15 años de edad) donde se les presentan los números enteros. Sin embargo, son pocos

los textos y maestros que trasladan la definición de primo a los números enteros. Más aún, en la práctica se habla de número primo como entero y no se percibe que es importante hablar de enteros positivos, si pensamos que sólo tiene dos divisores. Se produce el conflicto de continuar utilizando una definición que ya no resulta operativa y adecuada para el nuevo contexto. Para este tipo de sutilezas no se tienen espacios previstos en los programas de secundaria a licenciatura donde se puedan discutir este tipo de detalles, que la mayoría de los alumnos por sí sólos no modifican y trasladan a un nuevo contexto.

Las producciones que entran en juego en la discusión en grupo son las de **C**, **D** y **H**. Veamos cómo se modifican con la participación activa del grupo, incluido el profesor, para lograr una definición sintáctica. Hemos dividido la socialización en 4 fragmentos para agrupar las ideas.

En el primer fragmento de la socialización podemos apreciar que ahora el objetivo es construir en gran grupo una definición sintáctica negociada a partir de las definiciones construidas previamente en los equipos. En esta dirección se dan *R-acciones* para mostrar las definiciones previas [51 y 52]. Enseguida vemos [54] una *B-acción* que enlaza [52] con la discusión en gran grupo previa acerca de la definición de número par, lo que produce un impacto positivo del ejercicio de anterior respecto a la precisión en el lenguaje de los términos ”ascendiendo” y “divide”. Ahora los alumnos tienen mayor cuidado con los términos y establecen la conexión pertinente.

[51] Alumnos: Es aquel número que es indivisible entre otro número que no sean el mismo y el 1
[52] As: //Es un número que se divide sólo entre dos números: el mismo y el 1
[53] As: Es una copia, es lo mismo
[54] As: Que se divide de manera “exacta”

A continuación el profesor provoca el conflicto: si están definiendo un número primo como entero, entonces los ejemplos (*2,3,5,7,11,…)* mencionados en los equipos, no cumplen la condición porque tendrían más de dos divisores enteros (1,-1, *p* y *–p*). Aquí el profesor provoca *B-acciones* [58, 60] en las que podemos ver la fuerza de los ejemplos para conducir a una *B-acción* que el alumno expresa en [62]: sí [el 5 es primo y no encaja con la definición], pero no [estoy seguro de la definición que conozco]. Aquí las acciones del profesor son de suma importancia en la construcción de conocimiento compartido en el grupo dado que provoca las acciones de los estudiantes para avanzar en tal construcción.

[55] Profesor: Muy bien pero ahora aquí hay que aclarar algo. El 5 es primo, lo podemos dividir de manera exacta entre algún otro número, además de 5 y 1¬[responde un alumno: No enteros]
[57] P: ¿Entre -5 es división exacta? ¬
[58] Alumnos: Sí [-5 divide a 5]
[59] P: ¿Entre -1? ¬
[60] As: También [-1 divide a 5]
[61] P: Entonces el 5 ¿es primo?
[62] As: Sí, pero no ( )

En el fragmento siguiente se pudo extender la definición parcial o restringida al dominio de los números Naturales (que los equipos tenía en mente) al dominio de los enteros logrando una definición sintáctica [67] con apoyo de las *B-acciones* [64 y 66] inducidas por el profesor. En este sentido podemos hablar de una *C-acción* [64 y 67] atribuida al grupo y no al profesor. Ahora como mecanismo de control en [67] el maestro invita a los alumnos a reflexionar sobre lo que falta a su definición para que sean correctas.

[63] Profesor: En tu definición no sería primo Pero siempre lo hemos tomado como primo. Entonces esto que significa ¬ que cuando definamos primo lo podemos definir como: un número ¿cualesquiera?

[64] Alumnos: Entero
[65] P: […] puede ser positivo o negativo y entonces ya hablamos de divisores ¿cuántos tiene?
[66] As: Sólo 4
[67] P: *Un número entero p es primo si tiene únicamente 4 divisores. 1,-1, p,-p*. Si digo sólo número tengo el problema de pensar tal vez real, imaginario. Ahora si quiero que tu definición funcione

En el último fragmento analicemos como se modifica su definición inicial para que funcione. En [68] se observa una *C-acción* en la que verbalizan los ajustes para que la definición de primo se dé en los números Naturales. Al final la discusión se cierra reconociendo la importancia del conjunto donde están contenidos los objetos. Aquí no se discutieron casos especiales como el número 1 y por tanto no se dijo si es o no un número primo.

[67] Profesor: Ahora si quiero que tu definición funcione que hago ¬
[68] Alumnos: Un entero positivo es primo si tiene dos divisores positivos el mismo y 1
[69] P: Bueno, ya funciona. Nos fijamos entonces que si digo sólo número tengo el problema de si es real, imaginario, entero. Entonces son muy importantes también los adjetivos en las definiciones. Luego no entendemos donde vive y que características tiene lo que definimos. ¿Estamos? [asienten]

E. Reconstrucción de la definición de subconjunto

La siguiente tarea era negociar primero en equipo y después en grupo la definición de subconjunto, para ello se les da inicialmente la frase para completar: *Se dice que A es subconjunto de B si* … Primero analizaremos la interacción en **D**, los registros escritos de todos los equipos y luego los fragmentos de la discusión en grupo.

Las interacciones dentro de los equipos ocuparon muy poco tiempo y hubo poca discusión, esto puede ser debido a que el contacto con la teoría de conjuntos es muy reciente para ellos y el concepto está muy ligado a la representación verbal o escrita de la definición.

La producción final del equipo **D** se presenta de forma ambigua en lenguaje cotidiano y no con un lenguaje formal conjuntista. Observamos *R-acciones* donde se reconoce la necesidad de usar los términos "pertenencia" y "elementos" [149], de un diagrama (que asocian con geometría) [150], conceptos de "universo", "conjuntos" [153] y se percibe una *B-acción* para su representación gráfica en [154]. Podemos ver que en la imagen del concepto tienen la representación mediante diagramas de Venn aunque se visualiza en la *B-acción* ocurrida en [156] que se piensa en el universo como la unión de los conjuntos *A* y *B*. También forman parte de la imagen del concepto, los ejemplos y esto se discute en una *R-acción* [155] recordando un ejemplo sobre conjuntos de chocolates abordado antes. Finalmente la *C-acción* ocurre en [157] cuando convienen la definición de subconjunto.

[148] Se dice que *A* es subconjunto de *B* si…
[149] Si *A* pertenece, cómo te diré…, a los elementos de un conjunto
[150] Esto es de geometría, tienes un juego [Juego para trazos geométricos]
[151] No sé una definición
[152] Sí, mira piensa primero en el [conjunto] universo
[153] Bueno el universo es aquí [dibuja]
[154] Es que esto es el universo y los conjuntos están ahí. Son estos
[155] Sí, pero mira te falta donde puso la caja de chocolates, ¿te acuerdas?
[156] Los conjuntos son los que hacen el universo
[157] Se dice que *A* es subconjunto de *B* si *A* está dentro del conjunto *B* [muestran acuerdo]

Finalmente el concentrado de respuestas de los estudiantes se muestra a continuación.

Tabla 22. Escritos de la definición de subconjunto de los equipos

1. Referencial (44.4%)	*1b) a la definición (33.3%)* A los elementos de *A* están contenidos en *B* ya sea todo B o parte de *B* [lenguaje cotidiano-correcta-no económica] H cuando *A* se puede definir como un conjunto y que los elementos de *A* también están en *B* [lenguaje cotidiano-correcta-no económica] C si $A \in \{B\}$ si *A* pertenece al conjunto *B* [Lenguaje mixto-incoherente] *1d) a diagrama (11.1%)* D si *A* está dentro del conjunto *B* [Lenguaje cotidiano-ambigua]
2.Sintáctica	E I $x \in A \Rightarrow x \in B\ \forall x \in A$ [lenguaje formal-correcta] B F G Todos los elementos de *A* están contenidos en *B*. $A \subset B$. [lenguaje formal-correcta

Del concentrado se deriva que es el concepto donde se presentan más definiciones sintácticas (55.5%) y de las referenciales, el mayor referente fue la propia definición (**A**, **H** y **C**) y a continuación un diagrama (**D**). Son pocos los contextos en los que estudian teoría de conjuntos; de hecho ahora en los programas de secundaria y bachillerato apenas es tratada de manera superficial. Es en licenciatura cuando se introducen estos conceptos en primer semestre. Esto explica que la mayoría tenga una definición sintáctica o con referente hacia la propia definición. De las definiciones mencionadas consideramos la de **C** como *incoherente* porque utiliza los términos "elemento" y "conjunto" de manera indistinta y mezclada. Por su parte **D** es *ambigua* porque su interpretación está sujeta a lo entendido por "dentro".

La mayoría de las definiciones fueron *correctas* (77.7%) y dentro de ellas encontramos algunas definiciones *no económicas* y con referente a una definición, como antes ya lo mencionamos, **A** y **H**. En la respuesta del equipo **A** *los elementos de A están contenidos en B ya sea todo B o parte de B,* y la de **H** cuando *A* se puede definir como un conjunto y que los elementos de *A* también están en *B.* En la respuesta de **A** además agrega que puede ser subconjunto propio o no, es decir incluye el caso particular en que *A* sea igual al conjunto *B*, sin notar que en la parte no sombreada del texto se incluye este caso. Por su parte en **H** los alumnos notan la ausencia en el texto inicial de la palabra conjunto para denominar a *A* y a *B*, "[El conjunto] *A* es subconjunto de [l conjunto] *B* si", y esto lo hacen evidente al incluir que su definición vale sólo si «*A* se puede definir como conjunto». Es posible que ante la exigencia de formalidad y cuidado sintáctico en sus definiciones tengan razón al demandar que el enunciado "correcto" que se propone para completar tendría que incluir: "*Sean los conjuntos A y B* "
De las definiciones sintácticas se tienen las de los equipos **E**, **I**, **B**, **F** y **G** que se caracterizan por ser *correctas* y por utilizar un lenguaje formal con la notación conjuntista adecuada. La diferencia entre ellas es que en los equipos **B**, **F** y **G** , con la intención de decir como se denota el hecho de que *A* sea subconjunto de *B*, unicamente lo escriben en forma simbólica y consideramos más apropiado escribir " lo cual se denota por: $A \subset B$".

Para el análisis de la socialización hemos dividido en tres fragmentos la interacción en grupo. En el fragmento [199-204] se aprecia que para algunos estudiantes "definir" y "denotar" son palabras muy cercanas. Esto lo muestra la *R-acción* [200-201] en la cual consideran que los conjuntos están definidos por letras mayúsculas. El profesor inicia un proceso de filtrado invitando a los estudiantes para afinar el lenguaje y tiene lugar una *R-acción* donde se considera que deben pensar en los elementos [203] para conformar los conjuntos. Luego en [204] una *B-acción* se observa al concentrar la información reconocida.

[199] Alumnos: [*Se dice que A es subconjunto de B si…*] *A* está dentro del conjunto *B* [Equipo **D**].
[200] Profesor: Para empezar necesito saber. Los conjuntos por quién están definidos ¬.
[201] As: Por letras mayúsculas.
[202] P: Sí, así los nombramos, pero quién forma los conjuntos.
[203] As: Es un grupo de elementos.
[204] P: Entonces las "cosas" que forman los conjuntos se llaman elementos. Elementos son los que me definen el conjunto. ¿? Ahora quiero que este conjunto *A* esté en *B*. Qué significa esto¬.

Luego podemos ver que el proceso de filtrado se concentra en *B-acciones* [205-209] para dar significado a lo expresado en lenguaje cotidiano «que este conjunto *A* esté en *B*» de diferentes maneras. Este ha sido un recurso utilizado con frecuencia tanto por estudiantes como por el profesor para dar significado a los conceptos. Una vez entendido desde diferentes maneras de expresarlo, el profesor lo conecta con el lenguaje formal [210].

[204]Profesor: […] Ahora quiero que este conjunto *A* esté en *B*. Qué significa esto¬.
[205] Alumnos: Que pertenezca.
[206] As: Que si está en *A* sea elemento de *B* [otro alumno] Que esté dentro de *B.*
[208] P: Entonces, si un elemento "vive" en *A* entonces…
[209] As: tiene que "vivir" en *B.*
[210] P: Eso […]es un símbolo de contención [señala ⊂], "está contenido", "es parte de". Hay que tratar de definirlo con el lenguaje que se tiene en matemáticas si no tendríamos serios problemas. Imagínense para unos sería "adentro", "metido", "encajado", para otros "contenido". […]

El profesor aprovecha en esta parte que tienen una noción cercana de subconjunto y aprovecha la oportunidad para explorar en cómo proceder cuando se enfrenten con una situación (común en matemáticas) que les exija demostrar la igualdad de dos conjuntos. Enfoca la discusión para mostrar y razonar sobre la técnica de: probar primero que todos los elementos de *A* están en *B* y después que todos los elementos de *B* están en *A*. Esta es una debilidad que el profesor (con experiencia impartiendo clases) percibe fuerte en los estudiantes. La manera de definir la técnica de prueba, según de Villiers (1998), es de naturaleza constructiva.
En [214] un estudiante expresa que no ha comprendido a dónde se quiere llegar. En un intento por aclarar la situación, el profesor, en [215] da una explicación conectando nuevamente con el lenguaje cotidiano la situación "que pasaría si" y reforzada por un diagrama de Venn. En [216] vemos que un alumno identifica el universo como unión de los conjuntos en juego (*A* y *B*). Se está considerando que, además de que $A\subset B$, *B* puede estar también contenido en *A*, entonces el alumno asemeja esta situación al conjunto universal que es subconjunto de sí mismo, aunque eso puede ocurrir con cualquier conjunto. En este sentido se percibe la influencia del diagrama presentado por el maestro en el pizarrón. Dicho diagrama muestra elementos dentro de los conjuntos *A* y *B* sin embargo omite exhibir alguno fuera de ellos. Como respuesta a [216] sólo se aclara que es erróneo y el maestro concluye en [217b], sin esperar más aportaciones, que si se dan ambas contenciones los conjuntos serán iguales.

[211] Profesor: Ahora, que pasaría si también tengo lo contrario [Si *A subconjunto de B* y *B es subconjunto de A entonces…*]
[212] Alumnos: Pues que *B* es subconjunto de *A*
[213] P: Entonces si $A\subset B$ y $B\subset A$ estos conjuntos cómo
[216] As: Sería el [conjunto] universo ¿no?
[217] P: [a]No, cómo serían estos dos [b] Serían iguales ¿cierto? Regularmente durante la carrera para probar que dos conjuntos son iguales tendrán que proceder en dos partes. Probar primero que todos los elementos de *A* están en

serían [un alumno pregunta] ¿Cómo?
[215] P: Sí, que pasa si todos estos elementos están aquí y los de este conjunto están acá. Todos los de *A* viven en *B* y los de *B* viven en *A* [señala diagramas de Venn]

B [escribe $A \subset B$] y después que todos los elementos de B están en A
[218] As: ¿Cuándo? [contesta el profesor] A lo largo de la carrera [licenciatura]

4.3.1.1.1 Conclusiones de la caracterización de las definiciones no geométricas

De la clasificación anterior se obtienen como resultados que más del 44% de las definiciones son referenciales aunque en la mayoría de los casos el porcentaje se acerca al total de definiciones. En cuanto al referente más utilizado para reconstruir la definición se observa que los alumnos recurren sobre todo a los procedimientos, seguidos de los casos genéricos, de otras definiciones, de las palabras utilizadas en la definición y los diagramas. La mayoría de las definiciones son descripciones informales en lenguaje cotidiano, a excepción de la definición de número racional y la de subconjunto donde un 55% utilizó lenguaje formal.

Finalmente podemos observar que las definiciones no económicas se incluyen dentro de las consistentes. En estas definiciones, parte del texto no aporta información adicional, es decir, se puede derivar del resto del texto o bien se presenta en él de manera implícita. Sin embargo aún y cuando la definición que producen los grupos es consistente, este tipo de sutilezas implican un razonamiento de naturaleza deductiva. De estas definiciones ya se realizó una discusión en el análisis de cada una en el momento en que aparecen.

Tabla 23. Caracterización de las definiciones no geométricas

Sintácticas Referenciales	Correctas/Parciales/ Incoherentes/ Ambiguas				Referenciales	Lenguaje (Cotidiano/ Simbólico/Mixto/Formal)			
A. Número par S (33.3%) R (66.6%)	77.7% (NE 22.2%)	11.1%	0 %	11.1%	Procedimiento 44.4% Otra definición 22.2%	55.5%	0%	11.1%	33.3%
Número impar S (44.4%) R (55.5%)	66.6%	11.1%	11.1%	11.1% (NE 11.1%)	Procedimiento 33.3% Otra definición 22.2%	55.5%	0%	0%	44.4%
B. Un número a divide a un número b cuando… S (11.1%) R (88.8%)	22.2% (NE 11.1%)	0%	66.6 %	11.1%	Procedimiento 55.5% Otra definición 33.3%	33.3%	22.2%	33.3%	11.1%
C. Número primo S (0%) R (100%)	0%	77.7%	22.2%	0%	Procedimiento 100%	88.8%	0%	0%	11.1%
D. Número racional S (33.3%) R (66.6%)	33.3%	22.2%	22.2%	22.2%	Procedimiento 44.4% A la definición 22.2%	44.%	0%	0%	55.%
E. Se dice que A es subconjunto de B si … S(55.5%) R(44.4%)	77.7% (NE 22.2%)	11.1%	0%	11.1%	A la definición 33.3% Diagrama 11.1%	33.3%	0%	11.1%	55.5%

En general la reconstrucción de definiciones se hace desde el pensamiento intuitivo y semántico entrando en juego la interacción de la imagen del concepto que tiene cada integrante y la negociación para producir una nueva definición. Además la manera de definir se hace en forma descriptiva, es decir, se exploran diferentes características de un objeto matemático conocido y se selecciona un subconjunto apropiado, que sirve como definición, mediante el cual se pueden deducir el total de propiedades. La figura 28, realizada con los diagramas de Vinner (1991), complementa lo ya explicado incluyendo el vínculo con las acciones epistémicas que se suceden en la emergencia de la nueva definición.

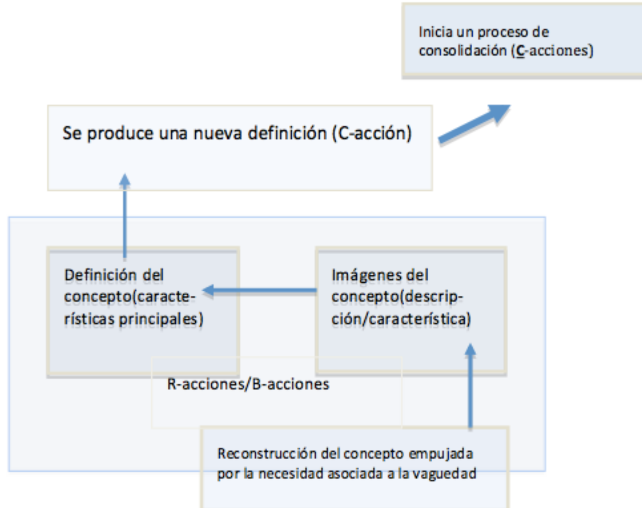


Figura 28. Emergencia de una nueva definición

4.3.1.2 Definiciones geométricas

El análisis de los procesos que usa el estudiante en la reconstrucción de definiciones geométricas se ha basado en de Villiers (1998). Como se mencionó al principio de este apartado, él distingue dos maneras de definir: *descriptiva* y *constructiva.* Estas maneras de definir aparecerán a lo largo del análisis de las definiciones geométricas aunque en mayor medida lo harán las descriptivas.

Por otra parte no hemos encontrado un marco de referencia que incluya todas las aportaciones para el análisis de las definiciones geométricas y hemos decidido clasificarlas en *ambiguas*, *incoherentes, equivocadas*, *correctas y parciales*.

Las ambiguas: Definiciones que pueden entenderse de varios modos o admitir distintas interpretaciones y dar, por consiguiente, motivo a dudas, incertidumbre o confusión.

Las incoherentes: Son aquellas en las que se percibe falta de conexión, relación o unión de unas palabras o ideas con otras. Es decir caracterizadas por una ausencia de lógica.

Las equivocadas: Las definiciones que se refieren a otro objeto matemático.

Las correctas: Las definiciones que determinan unívocamente al objeto matemático en juego, consideran todos los casos u objetos y se presentan libres de incoherencias y errores, conformes a las reglas en la disciplina.

Las parciales: Son definiciones que aunque determinan unívocamente al objeto matemático excluyen casos particulares o algunos objetos.

Además, utilizaremos la caracterización de las definiciones de Villiers (1998) que las clasifica como: *visuales, no económicas y definiciones económicas correctas*, con el propósito de explorar los niveles de comprensión, dado que se puede establecer una correspondencia entre los tipos de definiciones y los niveles de comprensión de Van Hiele como vemos a continuación.

Nivel I: *Definiciones visuales*, son aquellas en las que los alumnos realizan un dibujo del objeto matemático (e.g. un rectángulo es uno cómo este) o bien lo describen en términos de propiedades visuales (e.g. Todos los ángulos son de 90°, dos lados largos y dos cortos).

Nivel II: *Definiciones no económicas*, son definiciones en las que se pueden eliminar algunas propiedades que no son escenciales o que corresponden a casos particulares o genéricos del objeto matemático o bien que se pueden derivar de otras propiedades (e.g. rectángulo es un cuadrilátero con lados opuestos paralelos e iguales, con los ángulos de 90°, diagonales iguales, simetría doblando a la mitad, dos ejes de simetría, dos lados cortos y dos largos, etc)
Nivel III: *Definiciones económicas correctas* (e.g. Un rectángulo es un cuadrilátero con un eje de simetría por cada par de lados opuestos).

Por ejemplo cuando se trata de definir a partir del dibujo de un rombo (incluidas sus diagonales) en diferentes posiciones y tamaños, la tendencia espontánea de los estudiantes es realizar una lista de propiedades, proporcionando con ello una descripción (definición) correcta del rombo, pero no económica (sugiriendo comprensión en nivel II de Van Hiele). Mediante ejercicios que les conducen a acortar sus definiciones sin tener en cuenta algunas propiedades, se concluye que construir definiciones de esta manera es esencial para la transición del nivel II de Van Hiele al nivel III, ya que esto ayuda a desarrollar una comprensión de la estructura lógica de enunciados del tipo "si, entonces". Por ejemplo, los estudiantes aprendieron a distinguir claramente entre las relaciones previas de una figura (premisa) y las relaciones que de ella se derivan (conclusión).
Esta última clasificación la utilizaremos principalmente en las interacciones de los equipos y en gran grupo. El análisis de interacciones se realizará como en las definiciones no geométricas con las herramientas téoricas de *Abstracción en Contexto*.

A. Reconstrucción de la definición de triángulo isósceles

La estructura que seguiremos para el análisis será la misma que en las definiciones no geométricas. Primero se muestra el análisis de las interacciones en los equipos **A** y **B**, posteriormente las producciones escritas generadas en los equipos y finalmente el análisis de la socialización en grupo.

En la negociación inicial en el equipo **A** se centran en *R-accione*s con las que tratan de dibujar triángulos isósceles y para ello buscan medidas adecuadas de los ángulos. De [21-23] extraemos que la tendencia no es dibujar casos genéricos, sino los casos particulares más utilizados en el contexto escolar; primero triángulos rectángulos y, equiláteros. Además utilizan al triángulo equilátero como ejemplo y luego como no-ejemplo.

[21] Triángulo isósceles. Ajá, sí creo ( ). Ya entonces, con dos ángulos de 45^o, sí son 45^o, ¿no? un ángulo de 45^o. Ah no, ¡ah chihuahua!, de cuánto es ese ángulo [dibuja un triángulo rectángulo].
[22] Ah no, mejor… [dibuja otro triángulo].
[23] No, si fuera equilátero todos fueran iguales.

Con otras *R-acciones* [24-27] ensayan diferentes medidas para obtener ejemplos particulares de triángulos. Se percibe una *B-acción* [28-32] cuando intentan conectar los diferentes ejemplos y analizan las medidas de los ángulos.

[24] Ah este es de 40^o, de 45^o.
[25] O de 40^o ¿no?¬
[26] ¿Cuánto vale?
[27] No. //A ver cómo probar.
[29] Este ángulo mide 45^o ¿no?
[32] …menos 180^o [hace cuentas pensando en voz alta].

Mediante una *B-acción* se construye una familia de triángulos isósceles [33-36]. Parten del dibujo de un triángulo equilátero y "visualmente" lo transforman "abriendo" (agregando el mismo número de grados a dos ángulos para mantener la igualdad) los dos ángulos de la base y obtienen así una familia de triángulos isósceles, aunque no consideran la posibilidad de cerrar también los ángulos y obtener triángulos isósceles de “menor altura”, que usualmente no corresponden a los triángulos isósceles trazados en el contexto escolar.

Notamos que aunque consideran inicialmente que el triángulo rectángulo [estereotipo de 90º 45º 45º] es parte de los isósceles, de nuevo, la posición en que aparecería el triángulo rectángulo al disminuir en la misma proporción los ángulos de la base no les resulta familiar. Más aún, el triángulo equilátero, a partir del cual se realiza la transformación visual, no todos lo consideran isósceles, como se puede constatar más adelante [299-308]. A pesar de ello, un alumno en la *R-acción* [40] muestra que reconoce al triángulo equilátero como caso particular del isósceles.

[33] Porque 60º- 60º- 60º…( ) [dibuja un triángulo equilátero].
[36] cuando es isósceles estos ángulos se van abriendo [no consideran que los ángulos pueden cerrarse].
[37] No, por qué …
[38] Entonces el ángulo entre *a* y *b* es menor que 60º [ángulo desigual] y éstos deben ser mayores.
[40] Y éstos deben de ser mayores e iguales [incluye al triángulo equilátero como isósceles].

En [41] encontramos una *B-acción*, cuando tratan de construir ejemplos genéricos de triángulos isósceles a partir de fijar un ángulo y compensar en los otros, teniendo implícita la *R-acción* de que la suma de ángulos de un triángulo es 180⁰. Sin embargo, podemos ver que un estudiante del equipo no está convencido que sea suficiente abrir los dos ángulos iguales en la misma medida, sino además considera importante cuidar que los ángulos resulten enteros (“cerrados”) y menciona que si el ángulo desigual fuera 45º los otros dos no serían enteros [43]. Nuevamente podemos apuntar que los ejemplos de triángulos con ángulos enteros son más utilizados en el contexto escolar. De acuerdo a de Villiers (1998), esta forma de definir corresponde a una forma *descriptiva o a posteriori* y su producción es de tipo *visual*. En nuestra caracterización esta primera fase de construcción corresponde a una *definición parcial*, dado que mediante la *R-acción* [47] identifican la igualdad de dos lados pero excluyen el triángulo equilátero en la *C-acción* para establecer la definición [50].

[41] Si este fuera de *45º* tendríamos *135º* [caso equilátero *60º-60º-60º* y piensa si uno fuera *45º*].
[43] No, tendría que ser un número cerrado.
[44] Y éstos deben de ser mayores.
[45] ¡Ah no!, mira sobra, bueno es igual a *45º*.
[47] Cómo le ponemos, es un triángulo con dos lados iguales, dos lados con la misma longitud.
[50] Si le pongo los mismos ángulos [completa otro alumno] Los mismos ángulos iguales y uno diferente.

Comparación (casual o intencional) con otros equipos

Antes de compartir sus producciones en gran grupo, se aprecia que aún no están seguros en relación a si la definición debe o no incluir al triángulo equilátero. En [302] hay una *R-acción* en la cual se expresa (en relación a las definiciones de otros equipos) que decir dos lados iguales no necesariamente significa que el tercero sea diferente. En [302] y [307] se ha producido una *definición no económica* asociada al nivel II de comprensión de Van Hiele. Aunque al final no consta en el registro escrito.

[299] No hay otra (Risas) [cuando se fijan en definiciones de otros equipos antes de la socialización]
[300] Es un triángulo que tiene dos lados iguales y
[302] No, es que no está definido si el tercero es igual o diferente [asienten]
[304] No es un isósceles [otro alumno corrige] Isósceles, sí

uno diferente, igualmente con dos ángulos iguales y uno diferente [muestran acuerdo los estudiantes]

[306] El otro
[307] Ponle 3 [incorpora al triángulo equilátero] // Sí

Hay que destacar que la posición de los triángulos influye en la construcción de ejemplos geométricos y que dichos ejemplos no se dan de manera aislada se perciben como elementos de espacios estructurados. Este último fenómeno lo volvemos a encontrar más adelante en la construcción de ejemplos aritméticos (ver sección 4.3.1.3 Análisis de la parte II: Construcción de números felices y primos felices, p. 172).

Por otra parte, al igual que en la reconstrucción de otras definiciones no geométricas, hay que destacar la importancia que para los alumnos tiene el comparar sus respuestas con otros grupos intentando encontrar diferencias como un mecanismo de control previo a la socialización en grupo. En este caso observamos cómo esto ayuda a desplazarlos de una definición visual (nivel I de Van Hiele) a una definición no económica (nivel II de Van Hiele).

En el equipo **B**, en el siguiente fragmento la idea central es el reconocimiento (*R-acción*) de la propiedad de igualdad de dos de los lados del triángulo enfatizando (*R-acción*) que el tercero sea diferente obteniendo, en una *C-acción,* la definición negociada [41] que en nuestra clasificación se considera una *definición parcial* puesto que se descarta el caso particular en que el tercero es igual a los otros dos. Así mismo se percibe un acuerdo en la definición negociada con la única discrepancia de decidir el lenguaje a utilizar, "diferente" o "desigual", "iguales" o "miden lo mismo".

Por otra parte, el sentido que le dan los alumnos a "regular", no tiene que ver con igualdad de todos los lados. Las siguiente construcción corresponde a una *definición visual* asociada a un nivel I de Van Hiele.

[37] [Triángulo isósceles] Es una figura regular.
[38] Figura geométrica.
[39] Es una figura geométrica regular de 3 lados [escribe].
[40] Donde dos lados son iguales y uno diferente.
[41] Donde dos lados miden exactamente lo mismo y uno desigual.
[42] Diferente, uno diferente [otro estudiante apoya] ponemos que el tercero es desigual, eso está bien

En el siguiente cuadro se presentan las evidencias escritas del trabajo generado en los equipos.

Triángulo isósceles	
A Es un triángulo que tiene 2 lados iguales y uno diferente e igualmente dos ángulos iguales y uno diferente. B Es una figura geométrica regular de 3 lados, donde 2 lados miden exactamente lo mismo mientras que el tercero es desigual a los otros dos anteriores; también tiene dos ángulos iguales y uno desigual C y D Es una figura geométrica de tres lados donde dos de sus lados son iguales y uno diferente F Polígono de tres lados con dos lados iguales y uno distinto.	*Definiciones parciales/excluye equilátero*
E G I Triángulo con dos lados iguales.	*Definición correcta (económica Nivel III Van Hiele)*
H Los tres lados del triángulo son diferentes entre sí.	*Definición equivocada/ refiere triángulo escaleno*

Aunque el triángulo isósceles es un "objeto" que conocen desde sus primeros años de escolaridad, se presentan algunos conflictos dado que más que con el manejo de una definición y propiedades sobre triángulos están familiarizados con figuras o dibujos. Las respuestas dadas por **A**,**B**,**C**,**D** y **F** están basadas en la propiedad de igualdad de los lados. En los grupos **A** y **B** la igualdad de lados no es suficiente y además incluyen la igualdad de ángulos. Las definiciones de los cinco equipos se consideran *definiciones parciales* por no considerar al triángulo equilátero como caso particular del isósceles, dado que enfatizan que dos de sus lados son iguales y uno es de medida distinta. En el grupo **B** la palabra "regular" la asocian con el hecho de que sus lados sean segmentos de recta y no con igualdad de lados o ángulos. En el grupo **F** consideran importante además incluir a los triángulos dentro de la familia de los polígonos. Por otra parte **E**, **I** y **G**, aunque también basan sus definiciones en la propiedad de igualdad de lados, no excluyen el caso del triángulo equilátero y es por esa razón que se consideran *definiciones económicas correctas.* La definición proporcionada por **H** se clasifica como *equivocada*, pues pone de manifiesto que confunde los triángulos isósceles con los escalenos.

Durante la socialización con todo el grupo, dada la homogeneidad, la discusión se centró en el reconocimiento del triángulo equilátero como caso particular del isósceles [48-49-50a]. Aunque los alumnos lo piensan (en representaciones semióticas) como isósceles, en la definición lo excluyen al agregar «y un lado diferente» y en ese sentido el profesor [46] les invita a reflexionar sobre esto. Es así como visualizan que la definición «aquel que tiene 2 lados iguales» no habla de cómo debe ser el tercer lado y eso implica que puede ser o no igual. En [48-50a] se aprecia como el maestro impone (con el respaldo del alumno [49]) la transición de una *definición parcial y visual* (de Villiers) producida por los alumnos, a una *definición económica* correcta asociada con nivel III de comprensión.

[45] Alumnos: Es un triángulo con dos lados iguales y uno diferente.
[46] Profesor: Bueno, parece que esta definición es suficientemente clara, pero quisiera comentar, si definimos triángulo isósceles aquel que tiene 2 lados iguales, ¿estaría bien? [asienten los alumnos].
[48] P: Y uno que tenga 3 lados iguales será isósceles
[49] As: Sí también, porque tiene 2 lados iguales.
[50] P: [a] Sí, ¿verdad? Aunque coincida que el tercero sea igual. Entonces, si pensamos en la definición que incluye "y un lado diferente" el triángulo equilátero, que tiene los tres lados iguales, no sería isósceles. [b]Pero con la definición "aquel que tiene 2 lados iguales" el equilátero es también isósceles. Vemos entonces la importancia de definir de manera precisa.

B. Reconstrucción de la definición de cuadrilátero

A continuación presentamos la transcripción y análisis del diálogo efectuado en los equipos **A** y **B**, sobre los acuerdos tomados para reconstruir la definición de cuadrilátero.
En el equipo **A** se muestran *R-acciones* reconociendo características como "cuatro lados" [63], "figura cerrada" [64]. Al no estar de acuerdo con el significado de las palabras emprenden *B-acciones* para llegar a un acuerdo [65-68]. Mientras que para unos la imagen presentada, (por el tratamiento que da el maestro en la socialización creemos que corresponde a una línea poligonal compuesta por cuatro segmentos de recta y donde el punto inicial no coincide con el final), es una figura, para otros representa un símbolo y para otros «una recta, segmentos de recta». Se aprecia que para un alumno la palabra "figura" ya incluye que sea "cerrada" y esta es la idea que el equipo apoya. Esto es atribuible a la relación que tiene de la palabra con las representaciones visuales (ligadas al contexto matemático). La definición se construye a través de la descripción de propiedades *visuales.*

[63] El cuadrilátero es una figura que tiene cuatro lados que están formados ()
[64] Son cuatro lados, cuatro lados cerrados, pero esa es una figura. Bueno, es una figura cerrada ¿no?
[65] Bueno creo. Es que esta figura también tiene cuatro lados o realmente no es una figura o sí [dibuja]
[66] Pues yo no la veo figura yo la veo como un símbolo
[67] O una recta
[68] Hay una recta, segmentos de recta, los lados

Comparación (casual o intencional) con otros equipos

Al escuchar otras definiciones de otros equipos y al considerar contraejemplos muestra un claro desconcierto en sus diálogos. El ejemplo que antes consideraron "símbolo" y no "figura", ahora se muestra (*R-acciones*) como un contraejemplo que los convence siendo una "prueba" de que deben incluir en su definición de figura geométrica el adjetivo "cerrado" [319-321]. Se producen otras *R-acciones* cuando reconocen que para referirse a los lados deben usar la palabra "segmento" [331] y que deben considerar "unión de segmentos" [332] o "vértices" [334].
En el diálogo se aprecia una confusión entre los términos "segmentos" y "rectas". Esto es comprensible dado que son elementos primarios que se introducen de manera temprana y en ese momento no están preparados para "una definición". De manera que van ligando el término con la situación o representación en que es utilizado. En relación con esto Vinner (2011) habla de cómo se forman los conceptos a través de ejemplos en el contexto cotidiano y muestra cómo a un niño se le enseña el concepto de "silla" señalándole varias sillas en diferentes contextos y diciéndole: "silla". Esto mismo es lo que sucede con términos como "segmentos" y "rectas".
Anidando diferentes *R-acciones* se produce una *C-acción* con lo que obtienen una *definición visual* [328 y 332] correspondiente a un nivel I de comprensión de Van Hiele.

[316] [En forma simultánea a la socialización pero sólo en **A**] Son todas aquellas figuras geométricas formadas por 4 lados
[317] Ah, ya ves
[318] ¿Le pusimos cerrados? ¬[al escuchar sobre otra definición ¿?]
[319] Tiene que ser cerrada [vuelve a preguntar otro alumno] Le pusimos cerrados
[321] Ah porqué pensamos que esa no era una figura geométrica [línea formada por cuatro segmentos y donde el punto inicial no coincide con el final]
[322] No pusiste la misma figura que esa [Niegan y ríen]
[324] Está probado es cerrada
[325] Por 4 lados
[326] Cerrado
[328] Es una figura geométrica formada por cuatro rectas cerrada [asienten]
[331] ¿Rectas?, segmentos
[332] ¡Ya ves! segmentos unidos [otro estudiante agrega] Con cuatro vértices

En estas interacciones los alumnos se expresan de manera espontánea y, eso permite observar como se pone de manifiesto que la formación de muchos de los conceptos matemáticos en juego no se han incorporado a partir de una definición. Más aún, son elementos primarios que se han formado como la mayoría de los conceptos cotidianos, a través de la vinculación de ejemplos con su uso en diferentes contextos. Este es un hecho que debe tenerse en cuenta en la enseñanza de la matemática, cuando pedimos que los alumnos se expresen de manera correcta y cuando tienen deficiencias para "definir" en sentido matemático, ya que este proceso es contraintuitivo y no espontáneo y dista de los procesos cotidianos de pensamiento.

En el equipo **B,** se aprecia que las propiedades de paralelismo y de perpendicularidad se entienden como las dos únicas posibilidades en una figura, es decir, si dos lados no son paralelos entonces son perpendiculares [*R-acción* que envuelve un reconocimiento con debilidades].

[72] [Cuadrilátero] Es una figura geométrica con dos lados paralelos
[73] Dos lados paralelos y dos no [un alumno muestra desacuerdo con esto]
[75] Entonces perpendiculares

De este diálogo podemos extraer que ahora se dirige la discusión ahora hacia una *definición parcial* puesto que sólo consideran los cuadriláteros regulares (con todos sus lados iguales). Se perciben *R-acciones* [76-78] encaminadas al reconocimiento del cuadrilátero como figura geométrica, con cuatro lados iguales. Surge lo que podría ser una *B-acción* para considerar el rombo como ejemplo que permita revisar o engarzar la información disponible [82].

[76] Es una figura geométrica de cuatro lados [escriben]
[77] Lados iguales
[78] De cuatro lados iguales [otro alumno enfatiza] Es lo principal

[81] No, de cuatro lados iguales no
[82] Sí, porque (), ¿los rombos son iguales?

En las líneas [83] y [84] se activan los contraejemplos del rectángulo y del romboide (*B-acciones)* que les disuaden de incluir la propiedad de igualdad de los lados. La descripción del objeto se da a partir de propiedades visuales y de ejemplos gráficos (dibujos) de lo que sería un cuadrilátero. Al igual que en el equipo **A** se corresponde con un nivel I de comprensión.

[83] Porque un cuadrilátero no nada más es un cuadrado también es rectángulo y el rectángulo no tiene todos [sus lados] iguales
[84] Es lo más general y luego ya depende de la figura. Este es un romboide [dibuja] y también es un cuadrilátero.

En esta interacción da la impresión [84] de que no tienen en cuenta la aportación de la estudiante. Sin embargo, aunque no discuten más su aportación y pasan a la definición de círculo, en la producción escrita finalmente quitan la propiedad de "igualdad" de la línea [81]. Este hecho confirma que su argumentación ha convencido a sus compañeros.

Es necesario situarnos en el contexto en el que surgen las definiciones relativas a los cuadrados, esto nos facilita el análisis de respuestas obtenidas. Para ello partimos de la definición y propiedades que usualmente se presentan a los estudiantes en niveles escolares básicos. «*Un **cuadrilátero** es un polígono que tiene cuatro lados. Los cuadriláteros tienen distintas formas pero todos ellos tienen cuatro vértices y dos diagonales. En todos los cuadriláteros la suma de los ángulos interiores es igual a* 360^{o}.» Aparentemente se trata de una definición clara y muy sencilla si previamente se sabe qué es un polígono. De hecho en cinco de los equipos, como veremos enseguida, se habla de "figura geométrica" y en cuatro de "polígono". Esto nos lleva a investigar que hay detrás de esto, y, encontramos que se les define polígono antes de cuadrilátero como: «*Figura geométrica plana limitada por una línea poligonal cerrada que no se corta a sí misma. Los segmentos que forman la poligonal son los lados del polígono y los puntos de enlace de éstos los vértices*.» Naturalmente es una definición para la cual es necesario definir antes "línea poligonal", lo que no sucede. Incluso se da la definición de "polígono" y después se usa de manera muy natural con alguna representación semiótica pobre (algunos dibujos).

Las producciones escritas derivadas del trabajo en equipos son las siguientes.

Cuadrilátero
A Son todas aquellas figuras geométricas cerradas formadas por 4 lados. D Cualquier figura cerrada con 4 lados. B Es una figura geométrica con 4 lados. *Definiciones ambiguas*
C Es una figura geométrica de 4 lados rectos que son paralelos. *Definición parcial/incluye sólo paralelogramos*
E F G I Polígono con 4 lados. *Definición correcta (económica)*
H Una figura geométrica donde el perímetro de la base está formado por cuatro lados iguales (en forma de un cuadrado) *Definición incoherente*

Las respuestas de **A**, **D** y **B** en nuestra caracterización corresponden a *definiciones ambiguas*. En los casos de **A** y **D** se pueden considerar como cuadriláteros a figuras que podrían no ser planas, tener lados curvos y no se descarta que dos lados se puedan cruzar. Para **B** se pueden incluir también figuras no planas, abiertas, de lados curvos y dos lados se pueden cortar.
En el caso de **C** únicamente considera un subconjunto de cuadriláteros: los paralelogramos; por esta razón hemos clasificado esta producción como *definición parcial*.
La definición de **H** la hemos considerado *incoherente*, aunque se requeriría cuestionarla un poco más (ya fuera de nuestro alcance) ya que consideran el perímetro de una "base cuadrada" y eso nos sugiere que están pensando en una figura tridimensional.
Para el caso de los grupos **E**,**F**,**G** y **I** aunque presentan la definición tal cual la aprendieron en primaria no nos queda claro que puedan construir una definición de "polígono" o sean capaces de recordarla, dado que en la práctica se sobreentiende y no se recurre a la definición.

En la socialización en gran grupo, podemos ver que el paso de la *R-acción* [72] a [75] implica *B-acciones* por la consideración de ciertas debilidades en el manejo de la definición de cuadrilátero: en relación con el lenguaje, distinguir entre "segmento" y "recta" [73-74]; y con ciertas propiedades como que las "rectas sean paralelas" [73-74 al parecer sin conseguirlo] y con la necesidad de agregar la propiedad de "cerrada" a la figura [77-78]. Para esto el profesor [73] presenta un ejemplo que pretende provocar la corrección de lenguaje y eliminar la propiedad de paralelismo. Esto deriva por un lado en la distinción entre "segmento" y "recta" [74] y por otro en el convencimiento de que no es necesario que los lados sean paralelos [74]. Una nueva *R-acción* está relacionada con que en la definición se incluya que la figura sea "cerrada" a lo que se llega con un ejemplo que actúa como una *B-acción* [77-78]. El grupo acepta la definición obtenida como una *C-acción* [75]. Aún se tiene una definición *visual* correspondiente al nivel I de comprensión.

[72] Alumnos: Es una figura geométrica de 4 lados, donde sus rectas son paralelas
[73] Profesor: [Dibuja figura con dos rectas paralelas y dos segmentos no paralelos] ¿Es un cuadrilátero?
[74] As: ((Ra)) No, pero sí deben ser paralelas
[75] As: Es una figura cerrada de 4 lados [otros alumnos muestran desacuerdo con esto]
[77] P: ¿Este es cuadrilátero? [Dibuja 4 segmentos unidos pero sin cerrar] [Responden que no]

Para obtener la definición «figura cerrada simple de cuatro segmentos de recta», *C-acción* [90], se requiere primero una *B-acción* que permita identificar (*R-acción*) que la propiedad de tener lados paralelos corresponde a una clase particular de cuadriláteros (los paralelogramos) y convencerse (*B-acciones*) de agregar que la figura sea cerrada, simple y que sus lados sean segmentos de recta.
La primera parte ya se generó en el anterior fragmento con un alto grado de convencimiento [74] aunque no se ha discutido la idea de paralelismo entre los lados. En este sentido el profesor propone la *B-acción* [79-81] que cumple con la función de convencer que los paralelogramos son una clase particular de cuadriláteros o que constituyen un ejemplo genérico. Para convencer de que la figura sea cerrada [83-85], que sea simple y [85-90] que los lados sean segmentos de recta se recurre a *B-acciones* en forma de ejemplos [81-82]. Así se produce una *definición económica correcta* (*C-acción* mostrada en [90]) que corresponde con nivel III de comprensión de Van Hiele.

[79] Profesor: ¿Este? [Dibuja figura cerrada con cuatro segmentos de recta pero lados no paralelos]
[80] Alumnos: No, pienso que deben ser paralelos unos ¿no?
[81] P: Te refieres a una clase especial de

[83] P: Entonces es importante cerrarla. Ahora esto es un cuadrilátero [Dibuja una figura cerrada con 4 lados (segmentos de recta) pero dos de ellos se cortan] [Risas de los alumnos]
[85] P: Es un cuadrilátero pero no es simple porque sus lados se traslapan o se cortan. Y ahora, este es un cuadrilátero

los cuadriláteros: los paralelogramos. Veamos, volviendo a la otra definición donde aparece
la palabra “cerrada”. A ver si tenemos [Dibuja una figura con dos lados paralelos (segmentos de recta) y los otros no paralelos pero sin cerrar] ¿Es cuadrilátero?
[82] As: Ay no, eso no

[Dibuja figura cerrada con 4 lados curvos], es una figura cerrada y con 4 lados ¬
[86] As: (Risas) Sí, pero sus lados son segmentos curvos
[87] P: Entonces qué ponemos en la definición
[88] As: Decir que sus lados son segmentos de recta
[89] P: y qué más para que tu definición funcione
[90] As:quitamos paralelas y ponemos que es figura cerrada simple de cuatro segmentos de recta.

Mediante la socialización en gran grupo se reconstruyó la definición y los ejemplos propuestos por el profesor de lo que sí es y de lo que no es un cuadrilátero provocó un conflicto que ayudó en la afinación de las definiciones (ver figura 29). En la socialización es interesante comprobar cómo el profesor se apoya en contraejemplos a partir de las definiciones que los estudiantes comparten, y hace que sean los propios alumnos los que transformen su definición a medida de que se van convenciendo sin caer en la tentación de presentar él mismo las definiciones “correctas” (desde su preferencia o apreciación), aún cuando la sesión se alarga respecto del tiempo programado. Al final lo verdaderamente valioso, y que se nota en el ánimo de las discusiones, es que todos participan de la construcción de la definición. La definición convenida finalmente es la de «f*igura geométrica cerrada y simple formada por cuatro segmentos de recta*».
Claramente en la socialización se aprecia la función de los ejemplos y no ejemplos por transmitir la *necesidad* a los estudiantes de contar con definiciones que determinen de manera unívoca el concepto matemático para que no haya lugar a ambiguedades. La comprensión por parte de los estudiantes de la función que cumplen las definiciones en el pensamiento matemático los prepara para la transición de la etapa *basada en la imagen del concepto* a un nivel de comprensión de la demostración que Chin (2002) y Chin & Tall (2000) denominan la etapa basada en las definiciones, que se caracteriza porque éstas son utilizadas para hacer deducciones basadas explícitamente en las definiciones.

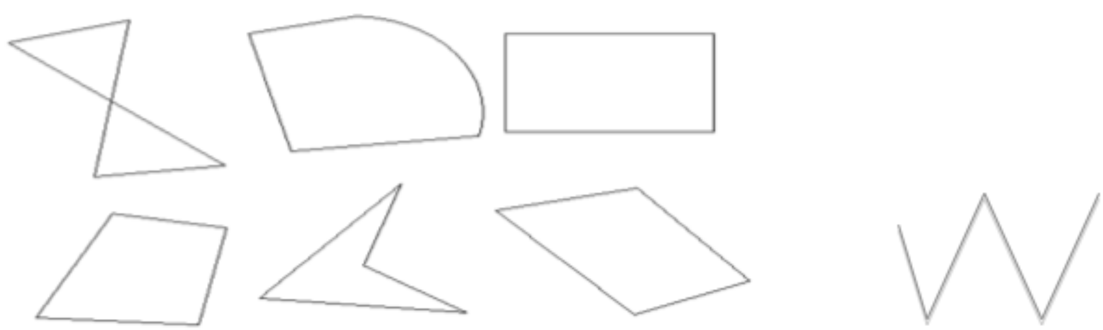


Figura 29. Algunos dibujos presentados en el pizarrón durante la socialización de definiciones construidas de cuadrilátero al interior de los equipos.

C. Reconstrucción de la definición de círculo

A continuación se presenta la transcripción y análisis de la discusión de los equipos **A** y **C** en torno a la definición de círculo.
En el equipo **A** la idea de la definición gira alrededor de la noción de circunferencia (*R-acción*). Lo visualizan como conjunto de puntos (*R-acción*) a la misma distancia, percibiendo que a su definición le falta un punto fijo, respecto del cual se considere la “distancia”.

[68] …Un círculo es una serie de puntos alrededor o a la misma distancia. Un conjunto de puntos que está a la misma distancia, ¡ah no! ¿es un conjunto de puntos? () Sí ¿no? ¬

[69] Qué, ¿porqué?
[70] Por qué dudas [contesta el alumno] No [Risas]

En una *R-acción* [72] se reconoce la necesidad de un punto fijo. En [75] mediante una *B-acción* donde se entrelazan las anteriores *R-acciones* para construir la definición sobre la noción de trayectoria o lugar geométrico, con ciertas debilidades de lenguaje al describir el movimiento de un punto dependiente de uno fijo. Otras *B-acciones* [76-78] se observan al tratar de comprender y manipular la idea expresada en [75].

[72] [a] Un punto fijo o [a] un punto en específico
[73] ¿Fijo o específico? ((Pva)) [dudan]
[75] Porque digo se pueden mover y se mueven sumados junto con él

[76] O sea que hasta ese punto va a ser la misma distancia [asienten]
[78] O sea, tú dices …[dibuja los puntos y pregunta] Y si muevo este punto hacia acá

La *C-acción* [68 y 72] muestra una definición (de circunferencia y no de círculo) obtenida mediante un proceso descriptivo que es una *definición parcial,* según nuestra primera clasificación, y a una *visual* en términos de de Villiers.
En los diálogos anteriores se manifiesta la dificultad que presentan los alumnos para expresar sus ideas en forma verbal. En este sentido, actividades como esta donde se interactúa con los compañeros y con el profesor, son oportunidades para desarrollar esta habilidad en los estudiantes: habilidad que debe tener un profesional en esta disciplina.

En el equipo **C** aunque se activan conocimientos recientes de la clase de geometría se ofrece la definición de circunferencia y no de círculo. Esta definición obtenida en la *C-acción* [88-89] es una *definición parcial* y *visual* (de Villiers).
En [86] se observa una *R-acción* mediante el reconocimiento de la noción de trayectoria o lugar geométrico. De [89] se destaca como visualizan [*R-acción*] la circunferencia en el origen probablemente como consecuencia de los ejercicios escolares.

[86] [Un círculo] Donde un punto se mueve siempre a la misma distancia de otro. Lo vimos en geometría
[87] Concluimos con esa ¿no?
[88] Es una figura geométrica donde un punto se mueve siempre a la misma distancia del punto
[89]Del punto de origen porque eso es el plano cartesiano es el (0,0) [asienten]

En las respuestas en pequeños grupos de la definición de círculo los equipos **A**, **B**, **C**, **E**, **G**, **I**, **F** y **H** presentan la definición de circunferencia y únicamente **D** enlaza su definición incluye la de circunferencia junto con los puntos interiores.

Círculo
A Un conjunto de puntos que están a la misma distancia de un punto fijo B Es una figura geométrica donde todos sus puntos están a una misma distancia de un punto fijo llamado centro. E G I Lugar geométrico de puntos que equidistan de otro llamado centro F El conjunto de puntos que equidistan de un cierto punto. H Una serie de puntos alrededor de otro punto céntrico donde la distancia del punto céntrico a cualquier punto de la serie es la misma. C Es una figura geométrica donde un punto se mueve siempre a una misma distancia del punto de origen *Definiciones parciales*
D El conjunto de todos los puntos que integran la circunferencia y todos los puntos dentro de ella *Definición correcta*

Las interacciones en gran grupo tienen como punto de partida una *R-acción* de reconocimiento de la definición vinculada a la noción de circunferencia e inmediatamente el maestro los cuestiona [93] para averiguar si para ellos "circunferencia" y "círculo" son sinónimos. Esto se confirma por la respuesta del grupo desconcertado [94], que comienza a cuestionarse. El profesor no da tiempo suficiente a los alumnos para reflexionar sobre este hecho y menciona que circunferencia y círculo son conceptos diferentes. Aunque se puede definir el concepto, aprovechando que como conjunto de puntos la circunferencia es subconjunto del círculo sólo se llega a distinguir que se está hablando de otro objeto. La forma de llegar a esta definición es *descriptiva* y se produce una *definición visual*.

[92] Alumnos: Es una figura geométrica donde un punto siempre se mueve a la misma distancia de un punto de origen
[93] Profesor: A ver, aquí tienen un punto que se mueve siempre a la misma distancia de este otro [dibuja]. Entonces se refieren sólo a estos puntos de la "orilla" ¿y los de "adentro"?
[94] As: ¿Cómo? los de "adentro"
[95] P: Sí, lo que ustedes definieron es la circunferencia

En el siguiente fragmento de la discusión se acepta la distinción entre las figuras geométricas y un alumno exhibe una *B-acción* para agregar los puntos del interior de la circunferencia a la definición, sin utilizar la definición de circunferencia sino únicamente el término [96]. En [97] otro alumno cuestiona esta definición poniendo de manifiesto que está habituado a una revisión de evaluación como correcto o incorrecto. Finalmente el paso de [96] a la definición presentada finalmente en grupo [99] lo da el profesor produciendo una *definición no económica* sin dar oportunidades a los alumnos de construirla sin utilizar el concepto de circunferencia, aún cuando podría haberlos motivado para que revisaran su ampliándola de manera *constructiva*, agregando propiedades a la definición que tenían.

[96] Alumnos: Son los puntos que integran la circunferencia y los puntos dentro de ella
[97] As: Eso te lo estás inventando
[98] Profesor: Todos los puntos que forman la circunferencia y todos los que se encuentran dentro de ella. Bien, ¿otra forma?
[99] P: Todos los puntos que equidistan del centro a una distancia *r* y todos los puntos cuya distancia al centro es menor que *r*

En el siguiente fragmento, el profesor presenta una definición formal *económica correcta*. Probablemente esta definición ya era conocida por algunos alumnos, sin embargo muchos elementos incluidos en ella son conocidos por la mayoría. El profesor aprovecha para introducir o aclarar notación que se utiliza y con la que tienen dificultades los alumnos con frecuencia.
En este apartado se puede destacar que, aunque está claro el objetivo de obtener una *definición económica correcta*, no se promueve una interacción con el grupo ni se involucra a los alumnos para que conecten la forma en que está expresada la definición con esta otra forma. Cabe mencionar que los alumnos ya han tenido contacto durante casi un semestre con notación formal y en su programa de geometría analítica han manejado ya varios de los conceptos y notación mencionados en [99].

[100] Profesor: Más adelante en la carrera van a ver otras formas de definición. ¿Saben qué es $\mathbf{R}^2$?
[101] Alumnos: El plano
[102] P: Muy bien entonces otra forma de definirlo usando la notación de conjuntos es [escribe] $C[(x_0,y_0),r]=\{(x,y)\in R^2 \mid d[(x_0,y_0),(x,y)]\leq r\}$ Esto se lee el círculo C centrado en (x_0,y_0) y de radio r es el conjunto de puntos (x,y) en el plano tales que la distancia entre el centro y el punto (x,y) es menor o igual que el radio. [Escribe el significado de cada símbolo]

D. Reconstrucción de la definición de semejanza de triángulos

Para completar el enunciado, *Dos triángulos ABC y DEG son semejantes cuando…*, seguimos la interacción en los equipos **A** y **C**.

Reconstrucción de la definición de semejanza en el equipo A

En el equipo **A** se hace referencia (*R-acción*) a la igualdad de ángulos en un solo triángulo (*ABC*) y no se establece una comparación entre triángulos.

[96] Dos triángulos … cuando A, B, C son iguales

[97] Sí, ¿no? ¬ [asienten]

Comparación (casual o intencional) con otros equipos

Este diálogo se produce de manera simultánea a la socialización, pero sólo en el equipo **A**. Al inicio de la socialización se habla en el grupo de la igualdad del ∢A con su correspondiente ∢A' y ∢B con ∢B'. Creemos que en ese sentido los alumnos agregan en su producción escrita la parte de «ángulos interiores y exteriores» pero entendiendo la comparación de los ángulos en cada triángulo y la comparación de los ángulos entre los dos triángulos. Observamos también una *R-acción* que deja ver que conciben semejanza en ángulos [352-353].

[344] Cuando sus ángulos interiores y exteriores son iguales [el profesor dibuja triángulos ABC y A'B'C']
[346] [asienten y ríen al ver el dibujo] ¡Ah! por un múltiplo de ()
[347] Y *C'* es que dos [triángulos]
[348] Sí. () Ah no, no
[349] Ah ya, son iguales [los ángulos]
[350] Aquí sería
[351] O los ángulos también
[352] Sí, los ángulos
[353] Son semejantes

El siguiente diálogo ocurre de manera simultánea a la línea [161] de la socialización en grupo: «Otra forma de verlo es si hay un número que multiplicado por *a* nos de *a'* y ese mismo número multiplicado por *b* sea *b*', etc»

[354] Es un múltiplo [el lado de un triángulo es múltiplo del correspondiente en el segundo triángulo]
[355] Ah es un múltiplo de *a* [el lado *a'*del triángulo A'B'C']
[356] *b'* [asienten]

Durante la discusión con todo el grupo [165-166] [más adelante en el siguiente apartado] los alumnos se dan cuenta que tienen que compara los ángulos. Cuándo el alumno dice «los de afuera» creemos que se refiere a comparar los ángulos de ABC con los ángulos del triángulo A'B'C'. Esta comparación se basa en la visualización de las figuras.

[358] ((Mm) Iguales también [ángulos]

[359] Los de afuera [risas]

Aunque se modifica su producción por esta comparación casual, no hay un intercambio real de ideas, únicamente van comentando lo que escuchan y adaptan su definición.

Reconstrucción de la definición de semejanza en el equipo C

En el equipo **C** en esta parte se observa un reconocimiento erróneo de que los lados deben ser iguales [97] en triángulos semejantes. También de forma equivocada se menciona igualdad de vértices [98], esto puede atribuirse a que la notación usual tanto para ángulos como para vértices es la misma letra mayúscula y esto forma parte de la imagen de ambos objetos matemáticos.

[96] *Dos triángulos ABC y DEG son semejantes cuando*… [leen]
[97] Tienen lados iguales
[98] Los lados ¿no? o los vértices
[99] Sus lados o ángulos [corrige otro alumno enfatizando el conectivo] Sus lados y ángulos

A diferencia del equipo anterior (**A**) aquí la comparación se establece entre los dos triángulos. En el lenguaje cotidiano la palabra "semejante" es utilizada de manera diferente. Un alumno [105] considera que los objetos son parecidos pero no iguales (*R-acción*).

[101] A ver, aquí señorita [para que atienda su compañera y también opine]
[102] ((Mm)) Cuando este lado es igual a este y este a este y este a este [dibuja los triángulos].
[103] No me acuerdo
[104] Sí, ¿no?
[105] Pero dice que son semejantes, no iguales [el alumno acepta la aclaración] Bueno, semejantes

Otro alumno [107-110] da un significado distinto a la semejanza: objetos iguales pero en diferente posición. Intenta persuadir (*B-acciones*) a sus compañeros con ejemplos gráficos (escritos o con señas), sin embargo otro estudiante [111] otorga otro significado a la palabra: objetos iguales o parecidos, basado en reconocer (*R-acción*) la diferencia en las etiquetas de los vértices de los triángulos (*ABC, DEG*).

[107] Por sus ángulos yo digo que por sus ángulos. Porque por ejemplo yo digo que aquí te está diciendo que un triángulo ABC y por ejemplo ese puede ser también un triángulo así [con sus manos y lo mueve]
[108] ¿Movido? ¿cómo?
[109] ¡Bueno!. A ver, necesito una hoja
[110] Por ejemplo [dibuja], estoy diciendo que un triángulo es A, B, C par de … si fuera uno igualito a este también sería B, A, C. [cambia posición]
[111] No, te está dando otras letras [DEG] entonces tal vez es un triángulo diferente
[112] Por eso dice que son semejantes

Es notable que para un estudiante no es evidente el hecho de que dos triángulos tengan ángulos iguales y que sus lados correspondientes puedan tener medidas diferentes (*R-acción*). La dinámica gira en torno a esta, cuestión sin embargo, no se intenta buscar argumentos para solventar la duda y vuelve a realizar la misma pregunta [114 y 117].

[113] Sus ángulos deben ser iguales
[114] No, pero si sus ángulos son iguales, serían [triángulos] iguales
[115] No, hay diferencia
[116] […] sólo sus ángulos iguales, porque si sus lados son iguales entonces los triángulos son iguales
[117] Pero si sólo son ángulos iguales, ¿no es lo mismo?
[118] No, serían diferentes entonces los únicos son los ángulos

Los ejemplos (*B-acciones*) que utilizan se refieren a triángulos "especiales": isósceles y rectángulos. Esto hace que se modifique el significado de semejanza y ahora se piense como: parecidos en algo. Con los triángulos rectángulos tienen un ángulo que es igual y discuten [124] acerca de que uno de los ángulos distintos del ángulo recto considerando que no es igual a ningún ángulo del otro triángulo, «pero tal vez un lado sí». Muestran cierta confusión [127] tratando de integrar que los triángulos rectángulos son "parecidos" con los significados de semejanza que discutieron con anterioridad. Esto se complica más aún al ser un concepto con el cual ya han tenido contacto y poseen una imagen del concepto integrado por palabras, imágenes, operaciones, etc. que pretenden insertar o conectar con la definición que generan. Finalmente tratan de integrar triángulos rectángulos, isósceles y los que tengan todos sus ángulos y/o sus lados correspondientes iguales; dentro de los "triángulos semejantes", obteniendo una definición (*C-acción*) en la que consideran triángulos con "algún parecido" [123 y 128].

[119] Por ejemplo aquí un triángulo isósceles
[120] ¿Por qué isósceles?
[121] No sé, porque se me ocurrió un isósceles. Pero pueden ser también un rectángulo [dibuja]
[122] Pero tal vez los lados sean iguales
[123] No, pero podemos decir que se parecen [como son triángulos rectángulos los dos]
[124] Este ángulo no va a ser igual a ninguno de estos [uno distinto del ángulo recto]
[125] Pero este lado sí puede ser igual a este ¿no?
[126] A ver este es un triángulo rectángulo, entonces aquí vale 45^0, 90^0 porque es rectángulo y aquí 45^0
[127] Pero tal vez este sea igual a este, pero ¿cómo saberlo?
[128] Sí es ¿no?, porque se parecen, ¡mira son iguales! ¿o qué? ¬
[129] Semejante, …¡Ay! es que semejantes, ((Mm))
[130] Sí, sus ángulos pueden ser iguales
[131] Bueno, alguno de esos
[132] Cuando alguno de sus ángulos o de sus lados pueden ser iguales
[133] Qué más tiene el triángulo

Podemos destacar dos cosas: 1) Los usos en el lenguaje cotidiano son parte importante de la imagen del concepto y esto dificulta que se tengan elementos suficientes para argumentar qué es "lo correcto". En esta interacción se activaron y convivieron diferentes usos y significados de la palabra semejanza: igual forma (igualdad de ángulos), exactamente igual (ángulos y lados iguales), parecidos pero no iguales, iguales o parecidos, objetos iguales pero en diferente posición y con algún parecido. Al final la decisión se toma sobre el significado más inclusivo y por tanto el más amplio, el último. 2) El uso de ejemplos prototípicos (triángulos isósceles y rectángulos) ha sido determinante para la producción de la definición (*visual*) demasiado amplia y ambigua. Es decir, este tipo de ejemplos con características especiales distraen de visualizar los aspectos relevantes centrándonos en la especificidad para derivar de ahí generalidades.

En la tabla 23 aparecen las respuestas escritas de los estudiantes después de debatir en equipo:

Tabla 23. Completando definición de: ***Dos triángulos ABC y DEG son semejantes cuando…***
$\boxed{A}$ sus ángulos interiores y exteriores son iguales $\boxed{H}$ los tres ángulos formados por cada triángulo son iguales $\boxed{FG}$ sus lados son proporcionales y sus ángulos iguales $\boxed{D}$ son proporcionales sus lados. *definiciones ambiguas*
$\boxed{C}$ cuando alguno de sus ángulos o de sus lados pueden ser iguales $\boxed{E}$ las proporciones entre los lados respectivos entre 2 triángulos son las mismas *definiciones incoherentes*
$\boxed{B}$ sus lados y ángulos correspondientes son proporcionales $\boxed{I}$ todos sus lados son proporcionales y sus ángulos son iguales y además se cumple: $a/d=c/e=b/f$ *definiciones correctas (no económicas)*

Las respuestas de los equipos **A** y **H** las hemos clasificado como *definiciones ambiguas.* Entre otras interpretaciones, la ausencia del adjetivo "correspondientes" (en "ángulos") permite pensar que ambos triángulos poseen sus tres ángulos iguales, es decir, que son triángulos equiláteros. En el siguiente apartado se discute ampliamente la interacción en el equipo **A**.

En la producción del equipo **C**, etiquetada como *definición incoherente*, al igual que en el análisis de definiciones anteriores sobre otros objetos matemáticos, nos encontramos con un uso inadecuado de cuantificadores, de conectivos y en estructura de la forma de expresión verbal. La definición producida en este equipo implicaría más de una interpretación: que "todos los triángulos son semejantes", que "o los ángulos son iguales o bien sus lados lo son", que los triángulos con algo en común son semejantes (como los rectángulos, isósceles, etc) y otras más que se verán en el análisis de la interacción del equipo en la siguiente sección.

En las producciones de los grupos **B**, **D**, **E**, **F**, **G** e **I** se sugiere de manera explícita la idea de proporcionalidad. En los equipos **B** e **I** se producen *definiciones no económicas correctas*. En el caso de **B**, la proporcionalidad se atribuye tanto a lados como a ángulos. Esto es, por un lado; la "proporcionalidad" en ángulos correspondientes ($\sphericalangle A/\sphericalangle D$ igual a $\sphericalangle B/\sphericalangle E$ con $\sphericalangle A$ correspondiente a $\sphericalangle D$ y con $\sphericalangle B$ correspondiente a $\sphericalangle E$) sucede únicamente si los ángulos son iguales, por otro lado; de la proporcionalidad en lados correspondientes (es decir, si denotamos, como es usual, al lado a como el lado opuesto al ángulo $\sphericalangle A$, b y c como opuestos respectivamente al $\sphericalangle B$ y al $\sphericalangle C$ y correspondientes con los lados d, e, g del triángulo *DEG* y se satisface que $a/d=b/e=c/g$) se deduce la igualdad de ángulos del triángulo y viceversa. Mientras que en la producción de **I**, aunque no menciona la palabra "correspondientes", como se discutió en las producciones de **A** y **H**, establece una correspondencia de manera implícita, entre $\sphericalangle$ A y $\sphericalangle$ D, de $\sphericalangle$ C con $\sphericalangle$ E y de $\sphericalangle$B con $\sphericalangle$F, al expresar las proporciones $a/d=c/e=b/f$ (nótese qué hemos denotado al triángulo como *DEG* y los estudiantes lo han tomado como *DEF* por costumbre del orden alfabético, así que no lo hemos considerado como un error).
De las producciones ligadas a la proporcionalidad, pero que presentan algún error u omisión, se tienen las de los equipos **D**, **E**, **F** y **G**. Las respuestas, clasificadas como *ambiguas,* de los equipos **D**, **F** y **G** omiten el adjetivo "correspondientes" para los lados de los triángulos, como antes comentamos de los equipos **A** y **H** (en relación sólo a ángulos). No incluir el adjetivo "correspondientes" para los lados, puede derivar en más de una interpretación, como pensar la proporcionalidad en cada triángulo (cuando alguno de sus lados o ángulos son iguales, en la definición de **C**). Finalmente en la respuesta derivada de la interacción en el equipo **E** la "proporción" se entiende como "razón" y se clasifica como *incoherente*.

Definición de semejanza en gran grupo

La interacción en gran grupo se ha dividido en dos fragmentos para facilitar su análisis. En el diálogo del primer fragmento encontramos una *R-acción* que muestra que los alumnos reconocen que una característica de los triángulos semejantes es que sus lados son proporcionales [142]. En [144-145] se exhiben *R-acciones* de definiciones ambiguas (algún lado o ángulo sean iguales). En esta ocasión el profesor les pone un ejemplo dibujando dos triángulos con un lado igual y pregunta si serían semejantes. En las siguientes líneas se muestra que para un alumno sí es semejante mientras que para otros no lo son. Es interesante cómo fueron negociadas estas producciones en el seno del equipo **C**.

[142] Alumnos: Sus lados son proporcionales
[143] Profesor: Alguna otra [definición]
[144] As: Cuando alguno de sus ángulos son iguales
[145] As: O alguno de sus lados pueden ser iguales
[146] As: ¡Pueden eh! No siempre ((Ra))
[147] P: [Dibuja 2 triángulos] Digamos que este lado es igual que este. ¿son semejantes?
[148] As: Sí [otros responden que no]

En el fragmento siguiente se continua discutiendo acerca de este último ejemplo (*B-acción*) [147-151]. Esto conduce a tratar de definir proporcionalidad [151-154] sin éxito. El profesor les conduce a distinguir semejanza de congruencia, e igualdad de proporcionalidad en lados. Para ello trata que los alumnos participen y que construyan sus propios argumentos. No obstante, la garantía

[161-162], que consideramos es de suma importancia para la comprensión del concepto de proporcionalidad, fue establecida por el profesor aún y cuando el 66.6% de las producciones de los equipos se basaron en la noción de proporcionalidad. Al no aprovechar la oportunidad de reconstrucción de esta noción por los alumnos no se ha podido comprobar entendían la noción de proporcionalidad y la conexión que existía con la representación verbal o escrita de su definición. Por otra parte notamos que la definición [168] resultó *ambigua*, dado que, tal como se discutió en el análisis del concentrado de respuestas, se omite "correspondientes" como adjetivo de "lados", aunque en [161-162] se pone de manifiesto que el sentido es correcto. Sin embargo la "definición final correcta" de semejanza debería haber sido el texto escrito acompañado de la explicación y de la interpretación con el diagrama correspondiente. Esto sucede a menudo y generalmente los estudiantes se quedan con parte del registro en sus apuntes y muchas veces al utilizar las definiciones sólo retoman parte del registro (y por ejemplo omiten el diagrama o explicación correspondiente). De ahí la importancia de la escritura de la definición de los conceptos mediante un trabajo en el aula tratando siempre que la escritura sea correcta, que no de pie a más de una interpretación y que no presente incoherencias en el lenguaje y en la estructura.

[150] Profesor: a) De acuerdo a su definición serían semejantes [alguno de sus lados son iguales]. b) Pero en la de ellos [si sus lados son proporcionales] ¿qué significa que sean proporcionales [sus lados]?
[151] Alumnos: Ni saben
[152] As: ¡Ya! me distraen. No se lo puedo explicar
[153] As: Que sus lados sean casi iguales
[154] As: Son proporcionales, no casi iguales
[155] P: Vamos a tratar de verlo. Cuando dos triángulos tienen todos sus lados igualitos se pueden poner uno encima del otro y coinciden exactamente. A eso como lo podemos llamar
[156] As: Congruentes
[157] P: Sí, exacto. Congruentes quiere decir que coinciden, que son iguales. Pero ahora supongamos que tengo otro triángulo con las mismas características, pero en chiquito o más grande [dibuja] como ampliar o reducir. ¿Estamos de acuerdo? […] ¿Han visto alguna maqueta? [asienten]
[159] P: ¡Ah! el edificio grande y el chiquito se parecen. Pero ¿qué cambia?¬
[160] As: La escala
[161] P: Bueno esto nos lleva a definir proporcionalidad. Proporcionales significa que si yo divido este lado entre este [su correspondiente] es lo mismo que si divido este entre este [señala su dibujo] y este entre este. ¿Sí me explico? Estas tres divisiones siempre me van a dar lo mismo. Nombramos los lados a,b,c y a',b',c'[correspondientes] entonces [escribe $a/a'=b/b'=c/c'$] Otra forma de verlo es si hay un número que multiplicado por a nos de a' y ese mismo número multiplicado por b sea b', etc. Ese número por el que multiplico se llama razón y tiene que ver con la escala precisamente. ¿Han visto alguna maqueta que diga escala 1 a 100 [escribe 1:100]? [asienten los estudiantes]
[163] P: Quiere decir que si multiplican por 100 las medidas de la maqueta obtienen ¬
[164] As: Las medidas del original
[165] P: Pero entonces, lados proporcionales significa esto y semejantes quiere decir, de manera más sencilla, que tienen la misma forma. Si se fijan aquí en los ángulos cómo son ¬
[166] As: Ángulos iguales
[167] P: Entonces dos triángulos son semejantes si tienen sus ángulos iguales, o bien
[168] As: [dos triángulos don semejantes] si tienes sus lados proporcionales
[169] P: […]ya tenemos dos definiciones y dicho de otra manera, menos formal, decimos¬
[170] As:[…]triángulos con misma forma y diferente tamaño, en caso de coincidir son congruentes

E. Reconstrucción de la definición de ortocentro

En esta interacción se discuten las respuestas de los grupos **A** y **D** que mediante un proceso descriptivo producen una definición *visual.* En esta ocasión se percibe una confusión entre circuncentro e incentro con el ortocentro, y por ende entre mediatrices, bisectrices y alturas. El contexto en el cual se han utilizado las mediatrices y bisectrices es parte de la imagen del concepto e influye en la formación o reconstrucción del mismo. Dicho contexto se caracteriza por ejercicios del tipo, «encuentre la circunferencia que pasa por los tres vértices del triángulo … » o bien «encuentre la circunferencia que toca un solo punto de cada lado del triángulo …». También podemos ver, como ya se discutió antes en la definición de círculo (p. 178), que hay un tratamiento de la circunferencia y círculo como sinónimos.

En el equipo **A** las *R-acciones* [110, 114, 116, 120, 122, 124, 126, 131 y 133] muestran que la palabra "centro" recuerda a los alumnos "una circunferencia o círculo" y por tanto es lo que usan para la reconstrucción de la definición del ortocentro, del circuncentro o del baricentro.

También hay una conexión [*R-acción*] entre "centro" y "punto medio" [131 y 134] porque el punto medio del diámetro [segmento] es justamente el centro de la circunferencia. Sin embargo no se distingue cuando utilizar un término y cuando otro.

También se perciben *R-acciones* sobre "mediatrices" (y perpendicular) en [111, 113], "bisectrices" [112, 125], "aristas" [117,122], "vértices" [114, 116, 119, 122 y 135], triángulo [110, 114, 116, 119, 135 y 136] y círculo [114, 116, 120, 122 y 134]. Además se producen *B-acciones* cuando el enunciado expresado reúne más de un término como en [122] «centro de un círculo que pasa por vértices y aristas» o lo cercano a la *C-acción* [131-136] que produce la definición «es el centro (punto central/medio) del círculo que toca los vértices del triángulo».

[110] Es el centro de un triángulo
[111] […] Cuando sacan las mediatrices que es el punto de intersección [confunden con el circuncentro]
[112] ¡Ay no! son bisectrices [confunden con incentro]
[113] Sí, porque la mediatriz es ((Pva)) … esto. Es perpendicular [señala sobre un dibujo]
[114] Más bien, es como que el punto que es el centro del círculo que toca los vértices de un triángulo
[116] El centro de un círculo que pasa por los vértices
[117] ¿Por las aristas no? ¬ [corrige otro alumno] No, ( ) sí, perdón
[119] ¿Por los vértices de un triángulo?
[120] El centro de un círculo ((Pva)), ¡ay! [confundida]
[122] A ver, el centro del círculo que pasa por los vértices y por las aristas [lados del triángulo]. No, ah no, perdón, por los vértices [tratando de entender]
[123] Le ponemos…es el punto… A ver ¬
[124] Es el centro del círculo
[125] Y si le ponemos que es el punto de intersección de las bisectrices [incentro]
[126] O le podemos poner que es el centro del círculo
[127] A *p* se le conoce como orto¿?
[128] Donde el círculo *C* […] Toca (Risas) [otro alumno pregunta] Cómo le podemos poner
[131] Es el punto central del círculo que toca los vértices de un triángulo
[132] Sí pues así. O es el centro
[134] Punto medio del círculo, no de un…( )
[135] Qué toca los vértices de un triángulo
[136] Dónde el triángulo
[137] No, si los toca a los tres como va a estar afuera [le dan la razón]

Comparación (casual o intencional) con otros equipos

Al escuchar definiciones producidas en otros equipos las comparan con la suya antes de la socialización como un mecanismo para contrastar sus respuestas. En esta parte es difícil identificar cuáles son las intervenciones del equipo **A** y cuáles corresponden a otros equipos. Finalmente en las líneas [382-397] se aprecia la definición escrita final es: «el punto centro de un círculo que toca los tres vértices de un triángulo». Esto nos lleva a concluir que se fijan únicamente en las similitudes de respuestas (una mediatriz y una altura son ambas líneas perpendiculares u ortogonales a uno de los lados del triángulo) y no en las diferencias correspondientes al punto que determina su trazado, ya sea vértice opuesto o punto medio del lado del triángulo. Encontramos además de las *R y B-acciones* como antes, otras *R-acciones* que se centran más en el reconocimiento de perpendicularidad [382, 385 y 390] y ortogonalidad [395]. De nuevo producen una *definición visual*, aunque de otro objeto matemático: circuncentro.

[377] [al escuchar otras definiciones] Es el punto centro que toca los tres ¿? de un triángulo
[378] Yo la puse
[379] Del círculo
[380]pues es el centro del triángulo [alumno muestra frustración] Chihuahua nos fuimos por la pinta
[382] Tiene un ángulo de 90^0 [asienten y complementan] Perpendiculares
[385] ¡Ya ves tenía perpendiculares! [asienten y risas]
[388] En el círculo o en el triángulo
[389] Porque estamos hablando de ¿? [otro alumno completa] Las mediatrices de cada uno
[391] Entre ellas ¡Ay son..! [otro alumno puntualiza] ¡Ah te dije!
[394] Claro que no
[395] Es que son ortogonales entre ellas también

Siguiendo con la interacción en el equipo **D**, al igual que en **A** las *R-acciones* se refieren a la discusión sobre medianas [160, 162], mediatrices [161, 166], alturas [160, 168], punto de intersección [168], baricentro [163]. También hay *B-acciones* para definir mediana [165 y 166] y ensayan una definición incompleta de altura [171-173]. A diferencia del equipo **A** en este no se piensa en bisectrices y se descartan las medianas con las *B-acciones* [162-163], [165-166]. Sin embargo mantienen los conceptos de mediatriz y altura que tienen en común la propiedad de perpendicularidad con respecto a un lado del triángulo. En su definición final (*C-acción*) hablan de intersección de alturas, pero partiendo de una noción incompleta de altura [168-173]. También vemos que no se refieren a la altura como un segmento a diferencia de mediatriz que se define como recta. Estos alumnos se encuentran en nivel II de comprensión.

[159] Es la intersección con
[160] Las medianas ¿no? o las alturas
[161] ¡Espérate! () entre las mediatrices
[162] Medianas
[163] No entre las medianas es el baricentro [otro alumno muestra desconcierto] ¡Ay!, ¿entonces?
[165] Cuál es la recta que corre del vértice al punto medio del segmento opuesto
[166] La mediatriz [corrigen] No, la mediana
[168] Punto de intersección entre las alturas
[169] Completa más
[170] En un triángulo
[171] No, hay que poner lo que son las alturas
[172] Era, una línea perpendicular al lado
[173] Sí, las alturas son las líneas perpendiculares a los lados

Para la definición de ortocentro los alumnos mostraron confusión entre los conceptos de mediatrices, medianas, bisectrices y alturas y en consecuencia con su punto de intersección. Esto se aprecia claramente tanto en el concentrado de respuestas, como en la discusión al seno de los equipos **A** y **D** y en la socialización.

Tabla 24. Respuestas para la definicón de *Ortocentro de un triángulo*
A es el punto centro de un círculo que toca los tres vértices de un triángulo B es el punto de intersección de las 3 mediatrices. *Definiciones equivocadas*
D es la intersección entre las alturas de un triángulo y las alturas son las líneas perpendiculares de los lados H es el punto donde se cruzan las rectas ortogonales a cada uno de los lados del triángulo *Definiciones ambiguas*
E F G I La intersección entre las alturas de un triángulo C punto donde se intersectan las tres alturas del triángulo. *Definiciones económicas correctas*

Las respuestas las hemos agrupado en tres. En el primer grupo tenemos las definiciones producidas en los equipos **A** y **B** como *definiciones equivocadas* dado que corresponden a un objeto matemático distinto: el circuncentro. En el segundo a **D** y **H** que no consideran el punto por el cual pasan las rectas ortogonales o perpendiculares por lo que se tendrían una infinidad de "alturas" para cada lado de distinta medida. Como es posible más de una interpretación fueron consideradas *ambiguas*. Finalmente, en el tercer grupo, se presentan **E**, **F**, **G**, **I** y **C** que definen de manera *económica correcta* ortocentro, sin que ello sea garantía de que comprendan y utilicen apropiadamente el concepto y más aún las alturas de un triángulo.

Durante la socialización un estudiante propone la definición correcta de ortocentro [223] en forma de *R-acción* y el profesor pregunta acerca de la definición de altura que aunque es un concepto muy básico los alumnos tienen problemas para definirla e identificarla de manera adecuada. Esto ha sido investigado en diferentes estudios analizando estudiantes de diversos niveles educativos, encontrando que para la identificación correcta de la altura influye la posición del triángulo (e.g. les cuesta concebirla como segmento fuera del triángulo). Además, tienen problemas para definir la altura con respecto a una determinada base y para identificar más de una altura. A pesar de estos antecedentes el profesor no se entretuvo en dar más explicaciones o en explorar las ideas de los alumnos y en [238] establece él sólo la definición de ortocentro. Finalmente se consigue una *producción económica correcta* que no garantiza que se tenga un manejo adecuado del concepto de altura de un triángulo.

[223] Alumnos: Es un punto donde se intersectan las alturas del triángulo.
[224] Profesor: ¿cómo definimos la altura de un triángulo?
[225] As: Es la línea perpendicular, es la recta perpendicular [otro alumno muestra desacuerdo].
[227] As: Es lo que forma un ángulo de 90^0 con ¿?
[228] As: //No esa es una mediana [otro alumno muestra desacuerdo con que sea mediana].
[230] As: Es la línea perpendicular de uno de los lados pero no siempre va a dar depende del triángulo.
[231] P: Dónde pones la perpendicular. [Dibuja].
[232] As: Donde le dé un ángulo de 90^0.
[233] P: Aquí [dibuja y los alumnos le dicen que no].
[235]P: Aquí tengo un ángulo de 90○. Aquí [Dibuja].
[236] As: (Risas) Sí, segmento.
[237] As: Es lo mismo.
[238] P: a)Ella dice recta y él segmento. En realidad se refieren a la misma posición, pero las alturas son segmentos perpendiculares desde un vértice del triángulo al lado opuesto. Las alturas se definen precisamente como segmentos de recta. […] hay rectas y segmentos importantes en un triángulo: mediana, mediatriz, bisectriz (divide al ángulo en dos iguales) y altura. En el caso de la altura lo vemos como segmento de recta [Dibuja mediana, mediatriz, bisectriz y altura]. A veces estas rectas y segmentos coinciden en alguna clase especial de triángulos. b)En el caso de las alturas el punto donde se cortan se llama ortocentro, "orto" viene de ortogonal, cuando los ángulos son de 90^0.

Finalmente a manera de resumen de las definiciones geométricas tenemos la tabla 25.

Tabla 25. Análisis de producciones de las definiciones geométricas en los equipos

		Tipos de definiciones producidas				
		Ambiguas	Incoherentes	Equivocadas	Parciales	Correctas (Económicas-No E)
Concepto	Triángulo isósceles			11.1%	55.5% (descartan equilátero)	33.3% (E)
	Cuadrilátero	33.3%	11.1%		11.1% (paralelogramos)	44.4%(NE)
	Círculo				88.8%	11.1% (E)
	Semejanza	55.5%	22.2%			22.2% (NE)

	Ortocentro	22.2%		22.2%		55.5% (E)

Concepto	*Interacción en equipo (Evidencia: transcripción y análisis de diálogo)*	*Comparación casual o intencional de respuestas con otros equipos. (Evidencia: diálogo y producción escrita)*	*Socialización en gran grupo*
Triángulo isósceles	Equipos **A** y **B**/ Definición visual (Nivel I de Van Hiele)	Definición no económica (Nivel II de Van Hiele)	Definición económica correcta (Nivel III Van Hiele)
Cuadrilátero		Definición visual agregando propiedad (Nivel I)	
Círculo			
Semejanza			Definición visual Nivel I (ambigua)
Ortocentro	Equipo **A y D**/definición visual		Definición económica correcta (Nivel III)

4.3.1.3 Análisis de la parte II: Construcción de números felices y primos felices

La dinámica de “definir” ciertos conceptos y objetos llevada a cabo hasta el momento, cambia de sentido en esta segunda parte ya que ahora se les pide a los alumnos que dada la definición de número feliz proporcionen ejemplos. Esta tarea fue muy estimulante y mantuvo interesados a los estudiantes. Al ser de naturaleza abierta resultó significativa para ellos y los sitúo en una actividad de exploración no condicionada a conocimientos previos.

En la primera parte de la tarea, a partir de la definición de número feliz *(un número [entero] es feliz cuando la suma reiterada de los cuadrados de sus dígitos acaba siendo 1),* los alumnos debían proporcionar ejemplos de números felices justificándolos.
Al igual que en los episodios anteriores, presentamos las interacciones en pequeños grupos (equipo **B** y **A**), un análisis de los registros escritos y finalmente la socialización con toda la clase.

En el equipo **B** seguimos la interacción para el análisis, a partir de *R-acciones* anidadas para reconocer los elementos de la definición y extraer su significado se produce una *B-acción* encontrando algunos ejemplos de números felices que envuelve. De la primera *B-acción* se obtiene el número 1 como ejemplo de número feliz, aunque en la producción escrita no lo registran, tal vez por considerarlo trivial [144].
Las siguientes *B-acciones* que se producen durante la interacción [146, 148, 153 y 154] traducen el problema de búsqueda de números felices a encontrar solución a la ecuación $a^2+b^2+c^2=1$ averiguando que la solución trivial es 1 para alguna literal y 0 para las demás. Con esto, se da una *C-acción*, que no registran en su producción escrita, en la cual generan una clase de ejemplos (o un *espacio de ejemplos* para Watson & Mason (2005, p. 51)) {1,10,100,1000,…} de números felices.
Entre los inconvenientes de adoptar una traducción algebraica del problema hay que darse cuenta que para que sea coherente con el problema original se requieren soluciones enteras (no encontramos *R-acciones* que den cuenta de esto) y además que el proceso involucra una “suma reiterada” del cuadrado de los dígitos, un proceso iterado. Lo primero no resulta evidente para todos y así se puede observar en [150], donde se señala que una solución sería que $a^2=b^2=1/2$. También creemos que la aseveración de [149], que parece fuera de todo contexto, dado que hablan de números fraccionarios, está relacionada con que se olvidan del problema original y se enfocan en buscar soluciones a la ecuación.

Cuando concluyen este camino con el espacio de ejemplos {1, 10, 100, 1000,…} se centran en *B-acciones* para buscar que $a^2 + b^2=10$, aunque no lo hacen explícito, y encuentran (*C-acción*) la combinación 1 y 9 como única opción, derivada de los dígitos del número 13, de 23, etc [159].
Curiosamente esto lo encuentran a partir del número 23. Pero lo comentado en el párrafo anterior lo deducimos del diálogo y del registro escrito que contiene los números 13, 19 y 23.

[143] Un número es feliz cuando la suma reiterada de los cuadrado de sus dígitos //O sea sí, *cuando la suma acaba siendo uno*
[144] Los dígitos de 1 es 1 al cuadrado es 1
[145] Sí, por ejemplo, $a^2 + b^2$ es *1*
[148] *a* más *b, c* todos al cuadrado [escribe]
[149] Le tienes que poner como dieciséis veces un cuarto [no tenemos evidencia escrita] (Risas)
[150] Me queda un medio ¿no? [asienten y corrigen] Es *i* griega, no cero
[153] Entonces podría ser 1 más tantos ceros [escriben el 10, 100]
[154] Y se pone el número feliz por ejemplo, 1 al cuadrado, 1 es número feliz porque 1 al cuadrado es 1
[156] Qué otro número, () Perdón este número no es feliz [descartan un número que no cumple]
[158] 2 por 2 es 4 y así hasta que te dé 1 [trabajan con 23]. Pero hay fáciles y aparte a ver cual otro, ¡ay, ya no encuentro otro!
[159] Son al cuadrado 1+9 igual a 10, su último debe ser 1+9 [13 de 4+9, cuadrados de dígitos de 23]
[160] ¿Quieres seguir poniendo más números primos felices? = [pone ejemplos de primos felices]

En cuanto al equipo **A** se percibe una *R-acción* [170] que muestra que aprovechan que si un número es feliz el número que resulta de cambiar de posición sus dígitos también lo es. Sin embargo, en la aportación [171] esto les parece inadecuado (*R-acción*), por ser un ejemplo cómodo o bien por no estar convencidos que la propiedad funcione. Sin embargo lo vuelven a utilizar en varias partes de este diálogo (e.g.190-192) al igual que otros equipos. En [172] se da una *R-acción* reconociendo la dificultad que envuelve la búsqueda de primos, más que de números felices. Este es un problema milenario en el cual muchos matemáticos trabajan hoy en día.

[161] Sería este que es primo [eligen el 13] que son todos los primos son todos los números
[165] Y que su suma ( ) y que la suma de los cuadrados de sus dígitos … ((Pva))
[166] Ejemplos de números primos felices ( )
[170] Esto es igual a 1, estoy buscando uno, ¡31!
[171] Eso es trampa porque es al revés [de 13]
[172]Mira, al último aquí lo difícil es que sea primo

Intentan una *B-acción* usando el razonamiento al contrario, buscan números con los que se obtenga una suma que dé 10. El razonamiento es: si me da la suma 10 –como es el caso de 4+6- entonces ya tendría la suma final de dígitos 1, pero eso implica que la raíz de 4 y de 6 sean exactas para encontrar los dígitos del número inicial. Luego como 13 deriva en 1+9 (suma 10) buscan combinaciones relacionadas con el 13. Esto lo observamos también en el equipo **B** (más adelante en el cuadro de registros escritos).
Es decir, como se dieron cuenta que 10 es feliz y que 13 es feliz (la suma de cuadrados de sus dígitos es 10) buscan números cuadrados perfectos que sumen 10 o 13, como 9 y 4, o 1 y 9, y esto deriva en una *C-acción* en la que encuentran los números 32, 23 y 13, 31.

[186] Puedo formar con 4 y 6.
[187] No puedo formarlo porque la raíz de 4 es 2, pero no da la de 6. ¿Busco otro número más grande?
[188] No importa.
[189] ¡Ah ya sé! da nueve y cuatro.
[190] Sería este [el 23 que es número primo feliz].
[191] Ya sé con el 9 y el 4 Son 13.
[192] Ajá también 32 [otro estudiante duda] ¿32?
[194] Es igual.
[195] ¡Ay ya ves! Ándale ya ponle 32 (Risas) [Regresan a donde les piden ejemplos de números felices].

Se muestra a continuación una *R-acción* al reconocer que $\{11, 111, 1111, 11111, \ldots\}$ es un espacio de no ejemplos, pero no mencionan que por ejemplo el número con diez 1's sí sería número feliz.
En [208] notan (*R-acción*) que cuando un número es feliz también los números intermedios que se obtienen en el proceso de iteración hasta lograr que la suma sea 1 son felices. Además, en las intervenciones [212] y [213] se activa (*R-acción*) otra vez la propiedad de los números felices que se obtienen al cambiar de posición sus dígitos y así en una *C-acción* forman espacios de ejemplos que "llevan el 19" o 91, $\{19, 91, 82, 68, 133, 139, \ldots\}$ pero sólo se concentran en los que sean primos y descartan de manera ímplicita 82 y 68 y de manera explícita [216] el 133 por ser divisible entre 19 y entre 7.
De hecho es posible que un estudiante se diera cuenta que 133 era múltiplo de 19 desde antes y confundiera el sentido de «el 133 también lleva 19» [208], lo ligara con lo anteriormente discutido en el grupo sobre buscar combinaciones del número 13 [191] y eso explique la deducción confusa que hace en [209] «entonces cualquier múltiplo [confundiendo con suma o que aparezca en los dígitos] de 13 que sea múltiplo de un número primo [133=19*7]».

[197] 1111, 111, …
[198] // No, no es.
[199] El 133.
[200] ¿Lo vas a buscar con todos los números primos? ¬
[201] Sería 9 y 9 serían 18 y 1, a ver pruébale con el 19. [ignora la pregunta anterior y sigue intentando].
[202] 81 y 1 son 82. A ver serían 64 más 4, 68. Se está haciendo más chiquito.
[203] 6 por 6, 36 más 64 serían 100 [Risas].
[204] ¿Cuál era? (Risas). [responden] El 133.
[206] No, el 19 [otro estudiante duda] ¿19?
[208] Sí, porque el 133 también lleva el 19.
[209] Entonces cualquier múltiplo de 13 que sea múltiplo de un número primo.
[210] No sé, podría ser.
[211] El 139. Uno al cuadrado más 9 más el cuadrado de 9 es uno, es igual a 91 [Risas].
[213] No, pero acuérdate que el 19 también es primo feliz y ya está [Risas].
[215] Y luego 131 o qué dijiste 133.
[216] 133 divídelo entre 3, entre 2, no; entre 3, no; entre 4, no; entre 5, no; 6, 6 hay algo entre 6; a ver. entre 7, si, es de 7. [Están averiguando si es primo y lo descartan porque es divisible entre 7] //.
[217] ¿Hay algún número? //
[218] Sí, a lo mejor puede ser 7 //.
[219] Porque 63 por 7.
[220] Sí, este es de 7 [muestran desacuerdo con el número].
[222] De hecho es ilógico que si multiplico 19 por algo me dé un número primo [muestran acuerdo].

En este diálogo no está claro para un estudiante que cuando la suma resulte un solo dígito distinto de 0 entonces el número ya no es feliz. Los argumentos de los compañeros para persuadirle [228, 230 y 235] no resultan convincentes, como se aprecia en [236] donde pide una explicación, pero finalmente se convence al mencionar que «porque [al tener un solo dígito] ya no se suma éste con otro dígito [237]». Sin embargo únicamente están pensando en los dígitos 1, 2 y 3 para los que el cuadrado de sus dígitos es de una cifra y ya no se tiene otro dígito para sumar. De ahí infieren que el único número de un solo dígito que es feliz, es el 1 y no exploran en los casos del 4 al 9, en los cuales se puede seguir iterando la suma de los cuadrados de sus dígitos. Esta inferencia temprana [*R-acción*] los lleva a descartar el 7 que sí es un número feliz.

[224] ¿Qué otra cosa?
[225] El once pero me va a dar dos [un estudiante se muestra dudoso] ¿Dos?
[228] No, pero cuando te dé un número, pues ya al cuadrado ya es responsable ya.
[229] ¿Cómo?
[230] No, pero cuando tengas otro número te va a dar 2 y ya.
[233] Es que este tiene dos dos y al …
[234] Bueno ¿cuándo?
[235] Cuando tengas 2 dígitos y ya que te sale uno, el que sea, entonces ya no puedes seguir operando.
[236] ¿Por qué?
[237] Porque ya no se suma éste con otro dígito.

[231] Así [no se muestran convencidos y demandan mayor explicación].

[238-239] ¡Ah ya! Pero va a seguir siendo éste y no va a ser feliz nunca

Como 31, 19 y 23 son números primos felices, buscan alguna similitud (*B-acción*) para obtener otros números. Encuentran que en ellos aparece el 3 y buscan números similares para comprobarlo (33, «números que le lleguen al 3»). Aquí vemos que la imprecisión en el lenguaje, genera confusión y mientras algunos buscan «múltiplos de 3» y usan ejemplos con este criterio, otros buscan que aparezca el 3 en los dígitos y otro influido por que parten del 31, 19 y 23 trabaja con el 9. Además centrarse en las similitudes de resultados más que en los procesos genera confusión y utilizan ejemplos de números felices [256] y primos [250, 258,264] que no lo son.

[242] 31, 19, 23.
[243] Uffffff 19 sí.
[244] 33, 3, … [opera] no,
[245] El 9.
[247] Busca todos los números quele llegan a 3; al 19 no sé.
[248] Múltiplo de 3.
[249] No, no debe tener múltiplos porque si no…
[250] ¡32!
[251] El 32 no. El 32 no se puede.
[252] Porque no es primo, pero sí es feliz.
[253] ¡Así está! al revés mira [le muestra el 23].
[254] Porque no crees que sea cierto [le demandan evidencia: A ver cómo, ¿cómo?].
[256] Que los números felices, éste, por ejemplo el 12, al revés 21. Te dé el 21.
[257] No, ¿21 es un número feliz?
[258] Sí, pero aquí no te está pidiendo que sea primo. ¿Verdad? [asienten].
[264] Otro primo. El 27.
[265] ¡Ah! A ver 4, 49, es 53.
[264] El 31 el 23 son primos y sí. 25 no.
[267] A ver vamos con el 34, también da 25.

De la discusión presentada antes en el equipo **A**, antes presentada se ha omitido un fragmento que se analiza a continuación.
Podemos apreciar en esta parte de la discusión que involucra la tarea de encontrar números primos felices, los alumnos conjeturan (*B-acción*) que una vez que encuentran un 5 entre los dígitos [271] se produce un ciclo [273] que permite descartar la posibilidad de que sea número feliz. Esta última conjetura la aplican para verificar que los números 17, 25, 35, 45, 55, 65 no son números felices. El número del que surge la conjetura es curiosamente el 17, como se puede observar las siguientes líneas.

[173] A ver ponle 17.
[174] 7 por 7, 49 y 1, 50, 5 por 5, 25 …
[175] Es que se va así.
[176] Sí [asienten y lo convencen de desistir].
[177] Es igual a 5 al cuadrado 25 y 4, 29 o qué.
[178] No va a ser 25. No.
[179-180] 5 al cuadrado 25. Así se va a ir.
[181] 29, 2 por 2, 4+81, 85 mira se va repitiendo; 8 por 8, 64+25, 89; 64+81, 145; [da 4 y ya no es feliz].
[182] ¡Otra vez salió 81!
[184] Ah es 14 ponle 14 y luego 17 ya regresa [De 145, 1^2+4^2 es igual a 17].
[269] El 35 ya dijimos que no.
[271] ¡Ah! entonces los que tengan un 5 no cuentan. 45, 55, 65.
[273] Bueno. ¡Hasta ahorita! Todos los que tengan 5 son cíclicos.
[274] No es que no precisamente se debe al hecho que tenían 5 [como 17 en la primera suma da 50].
[278] 49 más uno 50 ¡Ay no! ¡ya valió!, tiene 5.

Tratemos de analizar cómo emerge la conjetura (*B-acción*) en el equipo **A** a través de la verificación de la suma reiterada del cuadrado de los dígitos.

Número	17	50	25	29	85	89	145	42	20
Suma Cuadrado de dígitos	50	25	29	85	89	145	42	20	4

Número	35	34	25	29	85	89	145	42	20
Suma Cuadrado de dígitos	34	25	29	85	89	145	42	20	4

Número	45	41	17	50	25	29	85	89	145	42	20
Suma Cuadrado de dígitos	41	17	50	25	29	85	89	145	42	20	4

A partir del patrón que se repite, han generado ya un espacio de ejemplos (*C-acción*) para su conjetura aunque no lo hacen explícito. En principio han podido verificar su conjetura con números menores de 100 que contuvieran un 5 a partir de los números que mencionan y combinándolos con los hallazgos antes mencionados. Pero además incorporan todos aquellos números que aparecen de manera intermedia en esa verificación, por ejemplo: 16, 17, 29, 37, 61, 34, 89, entre otros. Esto sirve como estrategia (*B-acción*) para que los alumnos descarten un buen espacio de ejemplos con los que verificar que si son o no números felices.

Finalmente se presenta las respuestas transcritas de manera fiel dadas por los equipos.

Respuestas a la tarea de encontrar números felices	
$\boxed{A}$ $1^2=1$ $10=1^2+0^2$ $13=1^2+3^2=1+9=10=1^2+0^2=1$ $32=3^2+4^2=9+4=13=1^2+3^2=10=1^2+0^2=1$ $\boxed{C}$ $10=1^20^2=1+0=1$ $13=1^23^2=1+9=10=1^20^2=1+0=1$ $\boxed{D}$ $10=1^2+0^2=1$ $23=2^2+3^2=4+9=13$ $\Rightarrow 1^2+3^2=1+9=10=1^2+0^2=1$ $\boxed{B}$ 1 con todos los ceros que tenga 1^2+0^2 $13=1^2+3^2=10\Rightarrow 1^2+0^2=1$ $19=1^2+9^2=82\Rightarrow 8^2+2^2=68=6^2+8^2=100$ $=1^2+0^2+0^2=1$ $23=2^2+3^2=13\Rightarrow 1^2+3^2=10=1^2+0^2=1$	$\boxed{F}$ 1 pues $1^2=1$ 10 pues $1^2+0=1$ 13 pues $1^2+3^2=1+9=10\Rightarrow 1^2+0^2=1$ 31 pues $3^2+1^2=9+1=10\Rightarrow 1^2+0^2=1$ $\boxed{H}$ 10 porque $1^2+0^2=1$ 01 porque $0^2+1^2=1$ 13 porque $1^2+3^2=10$ y antes ya se hizo para 10 31 porque $3^2+1^2=10$ y ya vimos que es 1 $\boxed{E}$ $10\Rightarrow 1+0$;$100\Rightarrow 1+0+0=1$; $13\Rightarrow 1+9=10\Rightarrow 1+0=1$ $31\Rightarrow 9+1=10\Rightarrow 1+0=1$ $\boxed{I}$ $31\Rightarrow 3^2+1^2=9+1=10\Rightarrow 1^2+0^2=1$ $100\Rightarrow 1^2+0^2+0^2=1$ $\boxed{G}$ $23\Rightarrow (2)^2+(3)^2=13\Rightarrow (1)^2+(3)^2=13\Rightarrow (1)^2+(3)^2=10\Rightarrow (1)^2+(0)^2=1$ $32\Rightarrow (3)^2+(2)^2=13\Rightarrow (1)^2+(3)^2=10\Rightarrow (1)^2+(0)^2=1$ $44\Rightarrow (4)^2+(4)^2=32\Rightarrow 1$

Las respuestas de los equipos se han organizado en dos columnas de acuerdo con el uso adecuado o no del signo "=". En ellas además, podemos encontrar patrones, hallazgos y conjeturas (no siempre válidas). Por ejemplo, en **A**, **B**, **F** y **H** inician su búsqueda con números de un dígito y reconocen únicamente al 1, probablemente porque el 2 y el 3 al elevarlos al cuadrado les da un número de un sólo dígito y al no tener otro sumando infieren de manera temprana que el único número feliz de una sóla cifra es el 1 abandonando la búsqueda. Esto lo constata el hecho de que ningún equipo muestra el 7 como número feliz [ver fragmento 225-239, equipo **A**]. Al explorar los números de dos cifras encuentran que el primero es 10 y se dan cuenta que pueden agregar ceros y mantienen la característica de ser números felices (01, 10, 100,1000,…). Este hecho también se evidencia en los equipos **E**, **I**, **C** y **D**.

Otro hallazgo de los equipos **F**, **H**, **E** y **G** es que si un número es feliz el número que resulta de conmutar sus dígitos también lo es (13,31,23,32).

Una debilidad observada en las respuestas de los equipos **A**, **C**, **D** y **B** es la relacionada con el uso del símbolo "=". Es notable la ampliación del significado del signo de igualdad con el sentido de “hacer algo”. Este fenómeno se discute ampliamente en otros trabajos (e.g., Behr, Erlwanger, & Nichols, 1976; Kieran, 1981 y Vergnaud, 1984).

En cuanto a la siguiente tarea, que consiste en dar ejemplos de números primos felices, nos encontramos con las siguientes respuestas, como antes, transcritas de manera exacta.

Proporcionen al menos dos ejemplos de números primos felices	
$\boxed{A}$ $13=1^2+3^2=10=1$ $31=3^2+1^2=10=1$ $19=1^2+9^2=1+81=82=64+4=68=36+64=100=1$ $23=2^2+3^2=4+9=13=1^2+3^2=1+9=10=1$ $\boxed{C}$ $13=1^2 3^2=1+9=10=1^2 0^2=1+0=1$; el 103	$\boxed{I}$ $13\Rightarrow 1^2+3^2=1+9=10\Rightarrow 1^2+0^2=1$ $103\Rightarrow 1^2+0^2+3^2=1+0+9=10\Rightarrow 1^2+0^2+1=1$ $23\Rightarrow 2^2+3^2=4+9=13\Rightarrow 1^2+3^2=1+9=10\Rightarrow 1^2+0=1$ $\boxed{G}$ $13\Rightarrow(1)^2+(3)^2=10\Rightarrow(1)^2+(0)^2=1$, el 31 $103\Rightarrow(1)^2+(0)^2+(3)^2=10\Rightarrow 1^2+0^2=1$ $\boxed{F}$ 13 pues $1^2+3^2=1+9=10\Rightarrow 1^2+0^2=1$
$\boxed{B}$ $\cancel{1,}$13,19,23 $\boxed{H}$ 13, 31 $\boxed{E}$ 103, 3001	31 pues $1^2+3^2=1+9=10\Rightarrow 1^2+0^2=1$ $\boxed{D}$ 13; 1^2+3^2; $1+9=10$; $1^2+0^2=1$

Las respuestas se agruparon de acuerdo a la forma en que presentaron las respuestas. En **A** y **C** se observa un uso inadecuado del signo “=”. Los equipos **B**, **H** y **E** únicamente escriben los números sin esbozar un procedimiento que justifique su respuesta, mientras que **I**, **G**, **F** y **D** escriben de manera adecuada el procedimiento que justifica su respuesta.

Una observación en relación a los equipos **E, G** e **I** es que combinan el hallazgo “si un número es feliz el número que resulta de conmutar sus dígitos también lo es”, mencionado en el anterior concentrado (de números felices), con el hecho de intercalar ceros para formar un espacio de ejemplos de números felices $\{13, 31, 103, 3001,..\}$ Aunque en esta parte sólo escriben algunos de los números, estos los vinculan con los ejemplos encontrados en la tarea anterior. La conmutatividad de los dígitos la encontramos en los grupos **A**, **F** y **H**; y la inserción de ceros sólo la descubre el equipo **C**.

En el equipo **B** consideran inicialmente el 1 como primo feliz y posteriormente lo tachan por acordar que no es número primo. Sin embargo, no sabemos si los argumentos para no considerarlo primo son los adecuados ya que si se tiene en cuenta la definición que ellos mismos dieron de número primo, «el número entero que únicamente es divisible por el mismo y por la unidad» vemos que no se excluye al 1 además de presentar una definición parcial restringida al dominio de los números naturales (ver p. 146 y tabla 21, p. 147). Además de los números felices iniciales (1,13,19 y 23) al imponer ahora la condición de que sean primos consideran esos mismos números luego tachan el 1.

Al igual que en la tarea anterior hay un uso inadecuado del signo igual en los equipos **A** y **C** y, aunque los equipos **B**, **H** y **E** no nos dejan ver su procedimiento, es posible que también lo manejen de forma incorrecta en otras tareas ya que en la anterior presentaron esta debilidad.

Durante la socialización en gran grupo no se ha podido establecer la riqueza de la tarea ni la manera en que se generaron los ejemplos puesto que el maestro sólo les pide los ejemplos que encontraron y esto limita la discusión. No se discutió acerca de los patrones que encontraron sobre los números felices (*B-acciones*) ni se exploraron sus conjeturas (*B-acciones*). De las grabaciones en el seno de los equipos y de sus escritos, se puede extraer que la riqueza de la tarea está en el rango de sus respuestas y la forma natural de construir (*C-acciones*) sus espacios de ejemplos. Lo relevante de esta tarea no fue encontrar algunos números felices sino más bien la manera de hacer matemáticas en grupo, descubrir propiedades, construir espacios de ejemplos y no ejemplos, las formas de argumentar, construir conjeturas y encontrar contraejemplos para refutarlas o encontrar más ejemplos para fortalecerlas, así como explorar regularidades en los procesos de construcción que los llevaran a probarlas.

[239] Profesor: Vamos con número feliz, que es cuando la suma reiterada del cuadrado de sus dígitos acaba siendo uno. Ejemplos ¬
[240] Alumnos: 13, 23 // [otro alumno] 10
[242] As: 100,1000, () [otros alumnos] 1,000,000 (Risas)
[246] P: Ejemplos de números primos felices ¬
[247] As: 23,13 //[otros alumnos] 33
[249] P: ¿Es primo?
[250] As: No, es divisible entre 3 es a 11
[251] As: 43
[252] P: A ver 16+9=25; 4+25=29; 4+81=85 …
[253] As: No, ya salió más grande
[254] P: No sé si sea. A ustedes les salió [contestan que no]
[256] As: 101
[257] P: Es primo, pero la suma [reiterada del cuadrado de sus dígitos] no es 1
[258] As: Nos da dos
[259] As:103
[260] P: Es primo también y sí, la suma [reiterada del cuadrado de sus dígitos]es 1. […]les recomiendo que cuando vean una definición deben seguirla como si fuera un artículo de la constitución y ustedes fueran abogados. Como los contratos atender también "las letras chiquitas"
[261] As: Que es donde nos quieren hacer trampa
[262] P: Sí, hay que seguir entonces tal cual las definiciones, deben ser cuidadosos. Matemáticas es como un juego y las reglas son las definiciones y los axiomas o postulados que tengamos. Eso es lo que se da por hecho y lo demás es juego de estrategia.

También se les pidió definir número primo feliz pero dado que la estrategia de los alumnos fue fusionar las definiciones previas de número primo y número feliz, con los primos dentro de los números naturales se decidió no incluir las respuestas ni la discusión.

4.3.2 Hoja de trabajo #2: Definiciones geométricas de las cónicas

Esta hoja de trabajo fue resuelta por 12 alumnos distribuidos en 4 equipos. El tiempo para realizarla fue de 60 minutos, de los cuales 20 fueron para la socialización en grupo.
Esta hoja de trabajo consta de cuatro partes. Se inicia con una exploración (parte 0) de la construcción de dos representaciones de la mediatriz y el establecimiento de situaciones en las que recordaran haber utilizado el objeto. La parte I está destinada a realizar una construcción geométrica (la parábola) con el software *Cabri Géomètre*. En la parte II se manipula la construcción, identificando los elementos y la trayectoria descrita a partir del movimiento de los elementos libres y de sus propiedades. La parte final plantea, como desafío, realizar las construcciones de elipse e hipérbola a partir de su definición.
En el análisis primero aparecerán las interacciones en pequeños grupos, seguidas de las respuestas derivadas del trabajo en equipo y finalmente la interacción en gran grupo.

4.3.2.1 Exploración

La tarea se realiza mediante una discusión en cada equipo para que, una vez de acuerdo, ofrezcan una definición de mediatriz junto con una enumeración de situaciones en las que han utilizado este concepto. Se incluye a continuación la interacción en los equipos **A** y **C**.

Para el caso del equipo **A** la negociación para llegar a la definición se da al principio pensando en la definición de bisectriz, en lugar de la mediatriz, activando *R-acciones* [2-6] en donde la reconocen como eje de simetría de un ángulo y como recta que lo divide en dos partes iguales. Este acuerdo se rompe con una nueva aportación que, cuando se activa, parece el caso particular de una recta,

es decir, cuando el ángulo que hay que dividir en dos partes iguales mide 180○ [11]. Sin embargo la *R-acción* en [9] se aproxima más a la definición de mediatriz al considerarla una recta que divide otra en dos partes iguales pasando por el punto medio. Dudan acerca del término más adecuado: línea, recta o segmento. La confusión sobre estos términos es común y la hemos encontrado en el análisis de la reconstrucción de otras definiciones y lo encontraremos también en la interacción del equipo **C**. Este hecho lo atribuimos a que éstos son elementos primitivos, que usualmente no se definen en los primeros años escolares y que su uso se va asociando con su representación gráfica y con las situaciones en las que son utilizados que, además, suelen ser muy similares.
La *R-acción* mostrada en [9] les aproxima a la definición de mediatriz al reconocer que deben utilizar el punto medio, sin embargo la confusión entre la palabra "segmento" y la palabra "recta" les lleva a una *B-acción* errónea y sin sentido al enunciarla como: «Sería una recta que pasa por otra y la divide en dos rectas iguales y pasa por el punto medio». Deberían haberse cuestionado: 1) ¿Es posible encontrar el punto medio de una "recta"? y 2) de ser posible lo anterior ¿cuántas rectas pasarían por ese punto?
En la producción escrita, como se verá en el concentrado, el equipo se dio cuenta del punto 2) y se agregó la propiedad de "perpendicularidad". Es posible que en [12] estén contrastando esta misma idea, o bien, que simplemente estén relacionando lo discutido con el concepto de "altura".

[2] Una línea que divide a un ángulo en dos ángulos iguales. Es como un eje de simetría en la parte media de un ángulo.
[3] ¿Estamos de acuerdo?, cómo le ponemos ¬
[5] Línea que divide un ángulo en dos ángulos iguales
[6] Sí. Así,.. recta que divide al ángulo en dos iguales,… [cuestionan] ¿Recta?
[9] Sí, porque no es segmento. Sería una recta que pasa por otra y la divide en dos rectas iguales y pasa por el punto medio.
[11] Bueno, pero ahí estás pensando en un ángulo de 180○
[12] No. Estoy pensando en que, en un triángulo ¡fíjate! estaría adentro o no del triángulo… depende.

La construcción en *Cabri* determina que se dejen a un lado la confusión con la "bisectriz". Se sigue hablando de recta de manera incoherente [16], aunque se percibe que un estudiante sí es consciente de la confusión lo que se exhibe en la *R-acción* [17] que le conduce a la *B-acción* [20] aportando una definición que tiene esto en cuenta y reconociendo que debe ser una recta perpendicular sin indicar claramente que lo sea al segmento. Sin embargo dicha definición no llega a ser compartida por sus compañeros.

[15] Bueno vamos con lo que sigue [construcción de Cabri]
[16] Sí, fíjate en la construcción, la mediatriz sí pasa por el punto medio, aquí divide a la recta.
[17] Entonces no es de un ángulo es para un segmento.
[18] Entonces en el triángulo pasa por cada punto medio de cada recta del triángulo
[19] y del cuadrado también
[20] Entonces es la recta perpendicular que pasa por el punto medio del segmento

La construcción realizada con el software juega un importante rol, pues a partir de ella modifican su definición y seleccionan los términos adecuados. Sin embargo, el uso indistinto de "segmento" y "recta" prevalece. Como mencionamos antes, aunque un alumno sí distingue la diferencia e insiste con diversas *R-acciones* durante toda la interacción [17, 20, 23, 29 y 33] incluso con una *B-acción* [27] no logra convencer al resto de los compañeros al no ofrecer argumentos de esa distinción por lo que no es considerada *C-acción*. Al final se quedan con una definición incoherente de mediatriz de una "recta" [32].

[22] Es una recta perpendicular que

[28] Bueno tenemos un segmento *a* y una recta *d*, la recta *d* es

pasa por el punto medio de otra recta.
[23] No, no de un segmento.
[24] Otra vez! entonces ¿cómo?
[25] Es un segmento perpendicular que pasa por… [complementan] Una línea
[27] No, es una recta perpendicular a un segmento y pasa por su punto medio

perpendicular al segmento *a* y pasa por su punto medio
[29] Y por lo tanto divide en dos partes iguales al segmento
[30] ¿Tenemos un segmento o una recta?
[32] Tenemos una recta *a* que es perpendicular a una recta *d* perpendiculares y la divide en dos iguales y pasa por el punto medio.
[33] La divide en dos segmentos iguales.

En resumen, en este grupo se presenta confusión entre bisectriz y mediatriz. La construcción en *Cabri* es determinante modificar su atención y pasar de considerar ángulos a considerar segmentos y así dejar a un lado el concepto de bisectriz. Pero cometen el error de no utilizar correctamente los términos segmento y recta, y en consecuencia proporcionan una definición incoherente de “mediatriz de una recta”.

En la interacción del grupo **C** la palabra “mediatriz” evoca de inmediato un reconocimiento (*R-acción*) de situaciones recientes relacionadas con la imagen del concepto [3]. En [3] hay una *R-acción* en la que se menciona el «punto medio de un segmento» para la definición de mediatriz.
También en este equipo los alumnos confunden cuándo se deben referir a un segmento y cuando a una recta. Pero, al contrario que en el equipo anterior, utilizan un diagrama [14] como recurso para activar una *B-acción* sobre la diferencia. No obstante [15] se concibe la mediatriz como un segmento y cuando menciona que es «perpendicular a ese lado» mediante una *R-acción* solo se reconoce en un contexto relativo a los triángulos. Tanto “mediatriz como segmento” y “segmento” reconocido “como lado” se corrige al final de la interacción cuando escriben que la mediatriz «es una recta que va del punto medio y es perpendicular al segmento» lo que constituye una *C-acción*.

[3] [Mediatriz] Era la que usamos en el triángulo y en el círculo, ¿no te acuerdas?
[5] Es la del punto medio de un segmento
[6] No, de un triángulo
[7] Es perpendicular y en el punto medio
[8] Es la línea perpendicular del segmento y del punto medio

[9] No, es un segmento que va del punto medio y es perpendicular a ese lado
[11] Es un segmento o una línea [contestan] Es segmento [otro aporta]Es lo mismo
[14] No, mira es diferente segmento que línea [dibuja]
[15] Es un segmento que va del punto medio y perpendicular a ese lado

A continuación se aprecian dos situaciones (*R-acciones*) donde han utilizado la mediatriz: una para encontrar la pendiente de una recta definida entre dos puntos [18 -20] y para encontrar el centro de una circunferencia a partir de una cuerda [21-24]. Además realizan un diagrama como recurso (*B-acción* [26]) para convencer a sus compañeros de su respuesta [27].

[18] [describen situaciones donde han utilizado mediatriz] En los triángulos para sacar las pendientes.
[19] Sacábamos la pendiente de los dos lados.
[20] Sí, para sacar la pendiente de éste sacaba la perpendicular.
[21] En los círculos también, en las cuerdas que la mediatriz siempre iba a pasar por el centro.
[22] Para encontrar sus centros [demandan explicación].

[24] No te acuerdas que encontrábamos la mediatriz y eso lo usamos para encontrar su centro [dibuja].
[25] Estaba el círculo y una cuerda y aquí la mediatriz y ya encontramos su centro.
[26] A ver, un círculo () un segmento [cuerda] aquí y luego saca su mediatriz [en Cabri].
[27] ¿Ves?, sí es un segmento y siempre pasa por el centro.

En las respuestas de los cuatro equipos que aparecen en la siguiente tabla no hay ninguna definición que mencione la propiedad que deben satisfacer todos los puntos que pertenecen a la

mediatriz de un segmento; que equidistan de sus extremos. Las definiciones son visuales y se centran en mencionar la perpendicularidad indicando que el punto medio del segmento pertenece a su vez a la mediatriz. Además en el equipo **A** que mostró confusión al utilizar los términos "segmento" y "recta" durante la interacción también se refleja en su escrito. Esta confusión también la encontramos en la interacción del grupo **C**, aunque no aparezca reflejado en su producción final y en la socialización en gran grupo.
Sólo los equipos **B** y **C** mencionan situaciones en las que recuerdan haber utilizado el concepto. El primero menciona situaciones ligadas a su uso para "encontrar propiedades en los triángulos", tal vez se refieren a que se usan para encontrar el circuncentro y en consecuencia la circunferencia circunscrita al triángulo. También mencionan que se utiliza en análisis numérico para encontrar raíces de ciertas ecuaciones. Se refieren al método de bisección basado en el teorema del valor medio, donde se calcula el punto medio de un intervalo repetidas veces para aproximar la raíz de una ecuación relacionándolo de manera errónea con la mediatriz de un segmento. El equipo **C**, por su parte, vincula el concepto con ejercicios sobre el cálculo de la pendiente de la recta que pasa por dos puntos. Al trazar en un triángulo rectángulo sus mediatrices en los catetos para identificar el punto de intersección de las mismas sobre la hipotenusa se pueden averiguar las coordenadas del punto y calcular dicha pendiente. También mencionan que se utiliza para encontrar el centro de una circunferencia determinado la mediatriz de alguna cuerda.

Definición de Mediatriz y situaciones donde se ha utilizado
A Tenemos una recta A que es ⊥ a una recta B donde A pasa por el punto medio de B y la divide en 2 segmentos iguales
B Es la línea perpendicular que divide a un segmento exactamente a la mitad. La hemos utilizado en triángulos para encontrar ciertas propiedades del mismo y en análisis numérico para encontrar raíces de ciertas ecuaciones.
C Es una recta que va del punto medio y es perpendicular al segmento. En el triángulo para sacar pendientes y en los círculos para encontrar su centro.
D Es la recta que divide a un segmento de recta por la mitad y es perpendicular a ella.

Durante la socialización en gran grupo, se produce un conflicto para decidir cuándo utilizar los conceptos: segmento, recta y línea. También hemos visto que esos términos se utilizan de manera equivocada, como, por ejemplo, en la *R-acción* [2]. Sin embargo, el profesor únicamente les corrige [3] sin ofrecer argumentos sobre la distinción. Más aún, utiliza la expresión "la perpendicular" para referirse a "la recta perpendicular" y, aunque se entiende de esa manera, sería conveniente no omitir la palabra "recta" dado el conflicto que enfrentan los alumnos. Se acuerda entre todos una *definición visual* en la *C-acción* [4] «recta perpendicular que pasa por la mitad de un segmento», que luego se transformará cuando se haga una construcción dinámica.

[2] Alumnos: [Mediatriz] Es una recta perpendicular que pasa por la mitad de una recta.
[3] Profesor: Un segmento de recta. A ver, mediatriz, que dijiste Raúl, la [recta] perpendicular, ¿qué?
[4] As: Que pasa por la mitad de un segmento.
[5] As: Divide al segmento en dos partes iguales.
[6] P: Estamos de acuerdo () ¿ustedes también? [asienten los alumnos].

4.3.2.2 Extraer significado de la definición de mediatriz

En este apartado los alumnos deben: 1) dibujar un segmento y etiquetar los extremos con A y B, y encontrar un punto C que se encuentre a la misma distancia tanto de A como de B; 2) encontrar más puntos con la condición indicada y describir el proceso para encontrarlos con la intención de que descubran que la mediatriz es la recta que cumple esa condición.

Para el análisis del trabajo en equipo presentamos la interacción del equipo **A** y del **C.**
Durante la negociación de la tarea, en el equipo **A**, de nuevo ([41] y [51]) confunden "recta" con "segmento" (*R-acciones*), hacen un uso inadecuado de los términos lo que frena la búsqueda de otros puntos que satisfagan la propiedad. Esto se pueden comprobar en las *B-acciones* [49-51], «dices dentro tenemos en el segmento [un punto que equidiste de los extremos]», «ahí y luego dentro de la recta [segmento] ya no», «claro cada recta [segmento] tiene una mediatriz » y por lo tanto sólo un punto medio.
La repetición de la lectura [47] centra al equipo en la tarea intentando entender si hay alguna pauta que les indique si deben buscar dentro o fuera del segmento. Con el software tratan de "verificar" (*B-acciones*) que sólo hay un punto para lo que siguen dos caminos. Con el primero [56] trazan un segmento y determinan su *punto medio* (herramienta de *CABRI*). Con el segundo [57-59] trazan la mediatriz del segmento y comprueban que efectivamente esa es la única solución y que el punto donde se intersectan segmento y mediatriz es el punto medio que divide al segmento en dos partes iguales.

[36] Bueno, ya hice el segmento en Cabri y les puse la etiqueta y ahora.
[38] Ahora dice que encuentre un punto *C* que esté a la misma distancia de *A* y de *B* [39] Sí, si será este.
[40] Sí, es el punto medio.
[41] Sobre la recta o un punto fuera.
[42] A ver, tienes que poner cómo lo encontraste.
[43] Este o fuera [piden tiempo de reflexión] ¡Ya!, no, espérame.
[46] Esta recta y este es el punto medio sobre el segmento ese es el único adentro y a ver otros.
[47] Encuentre un punto *C* a la misma distancia de *A* que de *B* [leen], puedes encontrar otros puntos que cumplan esta propiedad… [responde más de un alumno que no es posible].
[49] Dices dentro tenemos en el segmento.
[50] Ahí y luego dentro de la recta ya no.
[51] Claro cada recta tiene una mediatriz.
[52] Miren vamos a buscar otro.
[53] Ese no es // [otro alumno] Lo buscamos así normalmente o en Cabri.
[55-56] Bueno primero en Cabri Busca *punto medio* en el quinto ícono de la barra de herramientas.
[57] Ahora manual, pon un segmento de 4.
[58] Por lo tanto que [trabajan en Cabri].
[59] Ahora aplica la herramienta *mediatriz* [leen] ¡mira! [convencidos dicen] Sí, pasa por el punto medio.

Por su parte en el equipo **C** encuentran el punto medio como punto que cumple la condición (*B-acción* [32-34]) limitándose a encontrar un único punto que la cumple y que se encuentra en el segmento *AB.*

[29] Etiqueta los extremos [del segmento] con *A* y *B*, con mayúsculas. Encuentre un punto *C* que se encuentre a la misma distancia tanto de A como de B [leen].
[31] Entonces, un punto que equidiste.
[32] Punto medio ¿no? [otro alumno muestra desacuerdo].
[34] Sí, debe ser la misma distancia a los dos [complementan] Ah sí. () Y nombrar *C*

En [37] se observa una *R-acción* que activa una situación donde utilizan el concepto de mediatriz que apareció antes: «entre estos dos [extremos del segmento] sí, porque aquí [en cada extremo del segmento] se hacen dos rectas y luego aquí [en cada lado del triángulo formado] puedes encontrar los otros dos puntos medios [de cada lado del triángulo]», aquí establecen una conexión con los ejercicios en los que se trata de encontrar el circuncentro de un triángulo.
Sin estar aún convencidos de su idea vuelven a leer la instrucción [39] para clarificar la tarea y eso permite ver que uno de los alumnos ha restringido su razonamiento a que el punto equidistante esté sobre el segmento. En [40], mediante una *B-acción* se interpreta de manera correcta la tarea

tratando de decir lo mismo que se indica en la tarea pero de otra manera . Eso desencadena la *B-acción* que los lleva a encontrar otros puntos como vértices del triángulo equilátero siendo uno de sus lados el segmento *AB* [41]. Uno de los integrantes del grupo no está de acuerdo en buscar opciones fuera del segmento [44] y para convencerse lee nuevamente la tarea.

[36] Luego dice, c) puede encontrar otros puntos que cumplan con la propiedad…
[37] Entre estos dos sí, porque aquí se hacen dos rectas y luego aquí puedes encontrar los otros dos puntos medios ¿no? [otro alumno se muestra dudoso] Pero será…
[39] Se pueden encontrar otros … [leen]
[40] Pero tienen que estar sobre esas rectas, yo me imaginaba otra cosa, yo por ejemplo, tenemos *A* y *B* y un punto *C*. Yo me imaginaba un punto *C* por acá y que su distancia hasta *A* sea la misma que de *C* a *B.*
[41] Puede ser un triángulo equilátero [otro compañero apoya la idea].
[43] Sería *A* y *B* y la misma distancia a *C.*
[44] Pero es en el mismo segmento ¿no?
[45] No [vuelven a leer] dice encuentre un punto *C* que se …
[46] Pero no dice que en el segmento, ni en la recta, ni nada.
[47] Porque un punto que equidiste puede ser cualquiera por eso está bien el equilátero.

Los alumnos usan un método de tanteo para encontrar otros puntos, además del punto medio, que satisfagan la propiedad. Este método, aunque es de naturaleza intuitiva y complicado de realizar con lápiz y papel, con la ayuda del software *Cabri* puede ser exitoso, dado que permite explorar infinidad de situaciones al poder definir "objetos libres", como en este caso el punto *C,* y "objetos dependientes", como las distancias calculadas de *C* a los puntos *A* y *B*. Al mover el punto *C*, las distancias se modifican de acuerdo con cada nueva posición. Se observa una *B-acción* [61] con la que se encuentran otros puntos que son vértices de «triángulos igualitos». No obstante, esto no convence a uno de los alumnos, que sigue pensando que el punto debería estar en el segmento *AB* [58].

[48] No, a ver, un punto ( ), distancia o longitud a *A* y a *B* y () mueves el punto [dibuja en Cabri para mover el punto y encontrar la posición en la que obtenga la misma distancia del punto a *A* y a *B*].
[49] No mejor te digo que hagas un triángulo.
[50] No, ese mo me gustó. ¿No lo puedes quitar?
[52] ¡Muevélo!//
[54] Sí, ponle (Risas) ¡Ya! ¡Qué divertido!, ¿no?
[55] ¡Ya ves! Aquí está uno.
[56] No, pero eso para qué.
[57] Sí era como había dicho Nadia.
[58] Debe estar en el segmento, no afuera.
[59] No, yo creo que mejor así.
[60] No, porque lo hacen en el segmento. Ahí sólo está el punto medio.
[61] Sí puedo encontrar otros puntos. Mira aquí sería un triángulo y sí se puede. Y con otro triángulo igualito también [Leen: Pueden encontrar…]. Sí podemos tener puntos.

En el siguiente fragmento se ve cómo tratan de describir la forma en que encontraron los puntos que equidistan de los extremos del segmento *AB*, es decir, la conclusión escrita del método por tanteo que se menciona en el fragmento anterior. Al tratar de verbalizar surge, como ya lo hemos visto en repetidas ocasiones, el conflicto de si se trata de un segmento, recta o línea. Para convencerse se activa una *B-acción* [68] ya que la recta es de longitud infinita y el segmento es de longitud finita, tiene "límites" [extremos *A* y *B*]. Finalmente describen cómo encuentran el punto con la propiedad de equidistar de los extremos del segmento *AB*, relacionándolo con el vértice de un triángulo equilátero formado a partir del segmento *AB* [84] *(B-acción)*.

[64] Describan cómo encontraron los puntos [leen]. Poniendo un triángulo.
[66] No, poniendo un segmento *AB* y luego sacando punto medio.
[67] Pero ¿no sería una recta en vez de segmento?
[74] Ahora nos vamos a pelear por eso, línea o recta.
[75-76] Una línea recta ¡Ya!
[77] ¿Qué?, también hay líneas curvas.
[78] ¡Ya!, recta.
[79] Poniendo el segmento *AB*, encontrando su punto

[68] No, es segmento porque *A* y *B*, eso es que tienen límite y una recta es infinita.
[69] Por eso, ya ven yo se los decía que la mediatriz, a ver dónde se le veía el punto *A* o *B*, el límite.
[70] Y que le pusimos nosotros, [contestan] Que era segmento.
[72] Entonces recta [otro estudiante difiere] línea.
medio… al que llamamos *C.*
[81] A ver, en el número 2 qué [leen] Que en un triángulo del segmento *AB* y de un punto fuera …
[83] Es lo mismo.
[84] No, no es el punto medio… Del segmento *AB* encontraste un punto *C* que equidista de *A* y *B,* formando un triángulo equilátero con el segmento *AB* y *C.*

Al comprobar el dibujo de la mediatriz del segmento *AB* realizado con *Cabri*, el equipo mantiene la misma definición establecida con anterioridad encontrando como únicos rasgos de la mediatriz, que es perpendicular al segmento y que pasa por su punto medio (*R-acción)*, aún cuando ellos mismos se dan cuenta de que otros puntos de la mediatriz (distintos del punto medio del segmento) satisfacen la propiedad de equidistar del segmento [99]. Finalmente en la *C-acción* [102] se muestra la definición producida en el equipo.

[87] Aplique la herramienta *mediatriz* en el segmento *AB* ¿qué ocurre? [leen] ¿Qué le pongo?
[89] Pues en Cabri … A ver. Que se traza una recta, pero que pasa por el punto medio.
[91] […] si consideran necesario ajusten la definición de mediatriz que escribieron al inicio [leen]. ¿No?
[93] Luego se hace una recta perpendicular al segmento *AB*. Pero por ejemplo aquí ya habías puesto que pasa por el punto medio y no pasa.
[94] Sí claro. A ver borra todo esto [construcción en *Cabri*].
[95] Segmento *AB* y ponle *mediatriz* aquí, en ese cuadrito [señala el menú de *Cabri*].
[96] No se traza [le piden que observe con mayor atención] Sí. Mira. Son esos puntitos.
[98] Entonces aquí ni hay ninguna…[En 93 ya se tenía la recta perpendicular al segmento y se empalma].
[99] Ven, nadie creía en mi triángulito.
[100] Entonces, borra todo eso.
[102] A ver. Lean. Está bien. Mediatriz es recta perpendicular al segmento por su punto medio

Para la tarea *dibujar un segmento y etiquetar los extremos con A y B. Encontrar un punto C que se encuentre a la misma distancia tanto de A como de B*, los cuatro equipos participantes encuentran el punto medio del segmento como equidistante de *A* y *B*. Posteriormente, como una extensión de esta tarea se les pide que encuentren otros puntos que cumplan con la misma propiedad. En las respuestas que se presenta a continuación se identifican tres niveles de búsqueda de ejemplos: un caso particular en el mismo segmento, un caso particular exterior al segmento y, por último, todos los puntos posibles.

En el primer nivel se encuentran los equipos **A** y **B**, que sólo encuentran el punto medio del segmento *AB*.

El equipo **C,** muestra un nivel más avanzado al identificar otro punto como tercer vértice para formar un triángulo equilátero con los vértices de *AB*. No obstante, este hecho es sorprendente, ya que durante la interacción en el equipo planteraron situaciones sobre el uso de la mediatriz para encontrar la pendiente de la recta que une dos puntos y el centro de un círculo a partir de una cuerda. En ambos casos se hace referencia al triángulo. Este hecho es un ejemplo de cómo se pueden utilizar "bien" los conceptos sin que se tengan adquirida una comprensión de su definición aunque Vinner (1991) comprobó que el conocimiento de la definición de un concepto y su uso no garantizan su comprensión.

Finalmente, el equipo **D,** determina que todos los puntos de la mediatriz del segmento *AB* cumplen la propiedad. Aunque todos los equipos definieron la mediatriz, sólo **D** conecta este conocimientos con la nueva tarea.

Además de la tarea anterior se les proponen otras dos. Una en la que deben encontrar más puntos con la condición indicada, además de describir el proceso utilizado para encontrarlos y otra, para descubrir que la mediatriz es la recta que cumple con la condición. De lo que se trataba era de que identificaran la mediatriz como el lugar geométrico de los puntos que equidistan de otros dos pero no lo logran. Incluso, el último equipo, al ajustar su definición, insiste en considerar que la mediatriz «Parte al segmento en dos partes iguales (la misma distancia del punto *A* a la mediatriz y de la mediatriz al punto *B*», centrándose en el segmento y no en la mediatriz como conjunto de puntos que cumplen la propiedad de equidistar de sus extremos (ver tabla 26).

Tabla 26. Respuestas de los alumnos a las preguntas que guían la construcción de la definición de mediatriz

¿Pueden encontrar otros puntos que cumplan con esta propiedad? Describan cómo encontraron los puntos	Utilicen en Cabri la herramienta *mediatriz* y seleccionen el segmento $\overline{AB}$ ¿Qué ocurre? Ajuste la definición de mediatriz si es necesario.
A No Con Cabri: En el 5to ícono seleccionando la opción *punto medio* y enseguida seleccionamos el segmento. En forma manual:Decimos que $A=(x_1,y_1)$ y $B=(x_2,y_2)$. $C=[(x_1+x_2)/2, (y_1+y_2)/2]$	Aparece la recta mediatriz que pasa por *AB* por su punto medio.
B No. Trazando una perpendicular que pase por el punto medio del segmento (mediatriz)	Si se toma la medida de *A* a la mediatriz, es la misma que de *B* a la mediatriz.
C Sí 1) Poniendo el segmento *AB* encontrando su punto medio al que llamamos *C*. 2) Fuera del segmento *AB* se encontró el punto *C* que equidista del segmento y es el tercer vértice del triángulo equilátero.	1) Se hace una recta perpendicular al segmento *AB* y pasa por el punto medio. 2) Se hace una recta perpendicular al segmento *AB* y pasa por el punto *C* y el punto medio del triángulo. Ajuste a definición: Recta perpendicular al segmento por su punto medio.
D Sí, pero todos tienen que estar en la mediatriz. 1. Se traza un segmento *AB* 2. Se traza la mediatriz de la recta *AB*	Parte al segmento en dos partes iguales (la misma distancia del punto *A* a la mediatriz y de la mediatriz al punto *B)*.

En la socialización de las producciones en gran grupo nuevamente se utilizan de manera inapropiada los términos segmento y recta [9, 13, 17 y 23], sin embargo, el maestro no aclara el significado ni se presentan argumentos para distinguir entre ambos. Al final, la *definición visual* convenida en los equipos y centrada en el reconocimiento [*R-acciones* 9, 11,19 y 23] de un sólo punto de la mediatriz (el punto medio) y la propiedad de perpendicularidad al segmento [*R-acciones* 15, 17,] se extiende a una *definición correcta* [*C-acción* en 31] a partir de la *B-acción* [30] propiciada por el profesor. Posteriormente el profesor proporciona una *definición económica correcta* que considera a la mediatriz como «un conjunto de puntos que equidistan de los extremos del segmento» y de la que la *definición visual* dada por los alumnos es una consecuencia.

[8] Profesor:… Dibuje un segmento con extremos *A* y *B* y encuentren un punto a la misma distancia tanto de A como de B. Entonces, […] [realiza la construcción en *Cabri* y proyecta para que todos vean] para irnos más rápido. ¿Dónde encuentro un

[25] As: Que tiene la misma distancia a los puntos *A* y *B*

[26] P: Cualquier punto de esta parte [la mediatriz] cumple con eso ¿no? [contestan que sí]

[28] P: ¿Podemos encontrar un punto fuera de esta

punto que esté a la misma distancia de *A* y de *B*?
[9] Alumnos: En la mitad de la recta [otros precisan] En la mitad del segmento
[11] As: El punto medio
[12] P: Pero ¿y otro más?
[13] As: Fuera de la recta [segmento] puede ser [el profesor cuestiona] ¿Cuál recta?
[15] As: En una recta perpendicular [mediatriz]
[16] P: [Perpendicular] ¿A quién?
[17] As: A ésta [señala el segmento]
[18] P: Una [recta] perpendicular al segmento que pase ¿por dónde?
[19] As: Por el punto medio
[20] P: Y ¿cómo se llama esta [recta perpendicular]?
[responden los alumnos] Mediatriz
[22] P: La idea es que cualquier punto que ponga sobre la mediatriz ¿qué va a pasar?
[23] As: Que pasa por la recta. Por la mitad, por el punto medio
recta [mediatriz] que cumpla con que está a la misma distancia tanto de *A* como de *B*? Agarro un punto por acá se puede¬ [responden que no]
[30] P:Todos están en la recta ¿verdad? Vamos a aplicar la herramienta [de Cabri] *mediatriz* y veamos qué ocurre,…[pone un punto sobre la mediatriz y mide su distancia a los extremos] ¿Qué cumple?
[31] As:Todos los puntos sobre esta línea están a la misma distancia de los extremos del segmento
[32] P: Un conjunto de puntos que equidistan, que están a la misma distancia, de los extremos del segmento. Esta es la definición de mediatriz. En realidad también podemos decir que es la recta perpendicular al segmento que pasa por el punto medio. Sin embargo esto es más bien una consecuencia de la definición. La […] definición digamos más acorde es la de un conjunto de puntos que cumple con una propiedad ¿cuál es la propiedad?
[33] As: Que están a la misma distancia [convienen con el profesor en que no hay más puntos]

4.3.2.3 Representación física de la parábola

Dada la importancia de articular la definición de la parábola con su representación visual, hemos considerado, un apartado dedicado a materializar su gráfica a partir de su definición como lugar geométrico. Para hacerlo, hemos aprovechado las ventajas del software de Geometría Dinámica *Cabri Géomètre*. Además de lograr articular las dos representaciones (verbal y gráfica) se pretendía que los alumnos descubrieran las relaciones existentes entre varios objetos y conceptos geométricos que generalmente se estudian de manera aislada.

Para realizar la construcción en *Cabri,* los equipos siguen las indicaciones siguientes:
a) Dibujen un punto arbitrario en la pantalla y etiquétenlo como *F*.
b) Dibujen una recta arbitraria que no pase por *F* y llámenla *l*.
c) Con la herramienta punto sobre objeto, dibujen un punto sobre la recta *l* y etiquétalo con *Q*.
d) Dibujen el segmento *FQ* y tracen su mediatriz *m*.
e) Tracen una perpendicular a *l* que pase por *Q* y llámenla *t*.
f) Marquen el punto de intersección de *t* con *m*, y nómbrenlo *P.*

A continuación, en la figura 30 se muestran las construcciones realizadas por dos de los equipos, dado que son representativos del grupo porque muestran similitudes con las descartadas. Éstas se entregaron en archivos al final de la sesión y como se puede apreciar muestran algunos elementos trabajados después de lo que corresponde a la parte I.

*Construcción del equipo **A***	*Construcción del equipo **B***

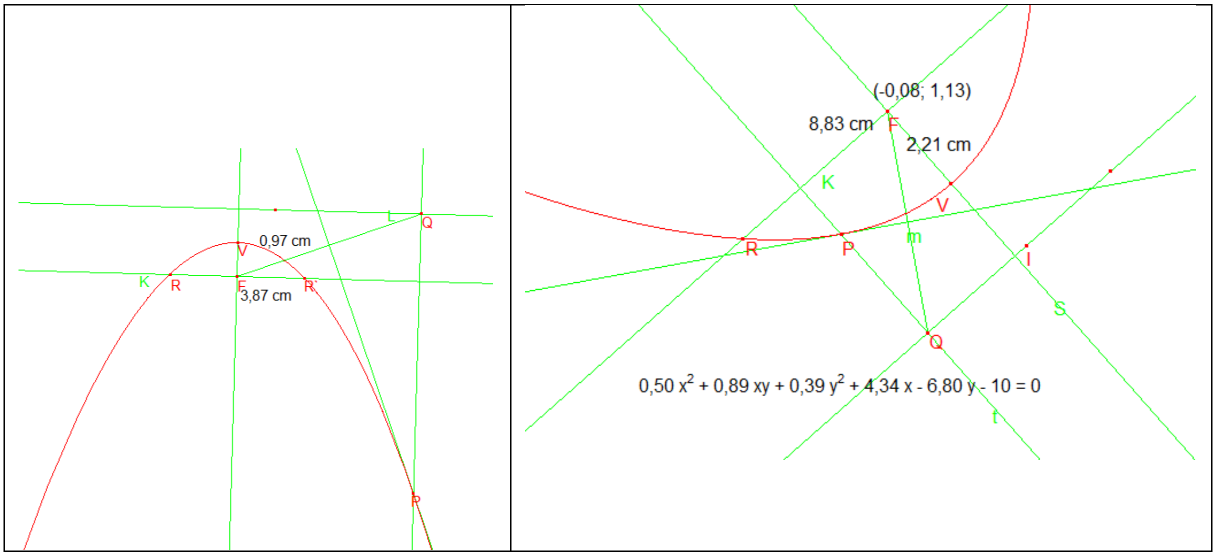


Figura 30 Construcciones en Cabri de la parábola a partir de su definición

4.3.2.4 Manipulación, observación y conceptualización de la parábola

En esta tarea se dedica tiempo para la manipulación de la construcción. Su observación permite identificar cuáles son los elementos independientes y los dependientes, así como la trayectoria descrita por el punto *P (*elemento dependiente), cuando se mueve el punto *Q* (independiente) y sus propiedades. También tiene lugar, la verificación de su observación sobre la trayectoria que sigue el punto *P* al trabajar con las herramientas *traza* y *lugar geométrico* y finalmente la experimentación y conceptualización los lleva a tratar de definir esta cónica como lugar geométrico a partir de la experimentación.
Para dar cuenta del trabajo desarrollado en los equipos analizamos la interacción en **A** y **B**.

El diálogo del equipo **A**, muestra que este acercamiento resultó atractivo a los alumnos dado que en los meses previos, en la clase de geometría analítica, tuvieron contacto con la representación verbal (o escrita) y la algebraica de la parábola con enfásis en la segunda representación, seguida de una lista de ejercicios para cuya solución había que hacer uso de ella. También se tenía una representación visual pero construida de una manera no transparente y probablemente artificial para el alumno.

Los estudiantes sólo han tenido una sesión previa de exploración del software *Cabri*. El trabajo en este ambiente les motiva y se muestran emocionados con las construcciones logradas.
En la exploración [*R-acciones* 67-72] de la construcción se percibe primero que *P* es un punto que depende del movimiento del punto *Q*, sobre la recta *l*, y además que con dicho movimiento *P* sigue la trayectoria de una parábola. Esto lo visualizan sin llegar a activar la herramienta *traza* (huella de *P*). También el movimiento les permite la exploración de "posiciones especiales", «se llegan a juntar *P* y *Q*» y se dan cuenta del potencial del movimiento para visualizar propiedades [69] lo que les permite encontrar que cuando están alineados *F*, *P* y *Q, P* es el punto medio entre el foco y el punto sobre la *directriz* (recta *l*).
Además tratan de visualizar otras propiedades, «la distancia de la intersección [*P*] es directamente proporcional a esos puntos [*F* y *Q*]», es decir, la distancia de *P* a *F* crece en la misma razón que la distancia de *P* a *Q* y esto se justifica en la *B-acción* [73] porque el punto *P,* al estar en la mediatriz

equidista del punto fijo *F* (foco) y de *Q*. Además podemos decir que como *Q* está en *l* y en la perpendicular que pasa por *P*, entonces *P* equidista de *F* y de la recta *l*.
Podemos observar las [90-91] *B-acciones* para manipular los puntos móviles lo que les permite experimentar y verificar propiedades invariantes, así como descartar áquellas que a "ojo" parece que se cumplen y no es así.

[64] Ahora una [no muy seguros preguntan]¿Recta o segmento?¬ Recta ¿verdad? [asienten].
[66] Con herramienta punto sobre objeto…[siguen instrucciones dadas para la construcción en *Cabri*].
[67] ¡Ah! Da vuelta. Si mueves al punto *P*. Órale mira ¡es la parábola! [Asienten emocionados].
[69] Oye se llegan a juntar *P* y *Q*. A ver muévelo otra vez.
[70] No mira, no. Se pasa en medio de *F* y *Q* ¡ Mira! ¿Te fijas?
[72] La distancia de la intersección [punto *P*] es directamente proporcional a esos puntos.
[73] Mira. Si te fijas .. Y esta es la mediatriz [asienten emocionados].
[78] ¿Cuál es la trayectoria?…[leen]. Pues la parábola ¿no? Dibújala en la hoja.
[80] Haz el eje bien. Hazlo tú Carlos tienes mejor visión de esto.
[81] Entonces dijimos que está éste [punto fijo *F*] y no se mueve…
[82] Espérame yo estoy toda emocionada aquí. Es que no sé que tanto se haga aquí [revisa] Así este y luego aquí [otro estudiante] Pón aquí la recta y estas son perpendiculares [siguen con el dibujo].
[86] Busquen la traza [leen, continúan las instrucciones y preguntan] ¿Ya escribiste que es una parábola?
[88] Sí, ya nos habíamos dado cuenta sin necesidad de la traza [comentan] ¡Ah sí!, ¡Muy listos!
[91] No, no te creas, … No. Mira. Mueve *Q* y [*P*] está en el centro de *FQ.* No. Pero te fijas sí está en el centro. No es cierto. Ahí no está en el centro [cuando F, P y Q no están alineados en el eje de simetría].

En el equipo **B** exploran la construcción. Mueven el punto *Q* sin seguir el desplazamiento de *P* y observan (*R-acciones*) lo que sucede con los trazos marcados. Es decir, encuentran [141] que *m* es perpendicular al segmento *FQ* y *l* es perpendicular a *PQ*, excepto cuando están alineados *F*, *P* y *Q* cuando la mediatriz *m* es paralela con la recta *l* (directriz) [134, 137, 144].

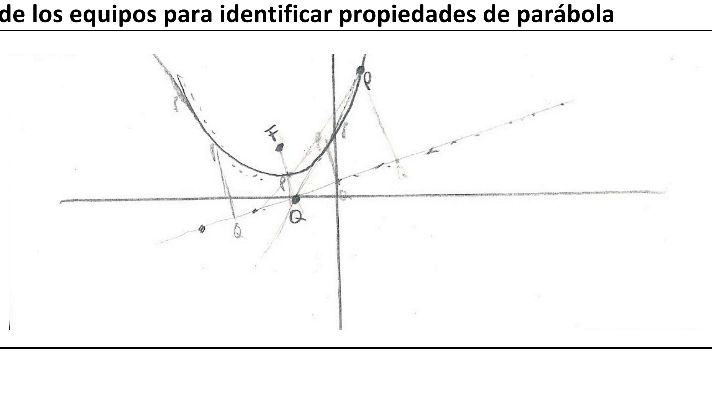
[133] Reproduzca la trayectoria [leen]. Mueve *Q.*
[134] Se junta con *m*, pero se hace paralela.
[135] No. Perpendicular.
[137] [señalan y preguntas si esas rectas] Sí, se hacen paralelas.
[139] Cuando se mueve *Q* ¿qué trayectoria sigue *P?* [leen].
[140] A ver. Pues dale [mueve a *P*].
[141] No. Se hacen puras perpendiculares. El segmento *FQ* con la *m* siguen siendo perpendiculares.
[142] Y ¿si muevo esto? El segmento *FQ* siempre es perpendicular a la *m*. Muevas donde muevas a *Q.*
[143] En dónde se hace paralela *PQ.*

En esta parte se aprecian *R-acciones* al activar la herramienta *traza* del software dado que se va dejando marcado el camino de *P* cuando se desplaza *Q,* y esto les permite realizar observaciones sobre la trayectoria marcada. La posición de la parábola (ver figura 30, producción de equipo B, p. 187) y la abertura les genera discrepancia; observan un círculo, un arco y para otros una parábola.
En [158 y 160] encontramos *B-acciones* influidas por la posición y la apariencia de la construcción. Esto hace al equipo formular el argumento para disuadir que se trata de una parábola. Este argumento establece que al tener una abertura amplia, el punto *P* no se va hacia arriba, o bien al no presentarse en las posiciones usuales (e.g. con el eje de simetría que sea paralelo con el eje Y) el punto *P* no sigue un camino "para arriba". Sin embargo para un estudiante la posición y la apariencia no constituyen un obstáculo para visualizar que se trata de una parábola [*B-acción* 155, 165] y es capaz de señalar el foco y el vértice. Más adelante cuando utilizan la herramienta *lugar geométrico* y pueden ver la trayectoria completa se convencen de que es una parábola.

[145] Comprueben lo observado con *traza* [leen]. Busquen *traza* [revisan las herramientas].
[146] Dale, dale [mueven *Q* y comentan] Se hace un círculo ¿no?
[148] No, sigue, sigue, dale [mueve *Q*].
[149] Mueve. Ya no se trazó [apoyan a su compañero] Otra vez dale en el cuadrito de *traza.*
[152] ¡Mueve el punto!, ¡ahí está!, para arriba, dale.
[154] Sí, que quede bien marcado.
[155] ¡Es una parábola!. Es una parábola. Si, mira. Éste sería el foco. Éste es como el vértice. Sí, ve, ¡claro!
[156] No. Es como un arco.
[157] No. Vean. Es parábola.
[158] No es parábola. Parece, pero no es. Porque si fuera parábola esto se iría hacia arriba.
[159] Yo digo que es parábola.
[160] No, esto de aquí [señala] se iría para arriba.
[161] Bueno, pues mueve para el otro lado.
[162] Es que se borra. ¿No se borrará porque te regresas? [muestran desacuerdo].
[165] ¡Parábola! Ya ven. Sí es. nada más que está muy abierta. Éste es el foco y éste el vértice.
[166] No estamos de acuerdo con Jaqueline, pero está muy segura [muestran disposición] Bueno, sigan.
[168] Desactiva la traza. Obtén ahora lugar geométrico[leen y buscan la herramienta *lugar geométrico*].
[169] No, pero desactiva primero la *traza* [otro alumno] Ve como está activada.
[171] Pues no sé cómo hacerlo. Házlo tú [lo ayudan] ¡Ya! Aquí se quita. ¿Lo vuelvo a ver para checar que está desactivada? [pide ayuda] ¡Profe! ya batallamos con la traza. Mire aquí ya no está [activada] pero sigue. [Interviene el profesor]. A ver. Ya se quitó. Si lo mueves ahora…¡Bien, ya!
[182] [Profesor] Ya le pusieron *lugar geométrico*, pero ¿de quién?¬ [contestan los estudiantes] de *P.*
[184] Bien, con respecto a *Q* [los deja el profesor]. ¿Qué sucede?
[185] Pues dibuja la *traza* [Risas].
[187] No es la *traza*. Bueno la dibujó toda. Sí. ¡Es parábola!, sí. Me sorprendes. ¿Cómo supiste antes?

En la tabla 27 del registro escrito, se puede comprobar que algunos equipos, **B**, **C** y **D,** logran identificar algunas propiedades. También se observa que se presentan conexiones con la noción de dependencia (el punto *P* depende del movimiento de *Q*), que aparece en los equipos **B** y **C** aunque normalmente esto no se estudia en contextos geométricos, es natural en contextos algebraicos (variable dependiente e independiente). En la respuesta de **B**, se observa que el diagrama dinámico se constituye en un diagrama genérico por lo que lo utilizan para explorar diferentes posiciones y anotar observaciones del tipo si "tenemos esta posición" entonces "se tiene esta propiedad" como se aprecia cuando descubren que cuando *F, P* y *Q* están alineados, entonces las rectas *m* y *l* son paralelas, siendo *P* punto medio entre *F* y *Q* (mencionan de manera insistente este hecho). También se dan cuenta que la mediatriz *m* es siempre tangente en *P* a la parábola. El diagrama dinámico ha sido una herramienta útil, dado que si para un experto, un diagrama fijo de lápiz y papel es equivalente a un diagrama genérico, en la mayoría de los casos, para un estudiante cada diagrama fijo representa sólo esa posición.

Tabla 27. Respuestas escritas de los equipos para identificar propiedades de parábola

A Reproducen la construcción detallada en la hoja de trabajo y la trayectoria de *P*. Posteriormente con la herramienta *traza* y lugar geométrico comprueba que es la misma trayectoria identificada y la reconocen como parábola.	

B	Al mover *Q, P* también se mueve describiendo una trayectoria. Con la herramienta *traza*: Se forma una parábola con foco en *F*. Según nuestra observación al alinear *F,P* y *Q*, *m* y *l* son paralelas. Al alinear *P*,*Q* y *F* el vértice de la parábola queda en *P*. Con la herramienta *lugar geométrico*: Se dibuja una parábola siendo la mediatriz tangente a la misma con su punto de tangencia en *P*. [No incluyen diagrama]
C	Si movemos *Q*, *P* se mueve junto con él. Pues el segmento $\overline{FQ}$ siempre es perpendicular a la recta m, muevas donde muevas a *P*. [Reconocen la trayectoria como parábola y no incluyen diagrama]
D	[dibujo en forma de "U" sin detalle y reconocen la trayectoria como parábola]. *P* equidista de *F* y *Q*.

4.3.2.5 Extraer significado de la mediatriz como elemento de la parábola

En esta parte se pretende que puedan extraer significado de la definición de mediatriz para encontrar la propiedad que satisfacen los puntos de la parábola. Para ello a los alumnos se les plantea la pregunta: Si *P* está en la mediatriz del segmento *FQ*, ¿qué propiedad tiene respecto a *Q* y a *F*?
En la interacción en pequeños grupos seguiremos la interacción del equipo **A** y del equipo **C**.

En el equipo **A**, se aprecia que para medir la distancia de un punto a una recta, a través de una perpendicular a la recta que pase por el punto [98], lo que constituye una *C-acción* que está precedida por *R-acciones* [93, 95 y 97] previas. Además están de acuerdo en que la distancia es la medida del segmento sobre la perpendicular [*B-acción* 96]. Dado que la perpendicular pasa por *P* y *Q*, estos se consideran extremos del segmento [*B-acción* 99]. Como además deben medir la distancia entre dos puntos recuerdan la fórmula mediante una *R-acción* [101].

[93] ¿Cómo se mide la distancia de *P* a la recta *l*? [contestan] Pues al punto *Q* ¿No?
[95] La distancia es al punto *Q* porque está en *l.*
[96] Y la distancia es *P-Q.*
[97] La raíz cuadrada ¿no?
[98] La distancia se mide en forma perpendicular de un punto a una recta.
[99] Pero haz de cuenta que aquí te pide cómo se mide la distancia *P* a la recta y sabes que *P* está a esta distancia de la recta y por eso coincide que aquí está *Q* y sería *P-Q* [un estudiante muestra acuerdo].
[101] No sería más bien raíz de $(x_2\text{-}x_1)^2$ y $(y_2\text{-}y_1)^2$.
[102] No, no es la raíz, porque estás hablando de un punto a una recta [un alumno muestra desacuerdo].
[104] Entonces, esto [señala].
[105] La distancia es un número, no es con coordenadas [otro alumno] Entonces, sí es con suma y la raíz.

Mediante el cambio de posiciones del punto *Q* extraen significado de la construcción y observan sus propiedades [*B-acciones* 111-114]. Así, en [111] observan que para ciertas posiciones del punto *P* su distancia a la recta *l* es la misma que de *P* a *F*, pero en otras posiciones como cuando se acerca a los "extremos" de la parábola, no se visualiza esta propiedad tan claramente y esto les hace dudar. Sin embargo, al centrar su atención en trazos auxiliares, como en los triángulos que se forman con los vértices *F*, *P* y *Q* [*C-acción* 122], les permite resolver su duda y visualizar la propiedad de equidistancia de *P* a *F* y de *P* a *Q* y, en consecuencia, de *P* a la recta *l*.
Antes han averiguado otra propiedad, que es consecuencia de lo anterior [112], que *P* es el punto medio de *F* y *Q* cuando *P* es el vértice de la parábola, es decir, cuando los tres puntos están

alineados. Esta observación la encontramos en casi todas las interacciones del resto de los equipos.

[108] [Leen] ¿Qué cumple *P* respecto a la recta *l* y al punto *F*? // Mueve *Q*.
[109] ¿Cuál es la recta *l?*
[110] A ver ponle aquí. Mueve el punto acá.
[111] Por ejemplo, aquí, ¡ve!. No. La distancia es mayor que ésta, no igual.
[112] Mira. Aquí es el punto medio [cuando *F*, *P* y *Q* están alineados].
[113] Es la misma distancia.
[114] No. Pero conforme crece una, va creciendo.
[115] Pero a ver. En este momento ¿no es el punto medio?
[116] La distancia de *P* a *F* es la misma que de *P* a *l.*
[117] La distancia de *P* a *F* es la misma distancia que de *P* a *Q*, pero no a *l.*
[118] Sí es la misma de *P* a *Q*, también de *P* a *l*, porque *Q* es un punto de *l.*
[119] Pues ponle así [contesta el alumno] No, no estoy muy convencido [otros apoyan lo mismo].
[122] No. ¿sabes qué? Sí. Es cierto. Porque aquí si te fijas se forma un triángulo rectángulo y conforme vas estirando se estiran los triángulos rectángulos y son la misma distancia.
[123] Es cierto. mira lo que aprendes sólo viendo dibujitos.

En el equipo **C**, en [213-220] nos encontramos con un registro algebraico (para algunos confuso [214]) que se activa continuamente (*R-acción)*. Al tener en mente este registro, intentan visualizar los ejes *x* e *y* en el plano cartesiano (que no se presenta en la construcción) y confunden el punto *P* con la distancia entre vértice y foco de la parábola ya que, a menudo, se le etiqueta con la letra *P*. En [226-229] intentan reunir observaciones para construir sobre ellas (*B-acciones*). También intentan recordar la fórmula de distancia entre dos puntos, sin lograrlo por no visualizar coordenadas de los puntos. Finalmente, en [229-236] se dan cuenta que la distancia de *P* a *l* es igual que de *P* a *Q* aunque al final la representación escrita no resulte apropiada, *P+Q* [235].

[212] [leen] Qué si *P* está en la mediatriz del segmento *FQ*, ¿qué propiedad tiene respecto a *Q* y a *F*?¿cómo se mide la distancia de P a la recta l? // ¿Qué dijo?, ¿cómo se sacaba la directriz?
[213] *x+p* Esa es la fórmula.
[214] Y luego se hace *x* más p^2 y más *x* y quién sabe qué.
[215] ¿Cómo se medía de aquí hasta acá?
[216] ¿Y para qué era eso?
[217] *4xp* es la fórmula con el vértice en el origen y el eje coincide con el eje de las *x.*
[218] Este sería el eje *x.*
[219] ¿Cómo se mide la distancia de *P* a *l?*
[220] Por eso era *x+p=0.*
[221] Y luego, [un alumno indica que no sabe que hacer].
[223] Con la fórmula de distancia.
[224] Y ¿cuál es el punto? [le responden] Uno cualquiera.
[226] Pues es que aquí *P* es un punto cualquiera que tiene la parábola.
[227] ¿Y el vértice? [otro estudiante contesta] Entonces el vértice vendría siendo éste.
[229] La distancia de *F* a *P* y *P* a *l*, ¿cómo se mide? [contestan] Es esto. De *Q* a *P.*
[233] No de *P* a *l.*
[234] Pues es de *Q* a *P.*
[235] *P+Q* igual ¿no?
[236] ¿Cómo se mide?¿perpendicular?

Durante la exploración y la manipulación de la construcción descubren la propiedad de igualdad de distancias del punto sobre la parábola al foco *F* y a la recta fija *l* [*C-acción* 252], no obstante el equipo escribe«cuando se juntan *FQ*» tal vez motivados por las *R-acciones* [241, 243 y 247].

[237] Qué [leen] si *P* está en la mediatriz del segmento *FQ*, ¿qué propiedad tiene *P* respecto a *Q* y a *F*?
[238] Punto *Q*, para mover *P.*
[239] A ver. Aquí.
[240] La recta *l* y *F.*
[244] Siempre va a ser la misma distancia [un estudiante pide acuerdos] ¿Qué ponemos pues? Yo escribo.
[247] [Indican que movieron el punto *Q*] Entonces, se juntan la recta de *P* con la de *Q* [un alumno muestra desacuerdo con esto].
[249] Es el segmento [se muestran dudosos y vuelven a

[241] Cuando se juntan [muestran desacuerdo con esto].
[243] Ahí se juntan.

leer].
[252] Siempre va a ser la misma distancia de *P* a *l* igual que de *P* a *F*.

El registro escrito de los grupos en relación a la pregunta: *Si P está en la mediatriz del segmento FQ, ¿qué propiedad tiene respecto a Q y a F?* es: $\boxed{A}$ *P* se encuentra a la misma distancia de *Q* que de *F* $\boxed{B}$ Que está a la misma distancia de los dos $\boxed{C}$ P es el punto medio de *FQ* $\boxed{D}$ Que está a la misma distancia del punto *Q* y *F*.

Ya en la parte anterior construyeron dos representaciones de la mediatriz además de buscar conexiones con situaciones en las que previamente la habían utilizado. Sin embargo mostraron ciertas debilidades con la definición, dado que no la consideraban como una propiedad general (únicamente consideraban que algunos puntos de la mediatriz del segmento equidistaban de los extremos del segmento), aunque cierta: la mediatriz divide al segmento en dos partes iguales (algún equipo sí menciona que es la recta perpendicular al segmento). En este apartado, después de haber trabajado con la mediatriz para construir una parábola retoman la definición y podemos ver como el equipo **D** caracteriza sus puntos a partir de su propiedad principal. En la figura 31 se muestra que en las tareas de definir la mediatriz y de ajustar la definición después de su construcción en *Cabri* [1 y 3] se centran en un único punto (el punto medio), dado que en ese momento el único objeto en juego es el segmento. Mientras, que en las tareas 2 y 4, como están considerando algo más que el segmento sí hacen explícita la propiedad que caracteriza a los puntos de la mediatriz. En estas tareas se pide encontrar respectivamente otros puntos que equidisten de los extremos del segmento e identificar la propiedad que caracteriza a un punto que está sobre la mediatriz [auxiliar] en la construcción de la parábola.

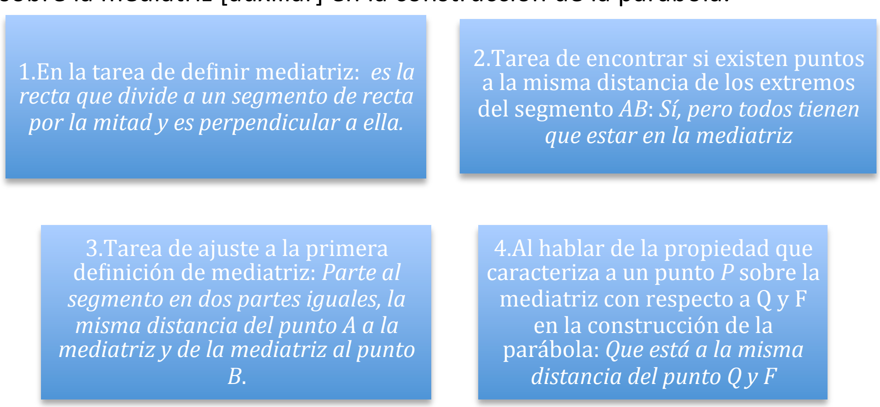


Figura 31. Respuestas del equipo D asociadas a la mediatriz de un segmento en diferentes tareas.

Para identificar el segmento que determina la distancia del punto *P* a la recta *l*, las respuestas de los equipos fueron:

$\boxed{A}$ Decimos que $P=(x_1,y_1)$ y $Q=(x_2,y_2)$ y $\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$ $\boxed{B}$ Es la perpendicular de *l* que pasa por *P* $\boxed{C}$ *P+Q=d* *Pl*→ perpendicularmente $\boxed{D}$ La distancia que existe entre la recta *l* y el punto *P* se mide perpendicular a la recta *l* y pasa por el punto *P*.

Al pedirles que movieran el punto *Q* para que se moviera *P* las respuestas a la pregunta ¿qué cumple *P* respecto a la recta *l* y al punto *F*? dadas en los equipos son las siguientes:

$\boxed{A}$ La distancia de *P* a *l* = a la distancia de *P* a *F* $\boxed{B}$ Está a la misma distancia de ambos $\boxed{C}$ Se junta el segmento *FQ* $\boxed{D}$ Que siempre está a la misma distancia de la recta *l* y el punto *F*.

En la respuesta a la primera pregunta los equipos **B**, **C** y **D** tienen en cuenta que la distancia de *P* a *l* se mide a través de una recta perpendicular a *l* que pase por el punto *P*. Sin embargo la respuesta de **B** no menciona que la distancia se determina por el segmento (sobre la recta perpendicular) de *P* a *l.* En la respuesta de **C** realizan esta observación pero expresan de manera inapropiada que la distancia requerida es la del punto *P* a *Q* como extremos del segmento [escriben *P+Q=d*] medido a través de la recta perpendicular. Por su parte el equipo **D,** aunque no lo hace explícito, sugiere que la distancia corresponde a la medida del segmento.
Por otro lado, el equipo **A** sugiere que la distancia del punto *P* a la recta *l*, es la misma que la de *P* a *Q* y eso de manera implícita supone la medida del segmento (*PQ*) perpendicular a *l*. Además indican la fórmula para hacerlo en función de las coordenadas de los puntos.
En relación a la segunda pregunta, el equipo **C** menciona que «se junta el segmento *FQ*» motivados, quizá, por encontrar similitudes y lo que visualizan es que todos los elementos mencionados tienen que ver con el segmento *FQ*. En la interacción, el equipo determina la propiedad de la mediatriz al igual que los otros equipos, sin embargo, también se discuten hechos como que «se juntan la recta de Q con la de P y [el segmento *FQ*]» y al final registran esto último.
Por su parte los equipos **A**, **B** y **D** encuentran la propiedad que satisfacen los puntos de la parábola con respecto al punto fijo *F* y a la recta fija *l*. Con esto se espera que más adelante puedan definir la parábola como lugar geométrico que cumple esa propiedad, sin embargo esto finalmente no sucede a pesar de las interacciones en equipo.

4.3.2.6 Definir parábola

En este apartado se pretendía que de acuerdo a la manera en que los alumnos realizaron la construcción de la parábola y encontraron sus características respondieran a la pregunta *¿cómo definen la trayectoria obtenida?*
Para analizar la construcción de la definición describiremos la interacción en los equipos **A** y **C**.
En el equipo **A** para definir la parábola, un estudiante piensa en la igualdad de las distancias de *P* a *F* y de *P* a la recta *l*. Sin embargo, al utilizar la palabra "relación" los compañeros recuerdan la noción de relación de equivalencia lo que provoca una discusión en el seno del grupo que conduce a ciertas *R-acciones* involucradas con el concepto de "relación de equivalencia" [126-141] y al intentar encajar este concepto con la respuesta a la pregunta se producen algunas incoherencias [135-140] pues tratan de justificar que se satisfacen las propiedades, reflexiva, simétrica y transitiva (relación de equivalencia) en los triángulos de vértices *F*, *P* y *Q* [131-133].
Finalmente abandonan ese camino después de la intervención (*R-acción*) de uno de los estudiantes en [141] porque les sugiere que están confundidos.

[125] [leen] ¿Cómo se define la trayectoria obtenida? Pues es la relación entre *F* y *l* con respecto a *P*.
[126] Una relación es cuando es reflexiva, transitiva y qué. ¬

[134] Porque al momento de llegar aquí, ya no vemos si es triángulo, () es una recta [a medida que el punto *Q* avanza alejándose del foco el punto *P* se pierde y el triángulo se vuelve recta …]
[135] Pues de hecho sí y yo creo que sí es relación

[127] y simétrica [asienten e indican que es tema visto].
[130] Sí. Hicimos un trabajo de eso.
[131] La relación entre *F* y *l*, pero con respecto a *P.*
[132] La relación de un triángulo con sus puntos en *F*, *P* y *Q.*
[133] Sí, es un triángulo entre *F*, *P* y *Q* y es rectángulo.
porque reflexiva sí es, mira aquí y luego aquí.
[136] Ah no. No tiene reflexiva porque… Sí. Mira. En el punto *P* se hace reflexiva y luego…
[137] La simétrica es ésta ¿no? [confirman].
[139] Y la transitiva es la que los mueve [los triángulos] de un lado a otro.
[140] No. Es la que hace que la figura crezca.
[141] No, yo creo que están confundidos.

Dos alumnos se dan cuenta de que la tarea es precisamente definir la párabola *R-acciones* [144-145] y también se dan cuenta que la mediatriz *m*, del segmento *FQ,* es tangente a la parábola por el punto *P*, aunque sólo hacen referencia a la posición en que *P* coincide con el vértice de la parábola.
Finalmente en la definición usan su nombre y sus elementos, y se convencen de que están en el camino correcto puesto que más adelante en la siguiente nota de la hoja de trabajo aparece escrito: «la trayectoria estudiada es conocida como *parábola* con foco *F* y directriz *l*». Esa nota actúa como un elemento de confusión por lo que no debería haberse incluído en la tarea.

[142] Ah. Pues el punto que pasa ().
[143] *Q* es la trayectoria de *P* a *l* ¿verdad?
[144] Es que la trayectoria obtenida es una parábola.
[145] Cómo definimos la parábola.
[146] El punto medio es la tangente de la parábola [el vértice].
[147] y *Q* viene siendo qué ¬.
[148] Que la *P* es la tangente de la parábola.
[149] No es la tangente.
[150] Pero sí la recta *m.*
[151] Pues *l* es directriz y *f* el foco de la parábola.
[153] La trayectoria estudiada es…[leen]Es lo mismo que dijiste y tanto tiempo que nos llevamos aquí.

Al partir de *R-acciones* [155, 156, 157], de la construcción realizada en *Cabri* con las herramientas *traza* y *lugar geométrico* (B-acciones 159-162) deducen la *C-acción* [163] que se corresponde con la definición de lugar geométrico: «es el espacio que ocupa una figura en algún plano».

[155] [Leen] Discutan y expliquen que significa lugar geométrico. ¿Qué es? Es por donde pasa un punto.
[156] Es una parte de una figura.
[157] Lugar geométrico ((Pva)). Es una distancia.
[159] Mira. Nos está dibujando por donde pasa el punto *P* [aplica la herramienta *lugar geométrico* en Cabri al punto P con respecto a *Q*].
[160] Es una figura en el plano.
[161] Bueno. Sí es figura.
[162] Es el espacio. Ahí está el lugar geométrico.
[163] Es el espacio que ocupa una figura en algún plano.

Al equipo **C** le ocurre exactamente lo mismo que al equipo **A**, se atiende a un elemento confusor que frena la discusión y deriva en una respuesta errónea asociando la definición con el término que hay que definir (parábola).

[254] [Pasan a la siguiente pregunta] De acuerdo al punto anterior, ¿cómo definen la trayectoria obtenida? Pues como parábola.
[255] Sí pues lo dice abajo, [leen] la trayectoria es conocida como parábola con foco *F* y directriz *l.*
[256] Ya ven les estaba diciendo.

En cuando a la definición de lugar geométrico se aprecian *R-acciones* inducidos por su uso en la construcción de la parábola. Reconocen algunos términos y acciones como: punto móvil sobre una recta [258], propiedad del punto con respecto a otro punto y a una recta fija [259-260]. Finalmente definen parábola en vez de lugar geométrico.

[258] [Leen: qué significa lugar geométrico] Es donde un punto se mueve sobre una recta y luego...
[259] Cuando un punto se mueve de tal manera que siempre estará a la misma distancia de un punto que de una recta
[260] De una recta fija [muestran acuerdo].
[262] En un plano ¿no?
[263] Cuando un punto se mueve //.
[264] Un punto fijo.

Una vez que realizan la construcción y exploran sus propiedades registran por escrito sus respuestas a la pregunta *¿cómo definen a la trayectoria obtenida?* Sus respuestas fueron: $\boxed{A}$ *F* es el foco de la parábola y *l* es la directriz $\boxed{B}$ Como una parábola con foco en *F* $\boxed{C}$ Que siempre va a ser la misma distancia de *FQ* a *Pl* se mueva donde se mueva $\boxed{D}$ Parábola.
Dado que los cuatro equipos (tres en la interacción y en la producción escrita y uno, sólo en la interacción) visualizaron la propiedad que cumplen los puntos que se encuentran sobre la parábola se esperaba que pudieran llegar a definirla, pero no fue así. El equipo **C** aunque hace un intento por describir la propiedad que tienen los puntos que se encuentran sobre la parábola, lo hace de manera errónea «la misma distancia de *FQ* a *Pl*». Por otra parte los equipos **A**, **B** y **D** confunden "definir" con "nombrar" la trayectoria, aún cuando en el punto anterior lograron visualizar la propiedad que satisfacen los puntos sobre ella.
En la siguiente pregunta se esperaba que los estudiantes pudieran caracterizar lo que se entiende por "lugar geométrico", después de haber utilizado este concepto para construir la parábola como la traza del punto *P* para definir su movimiento dependiendo del movimiento del punto *Q*. Las respuestas dadas por los equipos fueron: $\boxed{A}$ Es el espacio que ocupa una figura en algún plano $\boxed{B}$ Es la trayectoria que sigue un punto con respecto a cualquier objeto $\boxed{C}$ Cuando un punto se mueve en un plano de tal manera que su distancia de una recta fija situada en el plano es siempre igual a su distancia de un punto fijo del plano y que no pertenece a la recta $\boxed{D}$ Es un conjunto de puntos tales que satisfacen una propiedad y sólo estos puntos satisfacen dicha propiedad.
En su respuesta, el equipo **A** relaciona el lugar geométrico con la superficie de una figura. El equipo **B** caracteriza el lugar geométrico a partir de la noción intuitiva mencionada antes en relación con la traza y el movimiento. Por su parte **C** activa la propiedad que satisfacen los puntos de la parábola y finalmente **D** enuncia de manera correcta la definición.

Durante la interacción en gran grupo, se trató de partir de la propiedad de los puntos de la mediatriz de un segmento y utilizarla para definir parábola. Para ello el profesor proporciona enunciados incompletos y pide que los alumnos los completen con una *R-acción*.

[35] Profesor: La idea es que cuando hicieron esta construcción [lee y va realizando cada paso a vista del grupo] ustedes comenzaron con un punto [*F*] y una recta [*l*] ¿no? y un punto *Q,* [..] Luego ¿qué les pedían?
[36] Alumnos: Que encontraramos la mediatriz [del segmento *FQ*]
[37] P: [Dibuja la mediatriz de *FQ*] Entonces los puntos de la mediatriz están a la misma distancia
[38] As: Están a la misma distancia de aquí y de acá [otro estudiante puntualiza] De *Q* y de *F*

En el siguiente fragmento la idea es visualizar cómo se representa físicamente la distancia de un punto a una recta y este objetivo se cumple. Sin embargo, consideramos que en [41] la intervención del alumno se descarta sin solicitarle argumentos para defender su aportación.

[40] Profesor: Luego les pide que tracen una perpendicular a *l* que pase por *Q* y llámenla *t.* […] ¿cómo mido la distancia
[42] P: Más que con el teorema de Pitagoras, cómo trazo la distancia aquí [físicamente qué representa la distancia]. Qué propiedad debe tener lo que me representa la distancia.

desde un punto a una recta? Desde un punto de la mediatriz hasta la recta *l*, ¿cómo?
[41] Alumnos: Con el Teorema de Pitágoras.
[43] As: Debe ser perpendicular.
[44] P: La distancia de aquí [punto sobre la mediatriz] a esta recta debe ser este segmento, cómo.
[45] As: Perpendicular a la recta.

En esta unidad de análisis se revisa la construcción realizada con el uso de las herramientas de *Cabri* como *traza* o *lugar geométrico* para encontrar la trayectoria que corresponde a la parábola. Luego, a partir de la construcción, se trata de identificar la propiedad que cumple cualquier punto que se encuentre sobre ella a partir de otros conceptos, tales como, la mediatriz y la representación física de la distancia de un punto a una recta. La dinámica seguida por el profesor es la misma que antes, cuestionar y esperar que le devuelvan *R-acciones* que le indiquen un reconocimiento de un concepto o propiedad. Al final el profesor es quien termina por definir la parábola.

[46] Profesor: Sí ahora este punto que encontramos [trazando la perpendicular a la recta *l* que pasa por *Q*] al intersectar con la mediatriz se llama *P* que propiedad tiene ¬.
[47] Alumnos: Qué la distancia a *F* y a *Q* es la misma.
[48] P: El punto está ¿dónde? ¬ [contestan los alumnos].
[49] As: En la mediatriz.
[50] P: Bien. Ahora lo que hicieron fue activar la traza para el punto *P* y luego mueven el punto *Q* y encuentran la trayectoria y le dan un nombre ¬ [contestan los estudiantes].
[51] As: La parábola.
[52] P: Luego hacen lo mismo con lugar geométrico y ahora las preguntas. [Lee] Si P está en la mediatriz del segmento *FQ*, ¿qué propiedad tiene respecto a *Q* y a *F*?
[53] As: Que *P* está a la misma distancia.
[54] P: ¿Cómo se mide la distancia de *P* a la recta *l*? [lee].
[55] As: A través de la perpendicular.
[56] P: Luego, [lee] Muevan el punto *Q* para mover *P* ¿Qué cumple *P* respecto a la recta *l* y a *F*?
[57] As: La distancia de *P* a la recta *l* es igual a la de *PF.*
[58] P: Luego, cómo definen la trayectoria. ¿Quién nos dibuja la trayectoria? ¬
[59] As: El punto *P.*
[60] P: Lo voy a escribir aquí para que no se olvide. Entonces, … ¿qué propiedad tiene este punto?
[61] As: Que tiene la misma distancia a *Q* que a *F.*
[62] P: De *Q* sí, pero recuerden que eso marca la distancia a la recta [asienten los alumnos].
[64] P: Estos puntos en rojo [los de la parábola], qué cumplen. Fíjense bien P siempre está cumpliendo una propiedad, siempre es punto de la mediatriz. Este conjunto de puntos que cumplen con que su distancia a la recta *l* y al foco *F* es la misma. Entonces, ¿cómo definimos parábola? Es un conjunto de puntos, todos los puntos del plano cuyas distancia a una recta fija y a un punto fijo son iguales. Sí ¬.

En la siguiente unidad de análisis la idea principal fue reconstruir entre todo el grupo la definición de lugar geométrico, a partir de la experiencia previa de su uso en *Cabri*. La interacción se inicia con la construcción que acaban de hacer de la parábola [64] como recurso para extraer significado y con la participación de los alumnos para que mediante *R-acciones* el profesor pueda integrarlas en una *definición económica correcta* [69]. Durante la interacción se activan ejemplos de lugares geométricos para clarificar la definición [69-72]. En estos ejemplos, como antes, los alumnos identifican la palabra círculo confundiéndola de nuevo con circunferencia.

[64b] Profesor: Ahora ¿cómo definen lugar geométrico? Veamos esto desde la definición de parábola. La definimos como un conjunto de puntos, pero también se puede definir como el lugar geométrico de todos los puntos que cumplen con […]. ¿Qué es lugar geométrico?¬.
[65] Alumnos: Es una trayectoria.
[66] P: Más o menos. Sí es una trayectoria. Pero en realidad
[70] As: Es el círculo //[otro alumno] Es el círculo de radio 3.
[72] P:[…]Los puntos en azul [circunferencia] es el conjunto de puntos del plano que cumplen con que su radio desde el punto es 3. Todos los conjuntos de puntos, como: mediatriz, parábola, circunferencia o círculo

¿qué es una trayectoria? ¬.
[67] As: Un conjunto de puntos.
[68] As: Sí, pero que cumplen con una propiedad.
[69] P: [Lugar geométrico] Es el conjunto de puntos que cumplen con una propiedad. Por ejemplo, voy a dibujar un punto y yo les digo ¿cuál es el lugar geométrico de todos los puntos cuya distancia a este punto es 3? son lugares geométricos. Incluso el círculo porque no es lo mismo que circunferencia, […] círculo sería el conjunto de puntos que cumplen con que su distancia al punto es menor o igual que 3. Un conjunto de puntos que cumplen con una propiedad es un lugar geométrico.

4.3.2.7 Identificar propiedades de algunos elementos en la parábola

Para concluir el trabajo en relación con la parábola, se les pide a los alumnos que realicen algunos trazos en la construcción hecha previamente para identificar algunas propiedades. Los trazos sugeridos son que: a) tracen una recta perpendicular a *l* que pase por *F* y la nombren como *s*. b) obtengan también la intersección de *s* con la parábola y llamen a ese punto *V* que es el vértice, c) tracen una perpendicular a *s* que pase por *F* que la etiqueten como *k* y que marquen los puntos de intersección de *k* con la parábola como *R* y *R’,* y d) midan los segmentos *RR’* y *VF*.
Finalmente se les pide que muevan *Q* y se les pregunta y se les pide que justifiquen si hay alguna relación entre sus medidas y qué relación hay entre la medida de *VF* y la distancia entre *V* y *L*.

Durante la interacción en el equipo **A** se dan cuenta que las medidas de los segmentos son constantes (*R-acción*) y, recordando lo que habían visto de la parábola en el registro algebraico (*B-acción*), dividen y verifican que una distancia es 4 veces mayor que la otra. En cuanto a la propiedad de igualdad de la distancia del vértice de la parábola al foco y del vértice a la recta, se dieron cuenta de forma inmediata dado que ya lo habían observado en la primera manipulación de la construcción (*R-acción*).

[165] Tenemos que medir de aquí a aquí … y ahora de *V* a *F*. Muevan *Q*.
[166] Y luego hay una relación.
[167] Pues sí ¿no?// A ver. Al moverlo.
[169] A ver. Si movemos *Q* no cambian las medidas.
[170] constantes.
[171] Pero a ver. Divide las cantidades [luego de dividir contesta que es 4].
[173] Entonces que la distancia *RR’* es *4* veces más que la distancia de *V* a *F* [muestran acuerdo].
[175] Y ahora de *V* a *F* y de *V* a *l.*
[176] Que son distancias iguales. Ya lo vimos. *V* es punto medio.

Por su parte en el equipo **C**, las propiedades se identifican de manera inmediata (*R-acciones*) aunque vemos que en el contexto algebraico se había nombrado la distancia de *VF* como *P* siendo usada aquí de manera correcta, a pesar de que con anterioridad esta cantidad se confundía con el punto *P*.

[266] ¿Qué relación hay entre la medida del segmento *VF* y la distancia entre *V* y *l* ?
[267] Una es *8.65 [RR’]* y el otro *2.17 [VF].*
[268] Pero, ¿cómo se relacionan? No varían.
[269] Pues es *4P.*
[270] Y la otra es la misma distancia de *VF* y de *V* a *l.*

En el concentrado de respuestas escritas, los equipos responden a la pregunta ¿Qué relación hay entre la medida de $\overline{VF}$ y la distancia entre *V* y *L*? que: $\boxed{\text{A}}$ 1) La distancia de *R* a *R’* es 4 veces la distancia de *V* a *F;* 2) La distancia de *V* a *F* es igual a la de *V* a *L* $\boxed{\text{B}}$ Es =4; Sí, al mover el punto *F* la distancia de *RR’* no cambia; La relación es la misma ya que *V* está en el punto medio de *V* y *l* $\boxed{\text{C}}$ *RR’=8.65cm*, *VF=2.17 cm* es *=4P*. Es la misma distancia de *VF* y *VL* $\boxed{\text{D}}$ No hay relación; La distancia existente entre la recta *l* y el punto *V* es igual a la distancia de *VF*

De las respuestas a la primera pregunta, podemos extraer que los equipos **A, B** y **C** encuentran que la distancia de *R* a *R'* es 4 veces la distancia de *V* a *F* y que estas cantidades no cambian con el movimiento de *Q.* En la interacción en el equipo **A** observamos que no intentan mover, por ejemplo, el foco *F* o la directriz *l* para ver cómo se modifican estas distancias y se obtiene una parábola distinta*.* El equipo **B**, aunque no es clara su respuesta, encuentra que al mover *F*, y obtener una parábola distinta, la relación 1:4 entre estos segmentos se mantiene. En el equipo **C** vemos que además de encontrar la relación identifican el segmento *VF* con la letra *p* que se emplea usualmente en el registro algebraico. Sin embargo, en algunas interacciones del equipo **C**, nos hemos encontrado que esto genere confusión con el punto *P* sobre la parábola.
Finalmente en el equipo **D** no encuentran ninguna relación, únicamente miden y no encuentran ninguna similitud en las cantidades.
En cuanto a la segunda pregunta los cuatro equipos encuentran lo mismo y cabe destacar que esta propiedad de igualdad la observaron al realizar las primeras manipulaciones sobre la construcción. Este hecho nos sugiere que para futuras implementaciones de esta actividad se debe quitar esta parte y dejar que de manera libre exploren y encuentren diferentes propiedades sin que la actividad les vaya conduciendo a través de las preguntas o notas aclaratorias, que pueden resultar elementos que confundan.

4.3.2.8 Construcción de la elipse e hipérbola

A continuación se tenía previsto dejar una tarea de desafío (parte IV) que consistía en construir la representación dinámica y visual de la elipse y la hipérbola a partir de su definición. Sin embargo, al profesor le pareció que tardarían mucho en realizar estas construcción dado que en las construcciones previas en *Cabri* se tomaron más tiempo del previsto para la tarea. Por lo anterior decidió platicar la idea básica de la construcción de la elipse para luego darles tiempo y que ellos la realizaran y posteriormente trabajaran solos con la hipérbola.

Así, el profesor les proporciona la definición de elipse, como el *lugar geométrico de los puntos tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos, llamados focos, es una constante*, y una idea básica para su construcción que consiste en tener una cantidad constante o fija que en este caso será el radio de una circunferencia *c* de centro F_1 (un foco) y radio *FB', Q* un punto móvil de la circunferencia y F_2 un punto del radio *FB* siendo *P* el punto de intersección del segmento *AF* y de la mediatriz del segmento *AF*. Manipulando el punto *Q* que es móvil sobre la circunferencia *C* se describe el lugar geométrico del punto *P* que corresponde a la elipse.
Durante la construcción reflexiona junto con los alumnos sobre el porqué de cada trazo. Por ejemplo, mediante preguntas del tipo «¿cómo podemos tener una cantidad constante?» cuestionándoles hasta obtener la respuesta «radio de una circunferencia». Esta idea junto con la propiedad de la mediatriz fueron las ideas base para la construcción. Posteriormente, les deja un tiempo para que trabajen con *Cabri* tratando de construir ellos la elipse, para luego trabajar sobre la hipérbola.
Aunque la idea básica expuesta por el profesor fue breve, dos de los equipos fueron capaces de realizar la construcción y explicar los pasos, su respuesta se describe a continuación.

La idea principal en el diálogo del equipo **B** es tratar de reconstruir los pasos para materializar la elipse a partir de su definición como lugar geométrico. Como no nombran los elementos geométricos de la construcción al comunicarse entre ellos, no es claro por ejemplo a qué punto se refieren [7, 10, 12, 17, 18, 20, 30, 34, etc]. Este hecho les conduce al trazado de una trayectoria que no corresponde con la elipse [48-53]. El hecho de que la construcción sea dinámica y puedan explorar diferentes posiciones, les permite observar « que la distancia, cambia» y que la suma de sus distancias a dos puntos fijos, llamados focos, NO es una constante, como se requería (*B-acción*). Ver Figura 32.

Al darse cuenta que en la trayectoria la suma de las distancias del punto [*P*] a los focos no es constante revisan [53-72] la construcción notando (*R-acción*) que habían trazado mal la mediatriz [9-12] desde el punto [*Q*] sobre la circunferencia a uno de los focos [F_1 centro de la circunferencia], y deberían haber construido la mediatriz del punto sobre la circunferencia al otro foco [F_2]. No obstante, aunque tardaron en darse cuenta de dónde cometieron el error, siguieron sin etiquetar los elementos de la construcción como lo muestra su producción escrita y la figura 32.

[4] Ponle dos puntos en la recta, digo arbitrarios.
[5] Se dibuja una circunferencia con radio más grande que el diámetro [se refieren a la distancia entre los dos puntos] Con eso ya sabemos qué es más grande la circunferencia.
[7] Pero se dibuja con centro en alguno de esos puntos.
[8] Se traza una recta que pase por un punto en la circunferencia.
[9] Se traza una recta del centro al..¡Ah no! más bien, se traza la mediatriz del punto a la circunferencia.
[11] Sí. Del punto de la circunferencia a un punto.
[15] Se traza una recta ¡ay no!, no es cierto.
[16] Bueno, pues no especificamos en dónde.
[18] El radio tiene ser este ( ) si el centro es en ese, () en cualquiera de estos puntos [del centro a cualquier punto de la circunferencia].
[19] Sí ¿no? Ponle que hay un punto en el centro [asienten].
[23] Se traza una recta desde aquí…( ) más bien, () que pasa, ajá ¿? Entonces ponemos la recta.
[26] Le puedes poner que moverse ( ) en la trayectoria.
[27] ¿Moverse? Sí, ¿verdad? ¿Sí quería que lo hiciéramos así? Aquí esta recta y luego la mediatriz, así.
[30] Ajá. Y luego tenemos una recta que pasa por el punto [otro alumno señala y pregunta si es ahí].
[34] Y luego tenemos el punto principal.
[35] ¿Pasará por el otro punto? [muestran duda].
[37] No. Nada más que pase por acá también.
[39] ¡Ah ok! Ah, sí es cierto. Está entre esta por…¿? Desde acá.
[43] Por los dos focos.
[44] Desde esa. Es que lo estamos usando como eje, no como ¿?
[47] Ya oculta lo que no. Mueve el punto y con traza o lugar.
[49] ¡Ay no! No es la misma.
[51] No. A ver. Es que la distancia, cambia. Es que la suma de aquí a aquí y de aquí a aquí no es siempre la misma [muestran frustración y revisan].
[72] [Después de revisar los trazos realizados] Es que la mediatriz no se saca con el punto que es el centro [f_1] es con el otro [f_2].

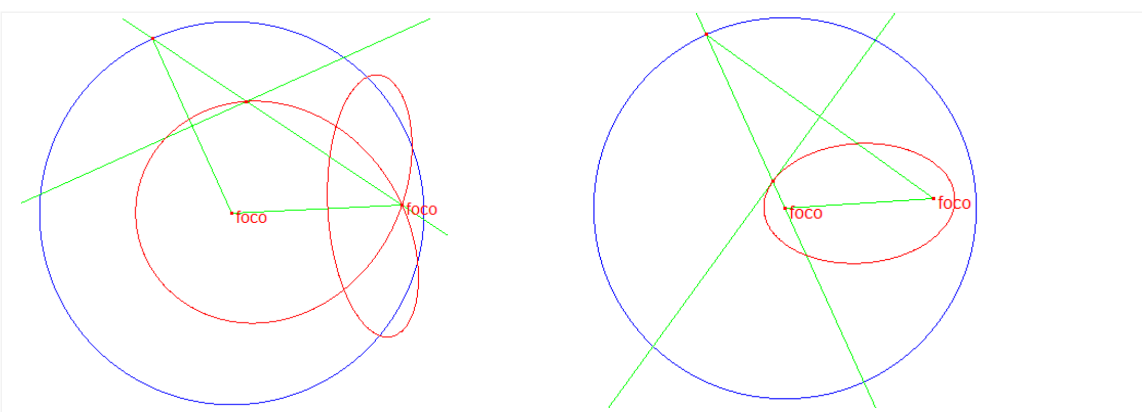
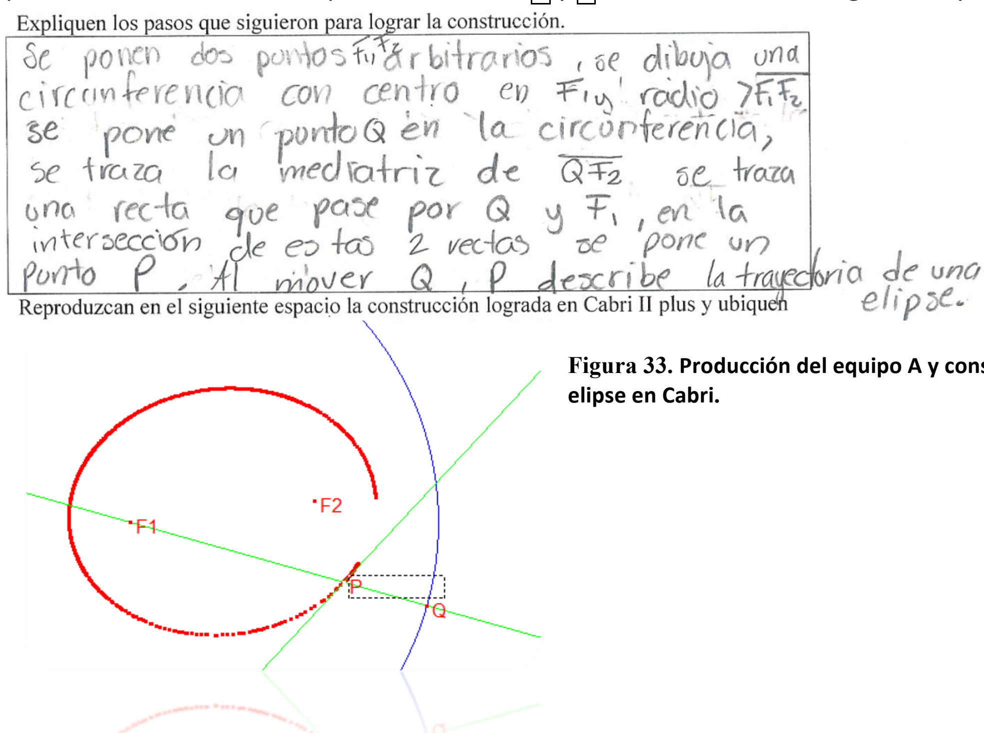


Figura 32. Primer intento para construcción de elipse y construcción final de la elipse en Cabri

Concentrado de respuestas construcción de la elipse

Los equipos $\boxed{C}$ y $\boxed{D}$ No escribieron los pasos para la construcción y realizaron la construcción sólo parcialmente en Cabri. Las producciones de $\boxed{A}$ y $\boxed{B}$ se muestran en las figuras 33 y 34.

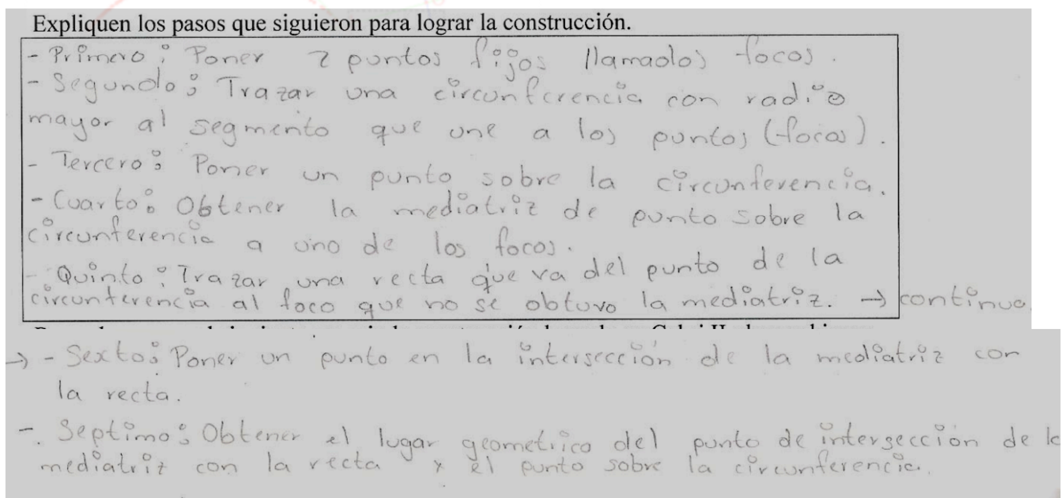


Expliquen los pasos que siguieron para lograr la construcción.

Se ponen dos puntos F_1 F_2 arbitrarios, se dibuja una circunferencia con centro en F_1 y radio $> \overline{F_1F_2}$, se pone un punto Q en la circunferencia, se traza la mediatriz de $\overline{QF_2}$, se traza una recta que pase por Q y F_1, en la intersección de estas 2 rectas se pone un punto P. Al mover Q, P describe la trayectoria de una elipse.

Reproduzcan en el siguiente espacio la construcción lograda en Cabri II plus y ubiquen

Figura 33. Producción del equipo A y construcción de la elipse en Cabri.



Expliquen los pasos que siguieron para lograr la construcción.

- Primero: Poner 2 puntos fijos llamados focos.
- Segundo: Trazar una circunferencia con radio mayor al segmento que une a los puntos (focos).
- Tercero: Poner un punto sobre la circunferencia.
- Cuarto: Obtener la mediatriz de punto sobre la circunferencia a uno de los focos.
- Quinto: Trazar una recta que va del punto de la circunferencia al foco que no se obtuvo la mediatriz. → continuo

→ - Sexto: Poner un punto en la intersección de la mediatriz con la recta.

- Septimo: Obtener el lugar geometrico del punto de intersección de la mediatriz con la recta y el punto sobre la circunferencia.

Figura 34. Producción del equipo B pasos para construir la elipse.

Reproduzcan en el siguiente espacio la construcción lograda en Cabri II plus y ubiquen los siguientes elementos de la elipse a partir de su descripción.

La línea que une los dos focos se llama eje principal de la elipse.

La mediatriz de los mismos eje secundario.

Se llaman vértices de la elipse a los puntos donde ésta corta a sus ejes.

El punto medio de los dos focos se llama centro de la elipse y la distancia entre ellos se llama distancia focal. Las respuestas del equipo A y B se muestran en las figuras 35 y 36.

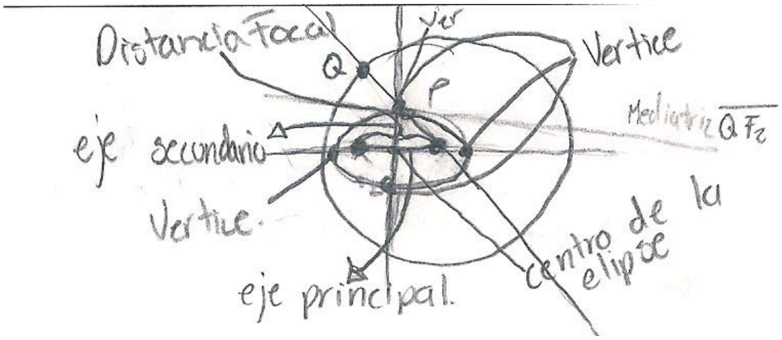


Figura 35. Dibujo de la construcción de elementos de la elipse por el equipo A.

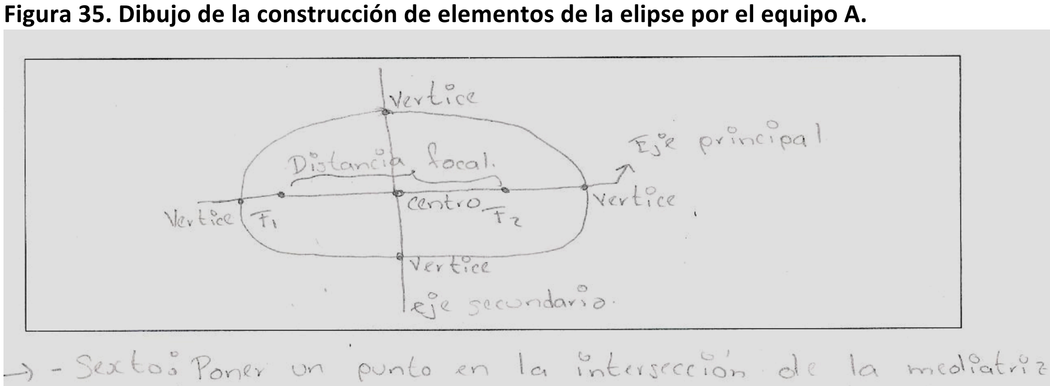


Figura 36. Dibujo con los elementos de la elipse producción del equipo B.

La siguiente parte de la tarea de desafío era construir la hipérbola a partir de la definición: *Se llama hipérbola al lugar geométrico de los puntos del plano tales que la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos, llamados focos, es una constante (se representa por 2a).* Se les pedía que explicaran los pasos para lograr la construcción.
Al igual que en la construcción de la elipse, los equipos **C** y **D** no concretaron esta parte.

En el equipo **A**, se aprecia como emprenden la tarea de construir la hipérbola a partir de extraer información de su definición como lugar geométrico.
Comienzan dibujando los dos puntos fijos, focos [50], luego extraen que la característica de los puntos que están en el lugar geométrico [52-54] solicitado es «que la diferencia de sus distancias hasta estos [puntos fijos]» debe ser constante y vinculando este hecho con la construcción previa de la elipse realizan las asociaciones, *B-acciones,* siguientes: Cantidad constante con radio de una circunferencia [55 y 86]; La "suma de las distancias a los focos" (constante) con que el radio de la circunferencia sea mayor que la distancia entre focos [64 y 86]; y diferencia de las distancias con que el radio de la circunferencia sea menor que la distancia entre focos [63 y 87-89].
En esta parte cabe destacar que en la construcción de la hipérbola se perciben *R-acciones* que dan cuenta de la influencia del trabajo previo realizado con la definición de mediatriz, la construcción de la parábola, la extracción de significado tanto del concepto de mediatriz como de la construcción de la parábola para elaborar las definiciones de lugar geométrico y parábola, el trabajo de socialización en gran grupo y finalmente la construcción de la elipse a partir de la definición. Las tareas previas mencionadas han permitido que se extraiga significado de la definición de hipérbola para realizar con éxito su representación.

[50] Dibujamos dos puntos aquí.
[51] Bueno, pero nosotros no sabemos como se hace.

[70] ¿Una recta? [asiente otro estudiante] Es una recta. Quítala y pónla aquí.
[76] No acá. ¿No puedes mover este para bajarlo?

[52] Así nada más decimos qué características tiene.
[53] Tales que la diferencia de su distancia hasta estos [extraen información de la definición].
[54] Pues la sacamos … ( ) constante ((Pva)).
[55] Con la circunferencia menor.
[56] La diferencia entre este y este …¿? // ¿Y eso no? Y luego… No, (Mm) … Se me hace que ..¿?
[63] Por qué te acercas… [se acerca a uno de los focos, centro de la circunferencia, buscando que el radio de la circunferencia sea menor que la distancia entre los focos].
[64] En el otro es la suma [la cantidad constante en la construcción de la elipse]. La circunferencia de foco 1 [con centro en el foco 1], de que esto debe de ser igual a este segmento más este, ¡ah ya sé! tenemos que ver que la distancia de este punto al foco tienen que ser igual a () sí, la distancia de este hasta aquí tiene que ser igual a esto.
[66] No o ¿sí? ( ) No porque mira // [Otro alumno trata de convencerlo] Sí, porque ve la circunferencia.
[68] No. Es que el punto no es.
[69] Mira. Es que fíjate en esto para que veas su comportamiento ¿?
[78] Mira. Ahí se ve otra vez fuera.
[79] A ver ponle otro. Y luego este ¡Sácalo!
[82] ¿No se puede verdad? No vamos a poder hacer eso. A ver. Sácalo…
[85] Y nos dio el radio menor o igual… o sería el radio mayor o igual a f_1 en la distancia.
[86] La distancia del círculo era el lugar geométrico. Tenía la misma distancia a un punto. Y luego ahora tomamos un punto porque dice que la suma de la aquí y aqui es la misma [regresa a la elipse].
[87] Ah sí. Pero como es la suma, tiene que ser un pedacito más otro pedacito, es más grande. Cómo es la hipérbola es más chica [la circunferencia auxiliar debe ser de radio menor a la distancia entre focos].
[89] Entonces debe ser igual la resta. Por eso trazamos una circunferencia menor. Este menos este es el radio [señala las distancias del punto *P* a los focos].
[92] Ajá. Este con este. Ponle.
[96] La distancia de aquí a aquí menos…¿?
[97] Es de aquí a *f* [complementan] Es el centro de… Ah sí, sí.

A continuación identifican (*R-acciones*) los principales elementos [100-105] y tratan de verificar (*B-acciones*) que el punto *P* cumple con la propiedad requerida [106]. Para ello proponen tres estrategias: 1) sobreponiendo vectores para calcular la diferencia utilizando el método del triángulo o del paralelogramo [*B-acciones* 110-112]; 2) Conociendo las coordenadas de los puntos para poder calcular las distancias con la fórmula correspondiente [B-acciones 115-116]; y 3) utilizando en *Cabri*, *distancia y longitud* y *calcular.* Finalmente deciden utilizar la tercera opción.
En [127-133], mediante una *C-acción,* descubren que el punto *P* cumple con la propiedad de que la diferencia entre las distancias a los focos es igual al radio de la circunferencia [2.47] y por tanto es una cantidad constante y con esto dan por concluida la tarea, ocultando los trazos que no son necesarios. Hay que hacer notar que para ellos era importante verificar la propiedad de punto *P* más que visualizar la trayectoria que define con ayuda de las herramientas del software, *traza* y/o *lugar geométrico*.

[100] Entonces, pues ya lo terminamos. También se ponen los puntos fijos.
[103] ¿De dónde es el radio? [le contestan] De aquí a aquí.
[105] Entonces aquí ¿cómo le pongo?
[106] La distancia del punto fijo al punto *P*, el punto que se mueve. Este menos la distancia del punto.
[107] Ah sí, ajá ese [otro estudiante] A ver. Ya sé. Ponle un valor a este.
[110] Ponle un vector *f* aquí, y luego así.
[112] Ahora pónlo aquí.
[113] Ah del punto… a este. Pero es que tenemos que..
[119] ¡Ay no! quita este punto. Sí. Y luego quita el otro que tienes aquí abajo y luego este punto también.
[120] (Mm) si mueves este punto, este punto y este punto me da la distancia de aquí a aquí ¿verdad? ¬, vamos a ponerlo más bonito ¿?
[121] Espérate. Deja. Le pongo en uno para que salga.
[122] ¡Ay no! Estaba bien ahí.
[123] Mejor en otro.
[126] Es que…¿? No. Y no puede sacar aquí la distancia.
[127] La distancia es…[mide distancias y calcula su

[115] A ver ponle aquí… con *coordenadas*…¿?
[116] No, del otro punto [otro alumno sigue la indicación y responde] Ahí está ¿Y luego qué?
diferencia con ayuda de Cabri] ¿cuál es el radio?
[128] Es 1. No, es 2.47.
[129] Ajá, entonces. Sí es verdad ¡Ah sí! Esto va a quedar entonces así ¿verdad?

Al tratar de escribir los pasos para describir el procedimiento que siguieron para la construcción de la hipérbola organizan sus ideas clarificando la tarea y el proceso mediante el cual fue resuelta.
Esta revisión de los pasos da lugar a ciertas exploraciones y a generar situaciones del tipo "que sucedería si", como vemos en [156]. Qué sucedería si el radio de la circunferencia auxiliar fuera igual a la distancia entre los focos. Esto surge durante la discusión como una necesidad de cubrir todas las posibilidades para consolidar lo aprendido (***C***-*acciones*), dado que ya se tiene que: cuando el radio es mayor apoya la construcción de la elipse y cuando es menor la de la hipérbola [156] y cuando es igual da lugar a un punto; que corresponde al centro de la circunferencia [158].
A la par que se retoman los pasos que se siguieron para la construcción, van repitiendo el procedimiento mostrando dominio sobre la construcción al buscar un acomodo para una mejor visualización identificando puntos libres y dependientes [166, 168, 169, 171, 175].
Finalmente, visualizan la trayectoria [184] y concluyen el listado de los pasos para realizar la construcción.

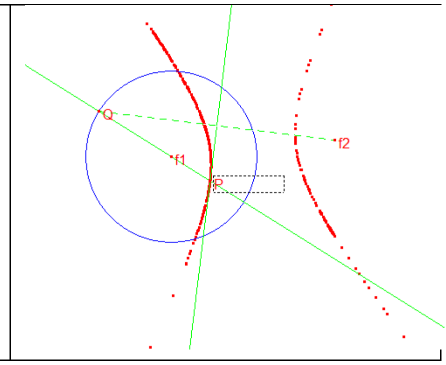
[143] Ponga los pasos para hacer la construcción [leen] Ponemos dos puntos cualesquiera y su distancia.
[144] Ah, se ponen dos puntos arbitrarios f_1 , f_2. Trazas una circunferencia ¿verdad? Es como la suma.
[145] Este es un punto y el otro se traslada al final de este.
[146] Entonces, sí es por eso, la circunferencia es menor.
[147] Es como si tuviéramos los dos y este lo trasladaramos al final del otro.
[148] Ajá. Mira. Pero aquí tenemos ( ) y si este lo movemos acá… ¿?
[150] (Mm) No. Es que así, por qué no acepta a los dos.
[152] No mira… dentro de la circunferencia.
[153] Y este lo ponemos aquí.
[154] Ajá, una circunferencia menor o igual que…
[156] ¿Y cuando el radio es igual? [qué pasa si el radio es igual a la distancia entre focos].
[157] Va a seguir siendo la misma.
[158] No. Es un punto [se refiere a que si el radio de la circunferencia es igual a la distancia entre los focos se obtiene solo un punto, el centro (1 foco)].
[159] Ajá. A ver. Y luego tomas la distancia a este punto. Sí distancia de este punto a este punto. Y luego…
[162] Se saca la mediatriz. ¡Ah no! Se pone un punto en la circunferencia.
[163] ¿Dónde sea? [otro estudiante lo corrige] No. En la circunferencia.
[166] Ya ves que hay que intersectarlo con la recta ¿verdad?. Porque mira. Ay pero se me hace que no se puede. Mira ¿No le puedes mover un poco para arriba para que se vean los puntos? Agarra a este.
[168] No quiere. Y luego se mueve acá para que el punto *P* quede de ese lado.
[169] Ah sí. Aquí está. Y luego acerca ese. El otro no se puede [porque es dependiente el punto *P*].
[171] No. Este te pasa para acá.
[173] Marca esta trayectoria nada más [complementa otro alumno] ¿? Cuando está aquí, este se va allá.
[175] Mira. Muévele y luego hazle tantito para acá.
[176] Yo pensé que lo íbamos a hacer así.
[177] No. Pasa este por la intersección.
[179] Ajá. Y luego. ¿Y luego qué? [contesta un estudiante] Donde *P* traza el recorrido de *Q.*
[181] ¿Ya le pusiste donde pasa la recta? ¿el punto en la recta?
[182] Sí. Se traza una recta *l* que pasa por el punto *Q* y F_1. Se marca por el punto de salida en la intersección la mediatriz de *Q y l.*
[184] Cuando se mueve el punto *Q* [sobre la circunferencia] se traza la hipérbola [asienten].
[186] Sí. Más grande, verdad? Este es el punto *P.*

Las producciones escritas de **A** y **B** se muestran en las figuras 37 y 38.

*Pasos para la construcción equipo **A***	*Archivo en CABRI equipo **A***

Figura 37. Construcción de la hipérbola por el equipo A

Se ponen 2 puntos arbitrarios F_1 y F_2 se traza una circunferencia con centro F_1 y radio $< \overline{F_1F_2}$ se pone un punto Q en la circunferencia, se traza la mediatriz del segmento $\overline{QF_2}$. Se traza una recta L que pasa por el punto Q y el punto F_1. Se marca el punto P en la intersección de la mediatriz de $\overline{QF_2}$ y L. Al moverse el punto Q se describe la trayectoria de la hipérbola.



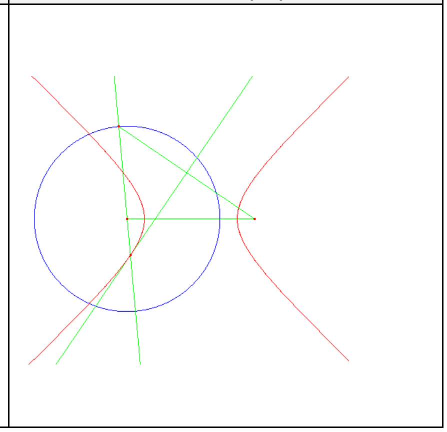
Pasos para la construcción equipo **B**	Archivo en Cabri equipo **B**
- Primero: Poner dos puntos fijos. - Segundo: Trazar una circunferencia con radio menor al segmento que une los dos puntos. - Tercero: Poner un punto sobre la circunferencia. - Cuarto: Obtener la mediatriz del punto sobre la circunferencia al punto fijo que esta fuera de ella. - Quinto: Trazar una recta que va del punto sobre la circunferencia al punto que quedó como centro de la circunferencia - Sexto: Poner un punto en la intersección de la mediatriz y la recta. - Septimo: Obtener el lugar geométrico del punto de intersección de la mediatriz con la recta y el punto sobre la circunferencia.	

Figura 38. Construcción de la hipérbola en el equipo B

Se les pide que reproduzcan la construcción y ubiquen los siguientes elementos de la hipérbola a partir de su descripción: 1) La recta que une los dos focos se llama eje real de la hipérbola, 2) La mediatriz se llama eje imaginario de la hipérbola, 3) El punto donde se cortan ambos ejes (que es el punto medio de los focos) se llama centro de la hipérbola, 4) Los puntos donde la hipérbola corta a los ejes se llaman vértices de la hipérbola y 5) Al igual que en la elipse, se llama distancia focal a la distancia entre los dos focos y a las distancias desde un punto cualquiera de la hipérbola a ambos focos se les llama radios vectores del punto.

Las respuestas de los equipos **A** y **B** correspondientes se muestran a continuación:

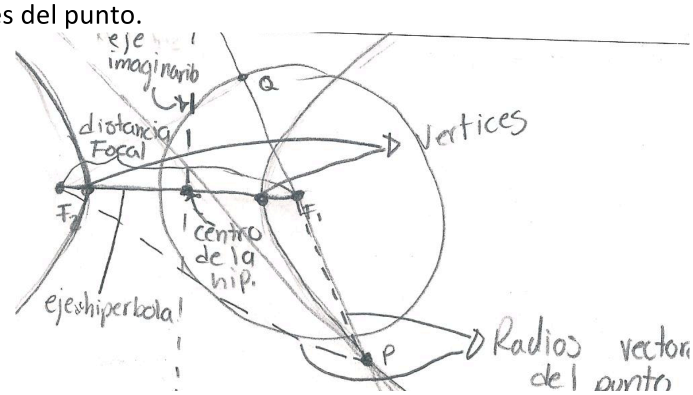


Figura 39. Los elementos de la hipérbola, producción del equipo A.

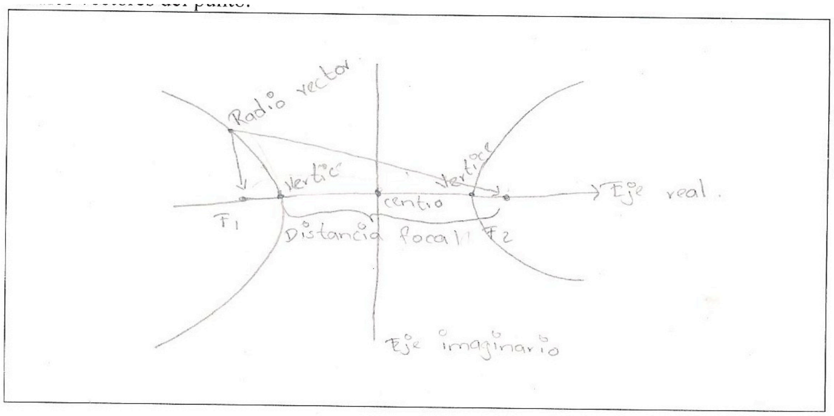


Figura 40. Elementos de la hipérbola, producción equipo B.

4.4 Análisis del bloque II

El bloque II se organizó en cuatro sesiones. En la primera se realizó la hoja 3, en la segunda y tercera sesión se trabajó sobre la hoja 4 y por último en la cuarta se tenía la hoja de trabajo 5 que guiaba la sesión. Los tópicos desarrollados, con la intención de construirlos y soportar con ellos posteriormente el proceso de la demostración matemática, fueron sobre proposiciones (hoja 3), conectivos lógicos (hoja 4) y manejo de ejemplos y contraejemplos (hoja 5). En el desarrollo de las sesiones participaron sólo ocho de los estudiantes que trabajaron el bloque anterior, debido a que la ingeniería fue aplicada en sesiones extraordinarias y al finalizar el semestre únicamente se quedaron aquellos alumnos que vivían en la ciudad de Durango. Los estudiantes fueron organizados en dos equipos.

Al igual que en el bloque anterior, el análisis de las tareas se organiza, primero con la interacción en pequeños grupos, luego se presenta la interacción en gran grupo o socialización de respuestas guiada por el profesor y finalmente un concentrado de respuestas. Este orden se sigue en la mayoría de las sesiones a menos que se considere que uno de los momentos ya se refleja o incluye en otro. De la misma manera que antes, la herramienta teórica para el análisis que hemos utilizado es el modelo de *AiC* y en las interacciones en gran grupo en ocasiones consideramos pertinente realizar algún comentario sobre los movimientos en el discurso que dirige el profesor para lograr avanzar en el proceso de abstracción.

Cuando se da una *C-acción* en ocasiones la denotaremos como $\boldsymbol{C_i}$, específicamente en el caso de la hoja 3, dado que presentaremos un análisis que nos permitirá mostrar el carácter de anidación de acciones ocurridas durante el proceso de abstracción.

A continuación se presenta el análisis de la sesión correspondiente al tópico de proposiciones matemáticas.

4.4.1 Proposiciones matemáticas

En este apartado se analiza la primera sesión del segundo bloque (hoja 3) que duró poco más de una hora y corresponde a la construcción de la definición correspondiente a proposiciones matemáticas a través de tareas realizadas en pequeños grupos, a identificarlas y a discutir y argumentar acerca de su valor de verdad. Cabe mencionar que los estudiantes, durante un semestre, han trabajado la matemática basada en presentación de definiciones, enunciados de proposiciones y teoremas, algunos acompañados de su demostración, junto con ejercicios donde se aplican los conocimientos adquiridos. Sin embargo, no hay evidencia en sus apuntes que muestre alguna explicación sobre lo qué es una proposición, cómo identificarla y menos cómo demostrarla. Más bien, a lo largo del camino, después de haber visto diferentes enunciados y demostraciones poco a poco se van haciendo una idea de estas cuestiones.

4.4.1.1 Análisis de definir proposiciones matemáticas

En esta primera parte el objetivo era reconocer una proposición matemática y sus componentes, destacando que lo característico y fundamental es su valor de verdad o falsedad. La consigna era comentar en pequeños grupos *qué es una proposición matemática* y una vez que estuvieran de acuerdo escribieran su definición.

En el análisis en pequeño grupo seguimos la interacción en el equipo **B**. Para definir una proposición matemática. Ellos hacen referencia a "las propiedades" que se incluyen en el enunciado, a la posibilidad de que sean "afirmativas o negativas" (en un sentido excluyente, con la idea de que sean *V* o *F*) y a la existencia de una relación (=, ≠, ≥, ≤, <, >, etc.) en el enunciado. Esta definición fue negociada y construida a partir de ejemplos específicos. Inicialmente las acciones son de reconocimiento (*R-acciones*) de las características de esos enunciados por similitud con otros que ya han manejado.

[3] [Una proposición] Es una ecuación, ¿no?
[4] Es una oración [otro estudiante apoya esta idea] De hecho una oración porque una ecuación no es.
[6] Es una oración que puedes poner con falso o verdadero, por ejemplo, una pregunta …
[7] A ver. No. Afirmación sí es.
[13] Donde afirman o niegan algo [asiente su equipo].

En este reconocimiento surgen ciertas palabras en el diálogo: ecuación [3], oración [4, 5, 6], pregunta [6], afirmación o negación [7, 13, 15, 16, 17, 18], propiedad [18, 19, 20, 21, 26, 30] que se transforman en *B-acciones* cuando van afianzando el significado de esas nociones.

[15] Más bien ¿no?, no es una pregunta, más bien es una afirmación o una negación.
[16] (Mmh) entonces que le ponemos. Es el enunciado donde afirma, o…( ).
[17] Que puede ser afirmativo o negativo.
[18] Sí, pero ¿qué afirma y qué niega?, ¿una propiedad?
[19] ¿Por qué propiedad?
[20] Siempre para afirmar los enunciados va a tener "este es tal" o "no es así", o "debe ser así", sí ¿no?
[21] […]enunciado que tiene algunas propiedades o condiciones que pueden ser afirmativas y negativas.
[22] ¿Y negativas?
[23] ¿Sí? // Sí [responden sus compañeros y otro los cuestiona].
[26] Más bien enuncia propiedades afirmativas o negativas, enuncia …
[28] Pero, es que, () más bien [proposición] matemática.
[30] Que es un enunciado. Ponle es un enunciado cuyas propiedades son positivas o negativas, afirmativas o negativas.

La transformación de *R-acciones* en *B-acciones* se produce cuando los alumnos van poniendo en práctica el significado de los términos que utilizan y los van aplicando en los diferentes ítems. Por ejemplo, en [17] se indica de un enunciado «que puede ser afirmativo o negativo» y esto se utiliza en [18] para profundizar en esta idea, aunque esta *B-acción* sucede entendiendo de manera peculiar las palabras "afirmación y negación". En [17] se están considerando como valor de verdad y en [18] en la forma de presentar el enunciado. Esto se va repitiendo en otros momentos del diálogo; unas veces en relación con el significado estricto de las palabras y la forma de presentar el enunciado [13], [16], [18] o [20]; y otros momentos, en el sentido del valor de verdad del

enunciado, es decir como sinónimos de V y F [17, 21, 26 y 30]. Finalmente se detiene la discusión en: «enunciado cuyas propiedades son afirmativas o negativas».
Más adelante, enfocados en la tarea de distinguir proposiciones matemáticas de una lista dada, se percibe una *B-acción* para complementar su producción escrita especificando que en las proposiciones que son verdaderas, se maneja una relación entre dos oraciones [57]. Luego, podemos decir que [30 y 57] constituyen la *C-acción* que muestra la producción convenida en el equipo y más adelante en la interacción en gran grupo veremos como es extendida.

[57] Que ahorita le podríamos poner, especificar, que en las que son verdaderas [son proposiciones] se maneja una relación entre dos, dos pequeñas oraciones ¿no? Por ejemplo, aquí hay una oración.

Finalmente las respuestas negociadas en los equipos **A** y **B** que aparecen en los registros escritos fueron: $\boxed{\text{A}}$ «Es un enunciado que se considera V o F, más sin embargo necesita de una demostración». $\boxed{\text{B}}$ «Enunciado cuyas propiedades pueden ser afirmativas o negativas. Hay una relación entre dos elementos».

En la respuesta del equipo **A** encontramos los rasgos esenciales de una proposición matemática, es decir que puede ser *V* o *F* (sentido excluyente) y que para sustentar dicho valor es necesario presentar una demostración.
En el equipo **B** se centran "propiedades" que se incluyan en el enunciado y en la posibilidad de que sean "afirmativas o negativas" (en el sentido excluyente y entendiendo como *V* o *F*). Para ellos es importante la presencia de una relación (e.g. $=, \neq, >, <$) en el enunciado y como vimos en la interacción esta definición ha sido negociada y construida a partir de ejemplos específicos.

En la interacción en gran grupo se muestra que los alumnos han identificado tres aspectos en la definición de proposición que van a permitir *C-acciones*: que hace referencia a una propiedad, que puede ser afirmativa o negativa (en el sentido de V o F) y debe incluir una relación entre dos elementos. Al compartir las respuestas del trabajo en pequeños grupos, durante la socialización mediada por el profesor, se produce una *C-acción* [71 a] C_0. En relación a la actuación del profesor como guía en la construcción se perciben intervenciones que motivan la participación de los estudiantes [67]. En [71a] concentra todas las participaciones de los estudiantes [68, 69 y 70] y les da forma para señalar cuando un enunciado es proposición matemática y cuando no lo es.

[67] Profesor: …¿Qué entienden por proposición matemática?, ¿Qué entienden?¬
[68] Alumnos: …puede ser un enunciado que tiene algunas propiedades que pueden ser positivas, *F* o *V*.
[69] As: falsas o verdaderas.
[70] As: Es un enunciado que se considera V o F, más sin embargo necesita de una demostración.
[71a] P: Entonces, aquí lo primordial es que tiene que ser una afirmación o un enunciado y que nosotros tenemos que determinar si es falso o verdadero. Cuando no podemos determinar si es F o V no es una proposición matemática.

4.4.1.2 Análisis de identificar proposiciones matemáticas

En esta tarea se les proporcionan seis enunciados y primero deben decidir cuáles son proposiciones matemáticas, explicar por qué y escribir sus respuestas en la hoja de registro de la sesión para posteriormente compartir sus respuestas en gran grupo. Los enunciados fueron:
1) $ax^2+bx+c=0$ 2) $[-b+\sqrt{}(b^2-4ac)]/2a$
3) Los triángulos *XYZ* y *RST* son semejantes 4) $3+n+n^2$

5) *sen* $\pi/2 < sen\ \pi/4$ 6) Para todo ángulo *t*, $sen^2\ t + cos^2\ t = 1$

En la interacción en pequeño grupo, el equipo **B**, usa la definición de proposición negociada durante la tarea anterior, «*Enunciado cuyas propiedades pueden ser afirmativas o negativas»,* para identificar entre el listado, cuáles son proposiciones matemáticas.
Inicialmente se perciben *R-acciones*, cuando los estudiantes reconocen que el hecho de tener una "propiedad", por ejemplo, la igualdad a cero [35 y 38] permite decidir si el "enunciado" es F o V, aunque no se fijan en que los parámetros *a*, *b* y *c* de la ecuación $ax^2+bx+c=0$ no tienen valores numéricos y no se puede decidir el valor de verdad.

[33] Esta porque está afirmando que es igual a cero ¿verdad? [$ax^2+bx+c=0$].
[34] Bueno no necesariamente porque está afirmando, sino porque puede ser cierto. Porque puede ser afirmativo o negativo.
[35] Bueno sí. Pero nos está dando una propiedad. Pues esto es igual a cero.
[36] Nos está dando la opción de que sea () algo.
[38] Sí, ajá, es qué: *ax* cuadrada más *bx* más *c* igual a cero.

Aplican la *R-acción* anterior para construir el concepto y poder decidir, de manera acertada, en otros enunciados, cuáles son proposiciones y cuáles no. Para ello utilizan como argumento [ítems 2 y 4] que no se puede decidir su valor de verdad ya que carecen de signo de igualdad y de otra expresión o número para "comparar".

[39] Y puede ser que se cumpla o que no se cumpla, ya dependiendo de cómo sea, afirmativo o negativo. Pero por ejemplo, esta no, en sí no me dice nada, nada más me dice $-b$ … [Ejercicio 2: $[-b+\sqrt{(b^2-4ac)}]/2a$].
[40] Es una ecuación (sic) [expresión] y ya.
[46] También, explique el por qué de sus respuestas [leen]. Aquí, porque la ecuación [$ax^2+bx+c=0$] una propiedad de la ecuación es igual a 0, puede ser igual a 0 nada más, sí. Y luego ésta porque sólo nos da la ecuación (sic) [expresión] y ya [2].
[47] Ajá, en esta ecuación (sic) [expresión] no hay nada qué afirmar o qué negar [2].
[48] En esta [2] o en esta [$3+n+n^2$].
[51] Este. No hay algo que me permita decir que es falsa o es verdadera [$3+n+n^2$].

En relación al lenguaje utilizado observamos que el sentido de las palabras afirmativo y negativo lo usan para indicar *V* o *F*. Sin embargo, *afirmar*, es asegurar o dar por cierto algo, y no necesariamente significa que sea V, al igual que negar no significa que sea una proposición F. Siguiendo la línea de la interacción, podemos apreciar en [34, 39 y 51] que de manera progresiva se da una mejora en la precisión del lenguaje utilizado por los estudiantes a lo largo del proceso de construcción del concepto. A continuación se produce un cambio en el contexto pasando éste a ser geométrico, realizándose una *B-acción* para decidir que «puede ser falso o verdadero».

[42] Ajá, y luego esta, porque nos está dando una propiedad [Los triángulos *XYZ* y *RST* son semejantes].
[43] Ahí está diciendo que son semejantes, pero puede ser falso o verdadero.

Para tomar una decisión adecuada en relación con este enunciado, se percibe una *R-acción* correspondiente a reconocer que es necesario saber de qué triángulos se está hablando para tomar una decisión [44]. Esto produce un crecimiento en la comprensión del concepto.

[44] Sí, dependiendo de quienes sean [los triángulos] Ésta pues me está diciendo …
[45] Igual se cumple y de esta manera también.
[49] Mmh. Igualmente esta proposición puede ser para todo ¿no?
[50] Ah, la propiedad del triángulo ¿no? [3], y luego esta, lo mismo ¿no?

Este es un componente importante para la emergencia del nuevo constructo, aunque todavía se perciba frágil ya que, se reconoce que el enunciado en juego es una proposición.
A continuación, en la siguiente proposición están de acuerdo en que es proposición matemática, utilizando una *B-acción*, que se da al tener en cuenta que la relación (<) les permite decidir si es *F* o *V* el enunciado.

[52] En esta sí ¿verdad? Pues es que, esta [$sen\ \pi/2 < sen\ \pi/4$] sí es cierto [sí es proposición matemática].
[53] Sí, esa sí es una proposición.

[54] La proposición de la ecuación, más bien, propiedad de la ecuación, es verdadera [sí es proposición matemática], ¿así, no?, no verdad porque..( ).
[55] (Mm)… si quieres. No. Bueno.

Las *R-acciones* se están transformando al formar parte de *B-acciones* por la puesta en práctica de las construcciones realizadas en los diferentes ítems. Además, esta construcción les permite reconocer que para que haya una proposición matemática se necesita la presencia de una relación [57], aunque se producen algunas confusiones, por ejemplo cuando consideran que la desigualdad que están manejando es una ecuación.

[57] [retornar y complementar la definición de proposición matemática] Que ahorita le podríamos poner, especificar, que en las que son *V* [son proposiciones] se maneja una relación entre dos pequeñas oraciones ¿no? Por ejemplo, aquí hay una oración [$sen\ \pi/2 < sen\ \pi/4$].

[58] Una ecuación y aquí hay otra ecuación [$sen\ \pi/2 < sen\ \pi/4$].
[59] Ajá. Hay una relación [<] entre dos que es la que puede, con la que se puede decidir [si es F o V].
[60] Entre dos elementos ¿no? [asienten].

Aplican esa *B-acción* en la siguiente proposición considerando que «es una propiedad» [63] que ya habían reconocido en [35].

[62] Ajá, y luego para todo [ángulo *t*, $sen^2t+cos^2t=1$].
[63] Ah ésta es una propiedad.

[64] Y ya. ¿Esa y ya? Aquí hay una afirmación [se reconoce como proposición matemática verdadera].

En la interacción en gran grupo, para la emergencia de un nuevo constructo, es decir, cómo decidir cuándo se tiene una *proposición matemática* (segunda etapa en el proceso AiC), los estudiantes ayudados por el profesor y por el trabajo previo reconocen (*R-acciones*) la importancia de poder decidir el valor de verdad del enunciado [73-75] para decidir si es o no proposición. Ensayan *B-acciones* [75-77] y se produce una *C-acción*, C_1 en [77] cuando nos encontramos por primera vez que se dan cuenta de que deben tener la posibilidad de decidir si es F o V el enunciado. Aquí es utilizado el criterio de manera completa y adecuada (véase la interacción en el equipo B fragmento 42-44, p. 236) para decidir si tienen una proposición matemática, sin que esto signifique que el constructo haya sido totalmente asumido puesto que aún es frágil y depende del ejemplo específico.
En relación a la participación del profesor, en [73] encontramos que para solicitar evidencia reestructura la pregunta ¿es proposición matemática? por ¿pueden determinar si es F o V? Esta pregunta es generadora de participaciones focalizadas y razonadas [74-77] entre los alumnos y deriva en la respuesta correcta.

[71b] Profesor: Aquí tenemos un conjunto de proposiciones, todas son proposiciones, pero la idea es decir cuáles

[75] As: Sí//, dependiendo de los valores de *a, b* y, 76- ¿Tenemos valores?
[77] As: No tenemos valores [otro estudiante] ¡Ah, entonces

son proposiciones matemáticas. La 1) [$ax^2+bx+c=0$] Es o no es.
[72] Alumnos: Sí es, según nosotros.
[73] P: Pueden determinar si es *F* o *V?*.
no es!
[79] P: ¿No podemos decir que es *F* o *V*? [responden los alumnos que no].
[81a] P: Entonces no es proposición matemática.

En la interacción vemos como la intervención del profesor [81b], frena la utilización de la *C-acción* en un ejercicio diferente y, aunque la respuesta de un estudiante [82] es correcta, no hay un indicador de crecimiento en la comprensión y uso del constructo en nuevos contextos.

[81b] Maestro: Esta [2: $[-b+\sqrt{(b^2-4ac)}]/2a$] podemos decir que es proposición matemática¬. La 2, es una afirmación, no es ni siquiera una igualdad y no tenemos valores.
[82] Alumnos: No es proposición matemática.

En el ítem 3 (Los triángulos *XYZ* y *RST* son semejantes), se produce una C_2*-acción* derivada de C_1 al aplicarla a un contexto geométrico. Aquí se aprecia el carácter anidado del modelo RBC para comprender la abstracción matemática.

[83] Profesor: La que sigue [3] *los triángulos*…[*XYZ y RST son semejantes*] es proposición matemática ( ) ¿Cuándo sería proposición matemática?
[84] Alumnos: Cuando supiéramos los triángulos.
[85] As: No tenemos valores.
[86] As: ¡Ah sí, no es proposición matemática!

Más adelante nos encontramos con *C-acciones* C_3 en [87-88], C_4 en [89-91] y C_5 en [94-95] en las que, además, los estudiantes expresan cuál sería el valor de verdad de esas proposiciones. Este hecho muestra inmediatez, evidencia personal y confianza que son rasgos que pueden indicar consolidación del nuevo constructo (Dreyfus & Tsamir, 2004), lo que convierte al modelo en RBC-**C** con la última **C** entendida como consolidación.
En cuanto al profesor en [90] vemos cómo al validar la respuesta [89] que ofrece un estudiante de que *sen π/2 <sen π/4* sí es proposición matemática, él modifica la pregunta a ¿podemos determinar si es *F* o *V*? y esto propicia que se encuentre el valor de verdad de la proposición (*F*). En [92] rescata los puntos importantes y esto propicia que en [94-95], los alumnos además de responder que sí es proposición matemática, asignen valor de verdad.

[87] Profesor: [intentan corregir su hoja de trabajo] No corrijan, no es necesario, dejen lo escrito. La que sigue [$3+n+n^2$] podemos determinar¬.
[88] Alumnos: Tampoco.
[89] P: La 5 [*sen π/2 <sen π/4* , los alumnos responden convencidos que sí es proposición].
[90] P: Podemos determinar si es *F* o *V*
[91] As: Sí, es falso.
[92] P: Entonces es necesario determinar si es *F* o *V*. No importa si es *F*. Muchas veces se piensa que si fuera *F* entonces no es proposición. Pero no, es proposición matemática si es *F* o si es *V*.
[93] P: La 6 entonces dice [lee], para todo ángulo *t*, $\text{sen}^2\, t+\cos^2 t=1$.
[94-95] As: Sí es// Es una proposición cierta.
[96] P: De hecho esas cuando suceden se llaman identidades. Una cosa es ecuación y otra identidad. Por ejemplo la 1 es una ecuación, si supiéramos los valores de *a, b, c*, entonces para ciertos valores sería V, pero en una identidad como en 6 todos los valores que tome *t* cumplen y es identidad.

En C_5, respecto al cuantificador asociado a los valores de *t*, se ha entendido que se tiene una proposición que se cumple para cualquier valor de *t*. En [96] el profesor, aprovecha la proposición que están tratando, para ampliar el conocimiento con la noción de identidad.

En cuanto al registro escrito, que aparece en la tabla 28, p. 211, podemos extraer que ambos equipos coinciden en identificar como ejemplos de proposiciones matemáticas a 3 y 6 y como no ejemplos a 2 y 4. La justificación de **A** para considerar que [3] *los triángulos XYZ y RST son semejantes* y [6] *para todo ángulo t*, $\text{sen}^2\, t+\cos^2\, t=1$ son proposiciones, es que "se cree *V*" (se presenta como afirmación), pero se considera importante verificar que lo sea. En la definición ellos habían destacado que para que sea proposición, puede ser *F* o *V* pero se requiere demostrarlo. De la misma manera, **B** sustenta su elección en el hecho de que puede ser *F* o *V*. Para ambos se percibe que no han necesitado de un diagrama o de conocer las características de los triángulos (que intencionalmente no fueron incluidas en el enunciado) para tomar su decisión. En relación a la identidad trigonométrica presentada en 6), *para todo ángulo t*, $sen^2\ t+cos^2\ t=1$, para **B,** el hecho de saber que se trata de un enunciado *V* los lleva a decidir que es proposición.

El equipo **A** en la definición de proposición hablan de que es un enunciado que "se considera" *F* o *V* y necesita probarse. Aquí, para su justificación, si el enunciado se presenta como afirmación, señalan que "se cree" *V* y debe probarse, por eso es proposición. Para **B** se aprecia que al poder decidir sobre el valor de verdad, concluyen que se trata de una proposición matemática. Esto confirma que en la definición construida previamente el equipo se refiere con afirmación/negación a *V* o *F*.

Otra coincidencia entre los equipos es que no consideran las expresiones 2) y 4) proposiciones. El equipo **A** no justifica su respuesta pero ellos, más que sustentarla en no poder decidir sobre su *V* o **F**, se basan en su apariencia (son expresiones, ecuaciones o desigualdades) y esto también sucede al descartar 1 y 5 como veremos más adelante. Para **B** "en las ecuaciones" 2 y 4 no hay nada que los lleve a determinar que puedan ser *F* o *V*, o no hay nada que afirmar o negar y aún cuando la ausencia de una igualdad o desigualdad los lleva a decidir que no es proposición, en este caso llaman a las expresiones: ecuaciones. Nuevamente se puede ver que utilizan los términos de manera indistinta afirmar-verdadero y negar-falso.

En las respuestas sobre 1) $ax^2+bx+c=0$ y 5) $sen\pi/2 < sen\pi/4$, los equipos **A** y **B** discrepan en cuanto a que son proposiciones. Para **A,** no se consideran proposiciones las ecuaciones o desigualdades y, presumiblemente, basan su respuesta más en su presentación que en la posibilidad de saber si son enunciados *V* o *F*. Para **B,** la consideración (errónea) de que 5) es *V* los lleva a decidir que es proposición matemática (deducción correcta) y en 1), el pensar que sí se puede dar que sea igual a cero, los lleva a decidir equivocadamente que es proposición, sin tomar en consideración que no se conocen los valores *a*, *b* y *c* ni se tiene un dominio definido.

Tabla 28. Decisión de los equipos de cuáles enunciados son proposiciones matemáticas

$\boxed{A}$ *Sí son proposiciones 3 y 6:* *3) Porque es algo que se dice con respecto a los triángulos que en este caso se cree verdadero, más sin embargo requiere verificarse.* *6) Porque es un argumento con respecto a un ángulo el cual se cree verdadero pero se requiere de una demostración.*	$\boxed{B}$ *Sí son proposiciones (1,3,5 y 6) porque:* *1) La proposición de la ecuación puede ser =0* *3) La proposición del enunciado puede ser falso o verdad* *5) La proposición de la ecuación es verdadera* *6) La proposición del enunciado es verdadera* *No son proposiciones (2 y 4) porque:* *2) Esta ecuación no hay nada que afirmar o negar* *4) Esta ecuación no hay nada que permita decir si es F o V*

4.4.1.3 Análisis de justificar el valor de verdad de proposiciones matemáticas

La tarea propuesta para trabajar en pequeños grupos fue la de identificar y justificar de la siguiente lista de proposiciones matemáticas cuáles eran verdaderas y cuáles no:

1) La raíz cúbica de cualquier entero es un número real,
2) $x^2+y^2>1$ (donde *x* e *y* son números reales),
3) Si $x>0$, entonces $log_7x>0$ (donde *x* es un número real),
4) Para todo ángulo *t*, $sec^2\ t-tan^2\ t=1$, *y*

5) Sean *a* y *b* enteros con *a≠0*. Si *a* no divide a *b,* entonces $ax^2+bx+b-a$ no tiene una raíz entera positiva.

Realizar este ejercicio, además de iniciar la consolidación del concepto de proposición, proceso de largo plazo, da lugar a la emergencia de un nuevo constructo: cómo decidir su valor de V.

Ítem 1. Decidir el valor de verdad de la proposición, la raíz cúbica de cualquier entero es un número real

Aunque este era el primer inciso, fue la última tarea que realizó el equipo **B**, no obstante la presentamos en el orden de presentación. En la interacción en el equipo los alumnos tratan de encontrar un contraejemplo [258] pensando en un número negativo, que funcionaría para refutar la proposición en el caso de la raíz cuadrada. Esta *R-acción* [258] reconoce como relevante el papel de los contraejemplos y otra *R-acción* se observa al considerar relevante tener cuidado con los números reales [258, 259, 261, 262].

[258] Pero la raíz cúbica de menos 7… ah no… sí da [esperaba que fuera un contraejemplo y lo descarta] Con decimales. Los decimales están en los reales.
[259] Todos. Todos son, menos los complejos.
[260] Entonces sí cumple.
[261] ¿Los reales son todos los positivos?
[262] Y negativos. [Da una explicación a su compañera con la ayuda de un dibujo] Tienes una recta aquí y aquí tienes todos los números, aquí el 0, acá todos los positivos, todos y aquí todos los negativos.

En [263] al parecer se dan *R-acciones*, en las cuales piensan en ejemplos aunque no se hacen explícitos. En [266 y 270] no se tiene cuidado con la hipótesis probablemente por la forma del enunciado (no es explícito el si … entonces) y ensayan con ½. Sin embargo, en [267, 272 y 273] se hace énfasis en el papel condicional de la hipótesis (*R-acciones*). También es destacable que los estudiantes se encuentran involucrados con la tarea y buscan argumentos, *B-acciones*, para decidir con mayor cuidado [275, 276 y 277], aunque no concluyen esta tarea porque el profesor inicia la socialización de respuestas en gran grupo.

[263] Cualquier número entero que se pueda… () [corrige otro estudiante] Es real.
[265] Es cualquier número entero porque… ().
[266] Cualquier número real porque puedes agarrar [por ejemplo] un medio.
[267] Entero… y su raíz es número real [demandan explicación de por qué es real].
[269] Ponle porque la raíz… es real.
[270] Pues ponle eso. Sí eso. Sin importar si es fracción o …negativo.
[272] No, ahí estarías diciendo que para cualquier número real.
[273] Para cualquier número real las condiciones.
[274] Ay pues déjale así.
[275] Por eso ¿por naturaleza divina? [Pide justificación y reflexionan] A ver no, hay que pensar por qué.
[277] Sea… [Risas]… A ver, no espérame de cualquier entero verdad [asienten].

En el registro escrito, el equipo **B** no ofrece argumentos por falta de tiempo.

Por su parte, el equipo **A** justifica que: «la raíz cúbica de cualquier entero ya sea negativo o positivo tiene una raíz cúbica», después de verificar con algunos números y darse cuenta que no ocurre lo mismo que con las raíces cuadradas, es decir, dos números negativos al multiplicarlos no te pueden dar un número negativo y eso implica que un número negativo no tenga raíz cuadrada real mientras que multiplicando tres números negativos sí es posible obtener un negativo.

Durante la interacción en gran grupo, como en la interacción en el equipo **B** (p.240), apreciamos que hay una *R-acción* al considerar que las raíces cuadradas de un número negativo son números complejos. Luego se da una *B-acción* al utilizar este conocimiento para decidir sobre la *V* de la proposición, dado que las raíces cúbicas de un número negativo son reales.

En relación al profesor encontramos que aún cuando se da la respuesta correcta [281], él demanda mayor participación [282] para que expliquen [284] y amplíen [286] su razonamiento propiciando que socialicen la idea de que con respecto a las raíces cúbicas de los números negativos no ocurre lo mismo que con las raíces cuadradas.

[280] Profesor: La raíz cúbica de cualquier entero es un número real ¬[responden convencidos que es *V*].
[282] P: ¿Eso es cierto? [contestan los alumnos que sí y el maestro pide explicación] ¿Por qué?
[285] Alumnos: Porque al momento de sacar raíz [cúbica] a un entero nos da un entero o un racional y es parte de los reales.
[286] P: No tiene nada que ver ni con el signo, ni con la raíz cúbica de un negativo, ¿existe?
[287] As: Sí, ya que puedes multiplicar un negativo tres veces y te da negativo.

ítem 2.Decidir el valor de verdad de la proposición: $x^2+y^2>1$ (donde x e y son números reales)

En este ítem, dada la formulación un tanto confusa, los alumnos van a enfrentar algunos problemas, pero va a resultar interesante la aplicación de lo realizado en el ítem siguiente.
Siguiendo la interacción en el equipo **B** se produce una *B-acción* [101] sobre la *V* la proposición, sin embargo el argumento es válido sólo para el dominio $\mathbb{Z}$*-{0}*. En [103] tiene lugar una *B-acción* al refutar la afirmación con un contraejemplo *x=y=0.* En [104] se demanda clarificación de la naturaleza del cero y asienten que *0* es real. Esta es una *R-acción* dado que se percibe la necesidad de tener en cuenta la hipótesis (*x* e *y* son reales).

[101] Es verdad, $x^2+y^2 > 1$, donde *x* e *y* son reales, … ¿no? Sí porque *x* cuadrada y esta [y^2] son positivos.
[102] ¡Ah sí!
[103] Pero, y si los dos valen cero () y cero no es mayor que uno.
[104] ¿Y el cero es número real? [asienten y continúan con otros ejercicios y después regresan].

Continúan tratando que todos queden convencidos de que la proposición es *F*. Para ello siguen buscando contraejemplos. En esa búsqueda, los conectivos "o" e "y" [239-243] representan un conflicto para la comunicación. Es entonces [243-244] cuando se aprecia la *R-acción* que muestra la relevancia del uso adecuado de los conectivos para continuar con la construcción de los contraejemplos. Finalmente se aprecia una *B-acción* en los contraejemplos encontrados *x=y=0; x=1,y=0;* y*, x=0, y=1* que respaldan la falsedad de la proposición tomando en cuenta los constructos previos específicos, uso de conectivos e hipótesis.

[238] Y luego este [nuevamente $x^2+y^2>1$, donde *x* e *y* son reales, deciden que es *F* y un estudiante pide explicación]por qué para cuando x e y son iguales que cero?
[239] ¿*x* e *y*?, *x* o *y* es igual a cero [lo menciona como un "contraejemplo"].
[240] Mmh. No. Porque este es cero y éste vale cualquiera ["o" excluyente].
[242] ¡Ah sí! para *x* o *y*, ¿no?
[243] Para *x* e *y* igual a cero o uno, ¡Ah no! Si *x* vale
[248] Pero si aquí pones *x* igual a *0*, *y* igual a 1, los dos [al cuadrado y sumados] van a valer 1 entonces.
[249] O bien *x*, [igual a] *0*, *y* igual a cero [otro contraejemplo].
[250] A uno [pensando en el contraejemplo previo].
[251] Sí. No. Bueno es que ( ) a uno.
[252] O bien si *x* o *y* igual a cero tampoco se cumple porque *x* o *y* vale uno por ejemplo *x* vale

cero y *y* vale uno.
[244] Uno igual a 0 *y* otro igual a uno [asienten sobre el contraejemplo].
[246] *x* igual a *y* ¿no?, igual a cero [*x*].

uno.
[253] ¡Ah si, ya Ok! o bien *x* o *y* vale 1 y *x* o *y* cero. ¡Ok ya! [contraejemplos: $x=1, y=0; x=0, y=1$].
[254] Bueno *x* o *y* es igual a 1 y, *y* o *x* es igual a 0.

Finalmente en el equipo **B** deciden que es *F* la proposición $x^2+y^2>1$*, donde x e y números reales* y registran en su informe escrito su argumento en forma de contraejemplo «Si $x=y=0$ o bien *x* ó $y=1$ y el otro es igual a cero la proposición es falsa».

El equipo **A** no registró en forma escrita ningún argumento. Aunque en la interacción en gran grupo ambos equipos deciden que este enunciado no presenta cuantificadores y, al no decir que para todo número real o bien usar otro cuantificador, no es una proposición porque la palabra "donde" es ambigua y se entiende de diferentes maneras.

Durante la discusión en grupo primero se considera que el enunciado es ambiguo ya que la palabra "donde" se presta a más de una interpretación. Para resolver la cuestión los alumnos argumentan que es *F* respaldados en el reconocimiento del papel de los contraejemplos (*R-acción*) que utilizan (*B-acción*) para refutarla.

[288] Profesor: Bien, 2) $x^2+y^2>1$*, donde x e y números reales*¬.
[289] Alumnos: Es falso [el maestro pide justificación].

[291] As: Porque si *x* y *y* fueran cero o, *x* o *y* fueran igual a *1*, entonces *0* y *1* no es mayor que *1.*
[292] As: Donde x^2+y^2 nos de igual o menor a *1.*

El profesor [293] invitar a reflexionar a los alumnos sobre la intervención de su compañero [291] y a revisar la forma del enunciado dando lugar a una *R-acción* sobre la precisión en el lenguaje [294]. En caso de que se hubiera incluido el cuantificador "*para todo número real x e y*" funcionarían los contraejemplos dados y "la proposición" sería *F*. Sin embargo, la palabra "dónde"es interpretada como "sin valores definidos" como se muestra en las *B-acciones* [295-297] guiadas por el profesor desafiando a los estudiantes para que asocien el valor de verdad de esa proposición razonando a partir de ejemplos concretos [295 y 297].

[293] Profesor: Se puede decidir si es F o V¬.
[294] Alumnos: [Después de una pausa] No, ¡ah no! no es para todos [los reales].

[295] P: Por ejemplo si $x=2$ y $y=3$, ¿es verdadera?¬ [contestan los estudiantes] Sí.
[297] P: Si $x=1/2$ y $y=1/2$, ¿es verdadera?¬ [contestan] No.

En [299] el profesor insiste en la demanda argumentos para que se concluya la tarea y como respuesta los estudiantes llegan a que, al no tener valores definidos (cuantificados) entonces no es posible decidir su valor de verdad y por tanto no es proposición matemática.

[299] Profesor: ¿Se puede decidir si es verdadera o falsa?¬.

[300] Alumnos: No, porque no tenemos valores. No//.
[302] As: Ni siquiera es proposición matemática.

Ítem 3 Determinar si es F o V que, Si x>0, entonces $\log_7 x>0$ *(donde x es un número real).*

En el equipo **B** muestran desconcierto ante la tarea porque no recuerdan el concepto y notación de logaritmo y la abandonan. Después de realizar otros ejercicios, retornan y se dan cuenta que necesitan entender el significado de logaritmo (*R-acción*). Con ello se inician dos procesos de construcción que interactúan de manera paralela: construir el concepto de logaritmo como inverso de la exponencial (C_6) y decidir si es *V* o *F* la proposición (C_7).

[184] [Pregunta sobre el log y al regresar al equipo explica con un ejemplo] Logaritmo [$log_7\, x$] es a qué numero tendría que elevar el *7* para que me de mayor que *0* [escribe].
[185] No. Este número si es mayor que 0 [log_7 x]…me da x [7^p], donde x es un real [asienten].
[187] Esto dices tú. O sea logaritmo *7* de x es igual a a [$log_7\, x=a$] dónde a es mayor a cero, es un número positivo [$log_7\, x$]. Creo que ya ¿verdad? Logaritmo. A ver *7* a la qué¬.
[189] A la x, x es mayor que 0, entonces a es positivo dónde [$7^a=x$ para qué valores positivos de a, $x>0$].

Proponen un contraejemplo [192] del que erróneamente piensan que es único. Sin embargo, esto supone una *C-acción* (***C_6***) del concepto de logaritmo dado que conciben de manera adecuada el lenguaje de los exponentes aunque, no entienden todavía el papel del contraejemplo, fundamentalmente para decidir el valor de verdad [194, 198, 199].

[190] No. Entonces aquí es cierto [los demás muestran acuerdo convencidos].
[192] Porque el único que no cumpliría, sería el 0 [$log_7\, 1=0$, es decir $x=1>0$, pero $log_7\, x=a=0$, no positivo].
[193] No,…, ajá, sí.
[194] Sería que logaritmo 7 de x fuera 0, pero lo que nos están especificando es que x es mayor que cero y que este también [a].
[195] ¡Qué fuera mayor que cero! [$log_7\, x$].
[197] Entonces ¿cómo le pondríamos?
[198] Siete ¿? Elevado a la qué me daría [x], donde x mayor que *0.*
[199] Siete igual nada más que llevaría el valor de x donde x es mayor a cero.

Como no manejan correctamente hipótesis y conclusión en un contraejemplo, y tienen problemas con el concepto de logaritmo, necesitan verbalizar sucesivas veces lo que entienden por el concepto hasta lograr su construcción definitiva. La dificultad radica en que, por un lado tienen una definición de logaritmo poco operativa a partir de exponentes puesto que han de manejar dos variables (x y a) inversas una de la otra y, a veces, sin ser conscientes, las intercambian. Por otro lado, al buscar un contraejemplo, han de probar que, para algún valor que verifique la hipótesis, no se verifica la conclusión, pero esto no lo tienen totalmente asumido ya que saben que para que una implicación sea *V* ambas premisas deben serlo.
Para poder resolver la tarea la retoman desde el principio realizando de forma paralela 1) una *B-acción* para edificar el significado de contraejemplo [200], 2) un proceso de consolidación del concepto recién contruido, ***C_6*** buscando afianzarlo con herramientas algebraicas primarias que les aclare el papel del exponente [198], con diferentes ejemplos y cambiando de notación [202] y 3) una *B-acción* edificando sobre el papel de la hipótesis en una implicación [200].

[200] Cierto ya que nos define que x es mayor que cero [la hipótesis]. ¿no?
[201] Mayor que cero. Ah sí. Sí, porque si lo elevamos a la uno a la dos a la tres ajá.
[202] Ándale sí. O para p igual a cero [cambian ahora la notación y $log_7\, x=p$, antes p era a].
[203] Pero aquí nos está diciendo que $log_7\, x$ es mayor que cero.
[204] Pero hay una propiedad que no cumpliría con esta.
[205] El único que no cumple con, con…¿?
[206] [si $x=1$, $p=0$] igual a cero.
[207] Es igual a uno [$x=1$, $7^0=1$] [Otro estudiante demanda explicación de esto].
[209] Sí se cumple, ¿verdad? cumple con todo.
[210] Pero x es mayor que cero, entonces logaritmo es mayor que cero …
[212] Cumple para todo p, pero mayor o igual que 0.
[213] Pero aquí nos dice que p es mayor que cero [$log_7\, x>0$], ¿entonces si cumple?, donde p debe ser mayor que cero, no, si x es mayor que cero [esto pone a pensar a otro alumno] Ah entonces…
[215] No, no es cierto, porque, a ver si $x>0$, por ejemplo *7* a la *2*, bueno p igual a *2*, bueno claro que no.
[217] No, mira qué número. Digamos que *49* [es x] y p vale *2.*

Esto conduce a activar de nuevo el contraejemplo que demuestra que la proposición es falsa.

[219] Bueno, pero sería en el caso que *x* valga uno.
[221] Entonces ¿a qué numero me da igual a uno? igual a 0. El uno cumple con que sea mayor que *0*.
[223] Que *x* sea mayor que 0, pero no cumple con que este número [$log_7\, x=p$] sea mayor que *0*.
[224] Ajá, Ok, ya, ya, sí. Por la propiedad.

Finalmente se concluye la discusión y en el registro escrito del equipo **B**, «$7^p=x$, $7^0=1$, $x>0$ pero $log_7 1=0$ y no cumple la proposición» se exhibe por primera vez una *C-acción* (***C*$_7$**) de la comprensión del papel de los contraejemplos para probar que la proposición es *F*. Cabe destacar que esto indica la construcción grupal y no asegura la individual.

[225] A ver ¿? Cada una de estas. Hay que buscar la respuesta en los dos casos, si es falso o verdadero.
[227] Bueno, pues *7* a la cero es igual a uno.
[229] Este sí [es contraejemplo], entonces *p* no cumple
[232] No, mira más bien logaritmo de 7 de *x* es igual a uno, no es igual a cero no cumple esta propiedad.
[234] Logaritmo de *7* de *x* es a la *p* [el exponente al que se eleva el *7* para obtener *x*] es igual a cero.

Por su parte el equipo **A** en su registro escrito, expresa en forma errónea que es *V* la proposición 3), Si $x>0$, entonces $log_7 x>0$ (donde *x* es un número real), dado que «Al elevar 7 a cualquier número > 0 siempre será mayor que cero». Su argumento muestra que no hay una comprensión del significado del logaritmo.

En este fragmento presentamos la discusión en grupo para decidir el valor de verdad de la proposición, *si* $x>0$*, entonces* $log_7 x>0$ *(donde x es real)*. En [304] se reconoce la función del contraejemplo como relevante (*B-acción*) y se muestra confianza en la comprensión del concepto recién construido de logaritmo [306]. Esta confianza es evidencia de la consolidación que encontramos explícita en diferentes formas de enunciar su contraejemplo. Esta intervención, además valida la comprensión de logaritmo como “exponente”.

[303] Profesor: Ahora si tengo un número positivo *x*, pero supongo que es real, el $log_7\, x$ es positivo ¿Sí?
[304] Alumnos: Es que hay un número con el que no se cumple [el maestro demanda un ejemplo].
[306] As: Cuando $x=1$ el exponente es cero, o sea $7^0=1$ y ya no cumple.
[307] As: Sí *x* vale *1*, por ejemplo, entonces el logaritmo cuánto tendría que valer¬.
[308] As: Cero.

En [309] encontramos influencia del ejercicio anterior, dado que en ambos aparece la palabra “donde” que antes se prestaba a diferentes interpretaciones. Vemos que para el alumno la precisión de lenguaje aún es frágil y depende del contexto. Se reconoce que para algunos valores la proposición es *V* y para otros no. Esto es claro cuando responde en [411] que no es posible decidir si es *F* o *V* y no sería proposición como en el caso anterior ($x^2+y^2>1$*, donde x e y números reales*) en el que se acordó que faltaba el cuantificador en lugar de la palabra “donde”.

[309] Alumnos: En algunos [casos] se cumple, pero en otros [casos] no.
[310] Profesor: Entonces es falsa o verdadera¬.
[311] As: No podemos decir.

Sin embargo, se muestra cierto crecimiento en la comprensión de la noción de proposición que se manifiesta, primero en [312] una *R-acción* respecto al uso distinto de la palabra “donde” en ambos enunciados. Luego, en [312-314] mediante una *B-acción* se explicita la forma de la implicación, el papel condicional de la hipótesis en la misma y el papel de los contraejemplos para probar que una proposición es *F*. El profesor aprovecha esta oportunidad para darle nombre a las proposiciones de este tipo, las implicaciones, [315] lo que constituye una *R-acción* [316-317].

[312] Alumnos: Es que aquí ya nos está diciendo, si pasa esto entonces …, cuándo es 0, cuando *$log_7 1$*.
[313] As: Sí, porque independientemente del valor que nos dé de *x* hay un valor que no cumple para él [*$log_7 1$* es cero y por tanto no es positivo].
[314] As: Sí, entonces es falso.
[315] Profesor: Qué tipo de proposición es esa, de la forma si,…. ,entonces.
[316] As: Implica // Es una implicación [responde otro alumno].

Se inicia [318] una exploración sobre cuándo es *V* un enunciado de este tipo. Un estudiante sólo considera proposiciones en forma de ecuaciones o desigualdades que requieren conocer los valores condicionales [319]. El profesor no indica que su aportación es cierta para ese tipo específico de proposiciones. Únicamente se limita a mencionar «no, esos son cuantificadores».

[318] Profesor: Sí, es implicación. Y en una implicación cuándo podemos decir que […] es *V* ¬.
[319] Alumnos: Si para todo se cumple.
[320] P: No, esos son cuantificadores

Al aplicar los constructos previos a la noción de implicación, los estudiantes establecen los valores de verdad [321-323] señalando que “si el primero es V y el segundo F”, como sucedió (*R-acción*) en esta proposición se tiene un enunciado F. Encontrar estos valores de verdad de la implicación [321, 323, 327] constituye una *C-acción* a la que llamaremos $\boldsymbol{C_{10}}$, ya que por primera vez aparece enunciada como tal.

[321] Alumnos: Si el primer enunciado es *V* y el segundo es *V*, todo es *V.*
[322] As: Si el primero es *F* y el segundo es *F* entonces es ( ) *F.*
[323] As: ( ) No, es *V* // [otro alumno muestra desacuerdo] Sí es *V.*
[325] As: Mmh ( ) Perdón, es verdadero
[326] As: Si hay una combinación …
[327] Profesor: Si el primero es *V* y el segundo es *F* [responden] Es falso.
[329] P: Este sería el caso [asienten convencidos los alumnos].
[332a] P: Sí verdad. Entonces en este caso la implicación es *F*.

Ítem 4. Encontrar el valor de verdad de la proposición, para todo ángulo t, sec^2 t-tan^2 t=1

En este fragmento presentamos la interacción en el equipo **B**. Un estudiante del equipo [110b] y [114] (es el mismo) muestra confianza en su argumento y puede ser que reconozca la proposición como una identidad trigonométrica (*R-acción*), aunque no específica que sólo es válida cuando tan *t* está definida.

[110b] [lee la 4] para todo ángulo *t*…[*$sec^2 t$-$tan^2 t$=1*] mmh… sí es verdadero [asiente otro compañero].
[113] [un estudiante pide justificaciónn y le responden] Ah, ¿Por qué?, la proposición es cierta.
[114] La oración es cierta porque para cualquier valor de *t* se cumple.
[115-116] Más bien la proposición [asienten] Sí la proposición

Finalmente en el registro escrito el equipo **B** escribe que «*Para cualquier valor de t la proposición es verdadera».* Por su parte el equipo **A** concluye que es *V* la proposición*, para todo ángulo t, $sec^2 t$-$tan^2 t$=1,* basados en el argumento de que «por ser la identidad trigonométrica *$sec^2 t=1+tan^2 t$*, sólo se despeja “1”».

En la discusión en gran grupo se decide el valor de verdad de la proposición anterior. Los estudiantes exhiben confianza con el manejo de identidades y esto se hace evidente en [334] donde (//) varios alumnos que contestan que la proposición es *V*, aunque sin aclarar que *tan t* no está definida para todos los valores.

[332b] Profesor: Luego, *para todo ángulo t,* sec^2t-tan^2t=1¬.
[334] Alumnos: Verdadero//.

[335a] P: Sí es verdadero, de hecho es identidad, no importa cuál sea el valor de *t*.

Ítem 5. Decidir si la proposición, 5) Sean a y b enteros con a≠0. Si a no divide a b, entonces $ax^2+bx+b-a$ *no tiene una raíz entera positiva, es verdadera.*

Para comprender la tarea, en el equipo *B*, repiten el enunciado del ítem [121] y con *R-acciones* reconocen que la fórmula general para resolver ecuaciones de segundo grado y su manejo son relevantes para ver si la proposición se cumple [122], al igual que tener en cuenta la hipótesis [124 y 128]. Esto último muestra ya el cuidado que se tiene al tomar en cuenta el papel condicional de la misma. De acuerdo con Schwarz et al (2009, p.17) esto indica el paso a una etapa de consolidación (precedida por la necesidad y la emergencia de un nuevo constructo) para la abstracción de un concepto. En [125 y 126] se observa cuidado también en el uso adecuado de la definición de divisibilidad construida en una actividad previa (ver pp. 142 en la sección 4.3.1.1 Definiciones no geométricas) y, a su vez, el reconocer que es relevante tenerla en cuenta para la nueva tarea, la convierte en esta parte en una *R-acción*.

[120] [Pasan a la 5] Ok. Sean *a* y *b* enteros con *a≠0*. Si *a* no divide a *b* entonces *ax* cuadrada más *bx* más *b* menos *a*, no tienen una raíz entera positiva.
[121] Un entero diferente de, con *a* diferente de cero ¿verdad?, pero *b* diferente de cero (), ¿no?
[122] Sería menos *b* más menos la raíz cuadrada de *b* cuadrada ¿no?
[124] Bueno así. *a* tiene que ser diferente de cero para que este [esta proposición] se cumpla.
[125] Sí, así. Pero si *a* no divide a *b*, o sea que si *a* no divide a *b* entonces es que *a*, perdón *b* entre *a* me da otra fracción.
[126] Ajá. Eso es que no lo divide. Si lo divide te queda un entero.
[128] Si *a* no divide a *b* no podría. No sería una raíz entera positiva.

En [130] se da inicio una cadena de *B-acciones* donde se utiliza la fórmula general para el cálculo de las soluciones de una ecuación de segundo grado, se realizan los cálculos y se verifican una y otra vez. Luego en [152] obtienen como una raíz *a -1.*

[130] Mmh…No puedo reducir este término.
[132] No sé (), ¡ah! puede que sí, porque este te hace positivo, ¡ah no! pero los enteros ¿verdad?, a ver, mmh… Eso es *F* ¿no? porque por ejemplo aquí puede ser una raíz, perdón, una fracción, sí pero sumado con este puede salir una positiva o restado te puede salir positiva y este negativo y este negativo, te puede dar un entero. Pues más bien…
[133] Mmh. Que se puede dar un entero ¿no?, hasta que saquemos la raíz entera positiva.
[134] Entonces,¿ahí no hay?, ¿esa por qué?
[135] Porque por ejemplo aquí puede ser una raíz [hacen operaciones aplicando la fórmula].
[136] Este es un trinomio al cuadrado perfecto [dentro de la raíz queda $b^2-4ab+4a^2$].
[137] Sí, *b* cuadrada menos dos *a* cuadrada.
[138] No, a ver [vuelven a hacer cálculos].
[139] Raíz de *b* cuadrada menos cuatro *ac* …(), es que es antes [de la raíz] menos *b* más a menos.
[141] ¡Ah no! Porque este ya no sería *c*. Es *b* menos *a* [al aplicar la fórmula *c* es igual a *(b-a)*].
[142] ¡Ah sí! , sí, ajá. Y de ahí entre *2 a.*
[145] Nos pregunta, [Risas].
[146] Este tiene el mismo denominador ¿no?
[147] Pero este, por ejemplo, lo podemos sacar [de la raíz]. No que te crees ¿no?. Sí, ah no, (Ra) pero seguimos con este [indecisa].
[148] Este cuadrado se va [en el radicando factorizan $b^2-4ab+4a^2$ y les queda $(b-2a)^2$].
[149] Ajá. Esto es *b* menos *2a* [cancelan el cuadrado con la raíz].
[150] Mmh… cuando es más [al tomar el signo menos en la fórmula] este se va y queda menos *2b* más *2a* sobre *2a* y en el otro [al tomar el signo +].
[152] Te da positivo pero entero. No perdón, te da menos *1* [obtienen una solución: *-1*].

Otras *B-acciones* [150, 156, 157, 158 y 167] se suceden para obtener la otra raíz (*1-b/a*). En [158, 160, 161] (*B-acciones*) toman en cuenta la hipótesis vinculándola con la raíz x_2 (descartan x_1 por ser raíz entera negativa). En [158] encontramos otra *B-acción*, cuando se dan cuenta que $x_2=1-b/a$ es siempre una fracción por la hipótesis, luego en [160] se deduce que la proposición es V, es decir, que la ecuación no tiene raíz entera positiva si *a* no divide a *b* y $a\neq 0$.

[156] Y ese ya es. Ya los podemos separar me queda menos *2b* sobre *2a* más *2a* sobre *2a.*
[157] Pero este es raíz.
[158] Pero en este *a* no divide a *b*, este es una fracción [*1–b/a*].
[160] Ajá. Entonces esto se cumple [al quedar fracción no es raíz entera y la otra es entera negativa].
[161] Mmh si *a* no divide a *b* [tratando de entender], *a* con todo eso [se refiere a que la raíz es *(a-b)/a*].
[162] Sí, lo ponemos así [otro alumno le contesta] No, mira así y ya.
[167] Pero es que puede ser así. Pero si hacemos operaciones queda *1–b/a.*

En [168-174] revisan lo que es relevante para ordenar sus cálculos (*R-acciones*). En [175] el alumno con la pregunta «¿Los enteros incluyen a los negativos?» invita a tener mayor cuidado en la decisión y pensar probablemente en, por qué se habla de raíz entera positiva, o que pasaría con la solución encontrada (*1–b/a*) si *a* o *b* fueran negativos. En [176] otro alumno muestra confianza y seguridad en su decisión al validar que en cualquiera de los casos x_2 es una fracción y x_1 es negativa siempre (-1), podemos decir que aquí se produce una *C-acción*.

[168] ¡A ver, ya! esto, vamos a ver que podemos omitir, lo que nos funcione, es esto.
[169] Mira no. Más bien esto. No. Cuando tenemos este así [tratan de resumir].
[170] Aquí ponle que sustituimos a *b* …
[171] No. Más bien tenemos que es igual a [escribe] Ponle todo [otro alumno le indica].
[174] Cuatro *a* cuadrada ¿verdad? [en el radicando $b^2-4ab+4a^2$] ( ).
[175] ¿Los enteros incluyen a los negativos?
[176] Sí, pero es que … no. Mmh ( ) ¡Ah Ok! Ya siempre es fracción [revisa y se convence que sería *V* de todas maneras]. Pero cuando decimos que es menos… queda … Pero como *a* no divide a *b*, es fracción.

Lo comentado en el extracto anterior queda claro con la observación de cierre que hace el equipo **B** en su aportación escrita después de presentar los cálculos de sustituir *c=b-a* en la fórmula general para resolver ecuaciones de segundo grado y obtener *x=[-b±(b-2a)]/2a*, «La *raíz (+) = -2a/2a* es entero negativo; la *raíz (-)=-2b/2a+2a/2a* como *a* no divide a *b* entonces *-2b/2a* es una fracción».
Aunque no se presenta la interacción en el equipo **A** en su registro escrito señalan que «ya que *a* no divide a *b*, al igualar la ecuación $ax^2+bx+b-a$; a un entero positivo y realizando algunos cálculos nos dimos cuenta que la proposición es V».

Tomando en consideración los registros escritos anteriores pasamos a la interacción en gran grupo. Se percibe inmediatez y confianza en el manejo de la definición de divisibilidad incluída en una hoja de trabajo previa sobre construcción de definiciones donde sí se exhibieron dificultades con esta definición (ver página 132 en la sección 4.3.1.1 Definiciones no geométricas). Aunque durante la interacción no se explicitan las ideas de cada alumno, revisando la interacción en pequeños grupos y sus producciones escritas se pueden ver *R-acciones* de la utilidad de la fórmula general para resolver ecuaciones de segundo grado y la definición de divisibilidad, así como la aplicación de las (*B-acciones*) para obtener un nuevo constructo (*C-acción*).

[335b] Profesor: Bueno, el último [ejercicio] *Sean a y b*

[337] As: Que se tenga un entero que multiplicado

enteros con a diferente de cero. Si a no divide a b, entonces $ax^2+bx+b-a$ no tiene una raíz entera positiva. Qué quiere decir que un número divide a otro¬.
[336] Alumnos: Que la división sea exacta.
por *a* nos dé *b.*
[338] P: Y cómo es el enunciado.
[339] As: Es V// [el profesor pide explicación, le muestran sus cálculos y revisa convencido].

4.4.1.4 Análisis de comprender hipótesis y conclusión en una implicación

En esta parte se espera que los estudiantes identifiquen la forma "si,..., entonces" de una implicación, las variantes de esta forma y sus componentes (hipótesis y conclusión). Primero se explora qué es lo que entienden por hipótesis y por conclusión en el contexto de las implicaciones.

Primero analizaremos la interacción en el equipo **B** para documentar como ocurre el proceso de construcción. En este fragmento tratan de explicar lo que entienden por hipótesis y por conclusión en una implicación. Lo primero que perciben es que la conclusión se deriva de la hipótesis [372] una vez que ésta se verifique [374]. Aquí ocurre una *C-acción* (***C_{11}***) dado que se hace explícito que la hipótesis es la parte de la implicación que se debe suponer cierta.

[372] La conclusión depende de la hipótesis.
[374] Ajá. Pero al verificar la hipótesis, pero la hipótesis …

Sin embargo, en un intento por profundizar, piensan en la hipótesis como una propiedad y esto lo justifican con un ejemplo [376-379], luego como un evento [382] y vinculándolo con el hecho de que de ella se extrae la conclusión, la consideran como evento independiente [383]. Tras esta consideración y dado que si "ocurre" la hipótesis entonces "ocurre" la conclusión [385], la conclusión sería un evento que está en función de ella [386 y 391].

[375] Es como una propiedad ¿no?
[376] La hipótesis vendría siendo () una propiedad ¿no?
[378] Pero una propiedad ¿de qué?
[379] Una propiedad así. Mira, por ejemplo, este es un entero. Sea *x* un entero… Es una hipótesis, una propiedad, entonces...
[381] ¿Si le pongo que es una propiedad?
[382] O puede ser un evento, un evento [otro alumno completa y asienten] Un evento independiente.
[385] Porque si pasa esto, entonces pasa aquello. Entonces la conclusión es un …
[386] Otro evento que está en función del evento independiente …¿?
[387] O de las propiedades de la hipótesis.
[388] ¡Ah no! Bueno, sí. Pero entonces aquí sería un evento independiente, mmmh.
[389] Qué entonces ¿es evento o la propiedad? [un alumno no se muestra convencido].
[391] Una o más propiedades. Bueno así. Es un evento que está en función de la hipótesis.

Observamos en esta interacción que los estudiantes tienden a buscar similitudes usando términos no matemáticos para expresar conceptos de forma poco ajustada. Por ejemplo, en matemáticas, en una hipótesis se establece o controla las "propiedades o características" que se deben tener, mientras que en un evento no puedes determinar su ocurrencia.
En las respuestas escritas de los equipos en cuanto a definir *hipótesis* en el contexto de la demostración se observa que ambos entienden su papel condicional. El equipo **A** menciona que «es un enunciado ya sea *F* o *V* el cual consideramos para saber si alguna proposición es *F* o *V*» y para **B** «Evento independiente que enuncia ciertas propiedades». No obstante, ambas respuestas presentan debilidades. Por una parte, en el equipo **A** se considera que la hipótesis es un enunciado que enuncia propiedades y que puede ser *F* o *V*, sin tomar en cuenta que en el contexto de la demostración se supone *V*, y en caso contrario, si se supone *F*, de lo falso se deriva cualquier cosa.

En el equipo **B**, como lo hemos visto antes en la interacción, se considera tanto la hipótesis como la conclusión como eventos.

En el escrito definen *conclusión* entendiendo que es lo que se deriva de la hipótesis. Para el grupo **A** «es a lo que se llega mediante la hipótesis la cual puede ser *F* o *V*» y en B «un evento que está en función de la hipótesis», no obstante, muestran las mismas debilidades en la hipótesis.

Para la discusión en la interacción en gran grupo el profesor, al darse cuenta de las respuestas generadas, cambia la intención de la tarea en la socialización y pregunta «qué función tiene la hipótesis» [430] lo que induce una nueva aportación [432].

[430] Profesor: […] en el caso de la implicación, ¿qué función tiene la hipótesis?, ¿para qué me sirve?
[431] Alumnos: Enunciado *F* o *V*, el cual consideramos para saber si alguna proposición, etc, es *F* o *V.*
[432] As: Para saber qué es lo que necesitamos [al demostrar]. Algo que debo tener en cuenta.
[433] P: ¿Ustedes?
[434] As: Evento independiente que enuncia ciertas propiedades.

Para afianzar esta idea el profesor [435], a partir de un ejemplo, hace que reflexionen sucediéndose *B-acciones* [436, 438 y 440] acerca de lo que sugiere la noción de hipótesis.

[435] Profesor: Regularmente en matemáticas cuando van a demostrar, esta parte [la hipótesis] ¿para qué me sirve? ¿qué me aporta en la demostración? Cuando ustedes escuchan la palabra "demuestra" por ejemplo [escribe] demuestra que: si *X* es un espacio métrico entonces es compacto, esta proposición es falsa. Mmh… [busca otro ejemplo más cercano]. Bueno, por ejemplo, demuestre que si *x* es un número par entonces su cuadrado también es par [escribe].
[436] Alumnos: Pues agarro un [número] par y de ahí empiezo.
[437] P: Pero entonces ¿qué es?
[438] As: Son las bases para probar.
[439] P: Son las bases. Eso se supone que es ¿cómo? ¬ Cuando yo quiero probar esto [señala la hipótesis "si *x* es un número par"] se considera que es ¬.
[440] As: Cierto // verdadero.

Un alumno [442 y 444] confunde los valores que se asignan a las premisas para establecer la tabla de verdad de una implicación con los valores que pueda tener un enunciado concreto, lo cual induce al profesor a aclarar [445] este error.

[442] Alumnos: Se supone, pero no se considera *V*, es que también cuando se considera la hipótesis *F* y se llega a que es *V.*
[443] Profesor: ¿Cómo?
[444] As: Si la hipótesis es *F* y llegas a que es *V.*
[445] P: Si se da en ambos [si supones la hipótesis *F* y *V* y la conclusión es *V]* quiere decir que a lo que llegas no depende de lo que supones, entonces es *V.*

En [446] otra alumna interviene y piensa que «cuando es una hipótesis *F* pues es lo contrario». Esto provoca que el profesor les recuerde nuevamente [447] la proposición sobre el logaritmo, lo cual provoca una *B-acción* identificando el punto de partida (que $x>0$ es cierto) dando lugar a la construcción del significado de la hipótesis de acuerdo a su función en el proceso de demostración. Sin embargo, en este proceso "colectivo" de construcción, el efecto no es el mismo sobre todos los participantes e intervienen otros conceptos que aún no se diferencian. Así una alumna se da cuenta que, en el ejemplo citado, suponen *V* la hipótesis y llegan a que la proposición es *F* utilizando "contradicción" con el sentido de falsedad [450].

[446] Alumnos: Cuando es una hipótesis *F* pues es lo contrario.
[447] Profesor: Pero en el proceso de demostrar ¿cómo utilizan la
[448] As: De que *x* mayor que cero.

implicación? Regularmente dices: si pasa esto [hipótesis] demuestra que esto [la conclusión] es *V*. Dan por hecho que la hipótesis o esta parte [señala en el ejemplo la parte, *si x es un número par*] es *V*. Por ejemplo aquí en una proposición que tenían [busca antes en la hoja de trabajo] ¿dónde fue? Aquí está, si *x* es mayor que cero entonces logaritmo base 7 de x es mayor que cero ¿verdad? Ustedes dijeron que era F, pero parten ¿de qué hecho?

[449] P: Suponen que esto es verdadero [escribe y señala].
[450] As: ¡Ah y llegamos a una contradicción!
[451] P: Y en ese proceso de demostrar analizan a partir de que *x* es mayor que cero.

Un alumno [452] insiste en la idea de que la hipótesis puede ser *F* o *V*; las tablas de verdad que ya ha visto se imponen sobre la construcción que se ha hecho de la implicación. No es consciente del significado del proceso de demostrar y por ello el profesor vuelve a recordar el papel de la hipótesis. En [453-454] se observa una *C-acción,* $\boldsymbol{C_{12}}$, sobre la forma de proceder para demostrar implicación.

[452] Alumnos: Pero entonces la hipótesis puede ser también *F* o *V.*
[453] Profesor: En realidad la hipótesis, vamos a partir del hecho de que es V y entonces llegamos a una conclusión que puede ser ¬.
[454] As: Falsa o verdadera.
[455] P: Sí, y eso nos determina la verdad o falsedad de la proposición.

Se percibe la necesidad de una relación entre la tabla de verdad y el proceso de demostración y esto se hará en el desarrollo de la hoja de trabajo 4.
En esta parte no se identifica una *C-acción* donde se mencione de manera completa los constructos de hipótesis y conclusión, aunque, al agrupar diferentes *B-acciones* se aprecia que establecen la función de la hipótesis en el proceso de demostrar y que ésta debe considerarse o suponerse *V*.

4.4.1.5 Análisis de identificar los componentes de una implicaciones

En esta tarea tratan de identificar la hipótesis y la conclusión en siete proposiciones, la dificultad radica en que no todas aparecen en la forma explícita *si P entonces Q*.

Parte 1. Aquí tratan con las proposiciones: 1) *El triángulo rectángulo XYZ con catetos de longitud x e y e hipotenusa de longitud z tiene área* $z^2/4$*, entonces el triángulo XYZ es isósceles,* y *en 2) n es un entero par* $\mapsto$ n^2 es un entero par.

En esta parte no se muestra ninguna dificultad, la respuesta es inmediata. Podemos observar que ambas son implicaciones en las que no aparece de manera explícita la palabra *si.* En la primera aparece el *entonces* y en la segunda, como variación, en su lugar aparece el símbolo ”$\mapsto$” cuyo significado es el mismo o se lee “entonces” o “implica”.

[394] Esto: El triángulo rectángulo *XYZ* con catetos de longitud *x* [e *y* e hipotenusa de longitud *z*] tiene área $z^2/4$, es la hipótesis ¿no?
[395] [el] triángulo [XYZ es] isósceles es la conclusión.

[396] [Leen]*n* es un entero par implica *n* cuadrada es un entero par. Entonces lo pongo aquí. Esto hipótesis, *n* es [un entero] par y esto conclusión [n^2 es un entero par].

En relación al registro escrito, para ambos equipos, tanto en la primera proposición como en la segunda, la hipótesis y conclusión fue la misma que aparece en la transcripción.

En esta interacción no se aprecian acciones más allá de exponer lo negociado en el equipo y las intervenciones del profesor, únicamente se limitan a recoger tal información.

[456] Profesor: […] tienen ustedes para identificar cuál es la hipótesis y la conclusión. En la primera [Si el triángulo rectángulo *XYZ* con catetos de longitud *x* e *y* e hipotenusa *z* tiene área $z^2/4$], entonces el triángulo *XYZ* es isósceles. No hay duda. Es muy claro por la forma se ve bien donde está el "si" y donde el "entonces", así es claro cuál sería la hipótesis y cual la conclusión. En el segundo también, ¿cuál?

[457] Alumnos: La hipótesis *n* es un entero par.
[458] As: Y *n* cuadrada es un entero par sería conclusión

Parte 2. Las implicaciones que aparecen en esta parte tienen la característica de presentar primero la conclusión y después la hipótesis: 3) *es posible resolver las dos ecuaciones lineales ax+by=e y cx+dy=f para x e y cuando a, b, c, d y f son números reales con ad-bc≠0,* y 5*) r es un número racional si r es real y satisface* $r^2=2$.
En la 3), además se utilizan palabras distintas a las habituales *si* y *entonces,* y en la 5) se omite sólo la palabra *entonces.* Los alumnos no muestran conflicto con el orden y de inmediato identifican que "si" y "cuando" tienen la función de condicionar la conclusión. Tal inmediatez da muestra de la fase de consolidación para la implicación.

[397] Es posible resolver las dos ecuaciones lineales [*ax+by=e* y *cx+dy=f* para *x* e *y*]. Esta es la conclusión.
[398] Cuando *a,b,c,d y f* [son números reales con *ad-bc≠0*], eso es hipótesis.

[408] [más adelante] *r* es número irracional, si *r* es real [y satisface $r^2=2$]… esta es la hipótesis [se detiene al identificar el si y lo que está después lo considera hipótesis].

Las respuestas escritas en los informes fueron las mismas en los dos equipos (**A** y **B**) para las proposiciones 3 y 5. Durante la interacción en gran grupo se discutieron las respuestas, sin que se apreciara dificultad alguna.

[459] Profesor: Bien, en la que sigue ¿cuál sería la hipótesis?
[460] Alumnos: Cuando *a, b, c, d* y *f* son números reales con *ad* menos *bc* diferente de cero.

[461] P: Esta es una forma diferente de enunciar esto ( ). Cuando( ). El "cuando" determina lo que se supone cierto: la hipótesis. ¿Y la conclusión? ¬.
[462] As: Es posible resolver las dos ecuaciones lineales …[*ax+by=e* y *cx+dy=f* para *x* e *y* cuando *a,b,c,d* y *f* son números reales con *ad-bc≠0*].

No tienen problemas para identificar los componentes de cada implicación aún cuando en los enunciados propuestos no aparece la hipótesis en primer lugar. En las respuestas se muestra inmediatez y confianza rasgos que nos indican que el constructo se encuentra en una fase de consolidación.

[474] Profesor: El que sigue [*r es un número irracional si r es real y satisface* $r^2=2$], ¿la hipótesis es? ¬.

[475] Alumnos: Si *r* es real y satisface $r^2=2$ *//.*
[476] P: ¿Y la conclusión es? [contestan los estudiantes] *r* es irracional //.

Parte 3. En este extracto se trata de identificar la hipótesis y la conclusión en la proposición: *La suma de los n primeros enteros positivos es n(n+1)/2*.
De manera implícita se da una *R-acción* cuando los estudiantes identifican que el enunciado no presenta la forma habitual de una implicación, no se menciona ninguna de las dos palabras que la identifican (si y entonces) y tampoco algún sinónimo como en los casos previos (cuando e implica, es posible, ↦). Así que para poder continuar es necesario ubicar el lugar de cada componente de una implicación en el enunciado propuesto.

En [401 y 404] se producen *B-acciones* cuando tratan de formular la implicación en la estructura si … entonces para poder identificar la hipótesis y la conclusión. La *C-acción* se presenta cuando se encuentra el sentido de la implicación en [405] apuntando que la hipótesis es "[si consideramos] los n primeros enteros positivos" y la conclusión es la fórmula para calcular la suma.

[399] La suma de los *n* primeros enteros () [se detienen y contesta un estudiante] Esta es la hipótesis.
[401] *Si* son primeros enteros positivos, digamos que tenemos los primeros enteros positivos *entonces* la suma es esta [*n(n+1)/2*].
[402] Esto es la conclusión.
[403] La suma de los *n* primeros, mmmh. Ah. Esta es la hipótesis porque ().
[404] *Si* son primeros enteros positivos *entonces* la suma de los *n* es (). Bueno digamos que *si* tenemos los *n* primeros enteros positivos, *entonces* la suma de ellos es esta.
[405] Se me hace que esta es la hipótesis [señala] todo esto es la suma [*n(n+1)/2*] en consecuencia de tener los primeros enteros positivos.
[406] Tú le pusiste ahí [la compañera contesta] Sí ajá, esta es la hipótesis [*n(n+1)/2*].

En la producción escrita se especifica lo contrario de lo señalado en el dialogo. Esto puede atribuirse a la forma en que se enuncia «todo esto es la suma [*n(n+1)/2*] en consecuencia de tener los primeros enteros positivos» [405] y el estudiante que registró el acuerdo invirtió el orden [406], dado que en el registro escrito aparece como hipótesis, «*n(n+1)/2*» y como conclusión, «la suma de los *n* primeros enteros positivos». Cabe destacar que el equipo (**A**) no responde la tarea.

En la discusión grupal para determinar la hipótesis y la conclusión de la proposición dado que, el *si* y el *entonces* no aparecen de manera explícita en alguna de sus formas, los estudiantes muestran algunas discrepancias [464, 466 y 467]. Ante esta situación se sugiere revisar el papel de la hipótesis poniendo en duda [468] que la fórmula actúe como hipótesis. Luego se sugiere una *B-acción* para que reescriban el enunciado lo que ya había hecho el equipo **B** [471].

[463] Profesor: La que sigue [la suma de los *n* primeros enteros positivos es *n(n+1)/2*].
[464] Alumnos: Nosotros le pusimos que *n(n+1)/2* es hipótesis porque de ahí se concluye que es la suma de los primeros números enteros positivos.
[465] P: ¿De qué partimos ahí?
[466] As: Bueno de que son los primeros enteros positivos.
[467] As: También la parte de la fórmula se puede considerar como hipótesis.
[468] P: No necesariamente, porque esta fórmula se puede dar para otro tipo de números.
[469] As: La hipótesis sería entonces los *n* primeros enteros positivos.
[470] P: De manera inherente la hipótesis sería: tomemos los n primeros enteros positivos y entonces su suma es *n(n+1)/2*. Cómo podemos reescribir esto.
[471] As: Ya ven, yo lo había hecho así [se dirige al equipo].
[476] As: Si tomamos los primeros *n* enteros positivos.
[472] P: De acuerdo? entonces su suma es *n(n+1)/2* [asienten].

La siguiente proposición muestra la forma habitual de una implicación: *Si p y q son números reales positivos con* $\sqrt{pq} \neq (p+q)/2$ *entonces* $p \neq q$.
En el fragmento [409-413] se aprecia que, dada la forma habitual de la proposición, los alumnos identifican el si y el entonces *(R-acción)* y a partir de ello encuentran la hipótesis y conclusión (*C-acción*).

[409] Si *p* y *q* son números reales [positivos] con $\sqrt{pq} \neq (p+q)/2$ … todo esto es hipótesis.
[410] Queda nada más ese pedacito [entonces $p \neq q$] [asienten convencidos que es correcto].
[412] Esta es la hipótesis … [Si *p* y *q* son números reales [positivos con $\sqrt{pq} \neq (p+q)/2$].
[413] Esa es la hipótesis y esta es la conclusión [entonces $p \neq q$].

No obstante, en [414] una alumna pone a consideración del equipo el intercambio de los papeles de la hipótesis y la conclusión mostrando que aún no se reconoce la función del *si* y del *entonces.* Como respuesta en [415], el estudiante presenta argumentos (*B-acción*) que dan muestra de actitud de precisión y rigor al utilizar un ejemplo con el que intenta mostrar la incoherencia puesta en juego. Otro estudiante interviene en [417] para volver a la tarea que consistía sólo en identificar hipótesis y conclusión de la implicación tal como aparece en el enunciado propuesto.

[414] No, no puedes decir, *p* diferente de *q*, entonces *p* y *q* son números reales positivos ...
[415] ¿Cómo saber que son números reales positivos si sólo son diferentes? y ¿si son negativos?
[416] Pues es que léelo al revés para que veas qué tanta congruencia tiene, ¿no?, digo.
[417] No, así no es como aparece.

En el registro escrito ambos equipos determinan hipótesis y conclusión de forma correcta y en la interacción en gran grupo se desestima discutir esta proposición por considerarla una actividad trivial, aunque en la interacción en el equipo **B** esto no surgió de forma inmediata, como hemos visto con anterioridad.

La siguiente proposición en la que trabajan para identificar hipótesis y conclusión es: *cuando x es un número real, el valor mínimo de x(x-1) es al menos -1/4.*
Se percibe una *R-acción* de manera implícita de la necesidad del *si* y del *entonces* que se traduce en una *B-acción* en [418] al modificar la palabra *cuando* por el *si*.

[418] Si *x* es número real entonces el valor [mínimo de *x(x-1)* es al menos -*1/4*]…

Por otro lado en [419], al igual que en el fragmento anterior [414], encontramos que la misma alumna intenta cambiar el orden sin mostrar comprensión de la función de las palabras utilizadas para establecer la condición. Aunque ella misma se da cuenta de que no puede cambiar el orden [419] con lo que se muestra la influencia del argumento del extracto anterior [415] utilizado para persuadirla de invertir el orden en la implicación.

[419] O lo puedo ver al revés, si me dan esto como este, ¡ah no! pero no puedo decir que es real.

En [420] (*B-acción*), con la intención de convencerla, se enuncia la proposición de tal manera que se comprenda la función de la hipótesis. Sin embargo percibimos que es ese cambio (correcto) en la manera de enunciar la proposición combinado con la no comprensión del papel condicional de la hipótesis lo que le lleva a pensar que puede cambiar el orden de manera "arbitraria". Esto se confirma con su reacción en [422] sugiriendo que el cambio que propone es posible.

[420] La conclusión de que esto pase es depende que *x* es un número real [asienten].
[422] Bueno eso es lo que estaba haciendo con este: el valor mínimo de *x* por *x* menos 1 es igual a al menos un cuarto. A ver el valor mínimo de *x* por *x* […], ¿de aquí puedo llegar a que *x* es un número real?

Las siguientes aportaciones van encaminadas a que se de cuenta de la función de la hipótesis y la conclusión, más que pensar si de la conclusión puede llegar a la hipótesis para justificar su intercambio. Esto se consigue finalmente por la *B-acción* propuesta en [426].

[423] Es que sí puedes llegar, pero no.
[424] No, pero es que, sí, ¿no? ( ) ¡Ah no!
[426] Es que si puedes llegar pero más bien por culpa de esto pasa esto, no por culpa de esto pasa esto
[427] Ah ajá y esto es ( ) ¿Está bien así? [pidiendo que revisen su

[425] Pero puede ser otro número. reporte escrito, asienten los demás].

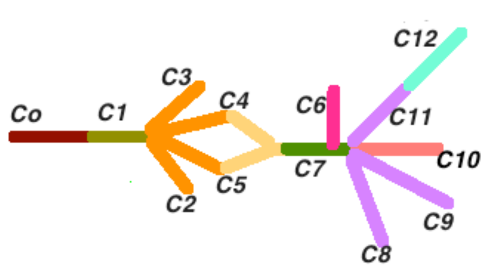
Cabe mencionar que con la misma estudiante ya se había encontrado en un fragmento anterior esta posibilidad de cambiar de manera arbitraria la hipótesis y conclusión con otra implicación (ver línea 406 p. 224.

En el reporte escrito ambos equipos contestan de forma correcta acerca de cuál es la hipótesis y cuál la conclusión de ese enunciado. En la socialización en gran grupo en [481] se aprecia un cierre que concentra los elementos importantes y los constructos obtenidos a lo largo de esta actividad, así como la necesidad y su utilidad para el proceso de demostración. También se retoman las actividades previas, rescatando las ideas clave y estableciendo la conexión correspondiente.

[478] […] [Cuando *x* es número real, el valor mínimo *de x(x-1)* es al menos *-1/4*] ¿cuál es la hipótesis?
[479] Alumnos: Cuando *x* es número real.
[480] As: Y la conclusión: el valor mínimo de *x(x-1)* es al menos *-1/4.*
[481] Profesor: […] cuando queremos demostrar una implicación debemos partir de que la hipótesis es *V* y a través de una serie de pasos, esos pasos quién no los va a dar, el área en la que estamos trabajando, la teoría previa que tenemos. A partir de la hipótesis y de la serie de pasos sustentados en la teoría previa tenemos que manipular y llegar a la conclusión. […] Cuando estamos demostrando algo en una implicación ¿qué diríamos? [1)] Qué cosas nos está dando la hipótesis y [2)] qué cosas conozco de la teoría […] y con todo esto y la hipótesis a través de un razonamiento deductivo llegar a la conclusión.
La idea de estas prácticas es acercarnos cada vez más a qué es lo que hay que hacer cuándo demuestras. La primera situación fue que construyeran "algo" a partir del nombre. Tenían que "definir"[…] Luego tenían una definición y a partir de ahí construían o representaban el objeto. Luego el siguiente paso es: qué tengo, qué es lo que me dan y a dónde quiero llegar.

4.4.1.6 Análisis de C-acciones anidadas en el modelo RBC de AiC

En el análisis de la hoja 3 hemos podido entresacar algunas construcciones que nos permiten mostrar el carácter anidado de las acciones ocurridas en el modelo RBC. Podemos observar como las construcciones que surgen de las interacciones se van conformando como ramas que crecen a partir de otras, unas veces como extensión o derivadas de una combinación de construcciones. En la figura 41 se muestran las *C-acciones* producidas a lo largo de esta actividad (no todas). A la derecha se describen las *C-acciones*, indicando cuándo ocurren, y si se producen en pequeño grupo (PG) o en gran grupo (GG).



C_0 (71 a-GG) Definición de proposición matemática
C_1 (78-GG) Criterio para identificar una proposición matemática en contexto algebraico específico
C_2 (84-86-GG) Uso de C_1 en contexto geométrico
C_3 (88-GG) Uso de C_1 en contexto algebraico diferente
C_4 (90-92-GG) Uso de C_1 e inicio de formas de argumentar el valor de verdad de implicación
C_5 (94-95-GG) Uso de C_1, para la identificación y argumentación del valor de verdad de implicación
C_6 (192-PG) Construcción del concepto de logaritmo
C_7 (prod. escrita-PG) Derivado de C_4 y C_5 sobre el valor de verdad de una implicación del que surge el "uso y papel de contraejemplos" **C_8** (312-GG) Papel

Figura 41. **C-acciones anidadas para la generación interactiva del conocimiento.**

condicional de la hipótesis
C_9 (313-GG) De C_7 contraejemplos para demostrar F
C_{10} (321,323,327,328-GG) Tabla de verdad de implicación
C_{11} (374-PG) La hipótesis se considera verdadera
C_{12} (453-454-GG) Forma de proceder para demostrar implicación (V/F)

Se puede apreciar cómo inicialmente se identifica una proposición matemática ligada a un objeto algebraico particular, $ax^2+bx+c=0$ (***C_1***). Esta construcción se retoma en otros contextos (***C_2, C_3, C_4, C_5*** *y* ***C_8***) lo que forma parte de un proceso de consolidación, dado que el constructo deja de depender del contexto en el que se ha generado y, se va fortaleciendo de manera paulatina y no limitándose a la tarea encomendada de decidir si se trata de una proposición matemática, sino que tratan de buscar argumentos para sustentar su valor de verdad (***C_4, C_5***). Al revisar el criterio para decidir si es o no proposición ***C_1*** se construye una nueva C-acción ***C_8***.

Una vez que los alumnos adquieren confianza en el manejo del constructo y pueden utilizarlo en otros contextos, intentan ir más allá conectándolos para construir un nuevo constructo (***C_7***) sobre el papel de los contraejemplos. En el proceso se producen ciertas interrupciones cuando necesitan construir otro concepto (***C_6***) lo que produce una construcción paralela (***C_6*** y ***C_7***). Este constructo se retoma en otra tarea donde surge ***C_{10}*** y se menciona que una técnica para probar que una proposición es *F* es exhibir un contraejemplo, y esto se hace ya de manera consciente.

Algunas construcciones se dan como extensión de otras, por ejemplo, primero se construye el papel de la hipótesis en la implicación ***C_{11}*** y después se extiende esta idea para señalar la forma de proceder cuando se quieren demostrar implicaciones ***C_{12}***. O la generación de un contraejemplo en una situación ***C_7*** se generaliza para probar que una proposición es falsa ***C_{10}***.

4.4.2 Hoja de trabajo # 4: Conectivos lógicos

Esta sesión se llevó a cabo el 15 de junio de 2009 durante una sesión de 90 minutos. El objetivo era destacar la importancia de los conectivos lógicos para obtener nuevas proposiciones compuestas de otras simples. Participaron también dos equipos.
Para conducir el análisis en la mayoría de las tareas seguiremos la dinámica de las anteriores sesiones, primero presentaremos las interacciones en pequeños grupos, los registros escritos y la socialización con el profesor. No obstante, en el desarrollo de algunas tareas consideramos que es mejor omitir alguna de las partes por considerar que no aporta más que lo que se deja ver del análisis de otro de los momentos.

4.4.2.1 Análisis de comprender la negación

Para esta tarea se les pide que discutan en equipos ocho enunciados, y que escriban el enunciado correspondiente cuyo significado sea el opuesto, para después compartirlo durante socialización en gran grupo. Los enunciados para construir su negación fueron: 1) a Sofía le gustan mucho las fresas, 2) a Oscar no le gusta la mayonesa, 3) hoy es un día lluvioso, 4) cada aula tiene una silla que no está rota, 5) todos los estudiantes son buenos, 6) al menos uno de mis compañeros está casado, 7) Sofía es alta y delgada y 8) $1 \leq x \leq 3$.

En la interacción en gran grupo, que refleja lo ocurrido en pequeño grupo, se aprecia que para construir las negaciones uno de los equipos omite el cuantificador [49] y el profesor explica la necesidad de utilizarlos [51]. En las negaciones de los siguientes dos enunciados (2 y 3) no se presenta ningún problema.

[48] Profesor: […] "A Sofía le gustan mucho las fresas" ¿cuál es el enunciado que indica la negación?
[49] Alumnos: A Sofía no le gustan las fresas [otros alumnos] A Sofía no le gustan "mucho" las fresas.
[51] P: No le gustan mucho. Aquí hay que entender el NO. La negación no significa el antagónico, […] Por ejemplo, en "yo sé mucho", "yo no sé mucho", puedo saber un poco, no quiere decir que nada, nada es el antagónico. Entonces, […] la negación es "a Sofía no le gustan mucho las fresas". […]

En las proposiciones 4), 5) y 6) aparecen cuantificadores y esto provoca que los estudiantes construyan las negaciones de manera errónea al no tenerlos en cuenta. En el registro escrito, que aparece a continuación, el patrón de negación del equipo **A** en los tres enunciados es: agregar sólo la palabra "no". En el caso de **B**, el patrón de negación es cambiar los cuantificadores "cada" por "todo", "todo" y "al menos uno" por "ninguno".

P_4:*Cada aula tiene una silla que no esta rota* $\boxed{A}$ Cada aula tiene una silla que está rota $\boxed{B}$ Toda aula tiene una silla rota
P_5:*Todos los estudiantes son buenos* $\boxed{A}$ Todos los estudiantes no son buenos $\boxed{B}$ Ningún estudiante es bueno
P_6:*Al menos uno de mis compañeros está casado* $\boxed{A}$ Al menos uno de mis compañeros no está casado $\boxed{B}$ Ninguno de mis compañeros está casado

Lo anterior muestra que los estudiantes no manejan adecuadamente los cuantificadores aún cuando dan muestra de haberlos utilizado, por ejemplo en las *R-acciones* donde exhiben un reconocimiento de "al menos uno" [60] o "para todo" [61]. Aquí podemos apreciar como a fuerza de repetir y enfatizar cuál es el cuantificador en cada caso, el profesor consigue que construyan (*C-acción*) de manera adecuada la negación del enunciado 4 [63]. Esta *C-acción* les lleva a construir de manera inmediata las negaciones de los enunciados 5 y 6 [65 y 67].

[55] Profesor: Cada aula tiene una silla que no está rota. [espera la negación]
[56] Alumnos: Cada aula tiene una silla que está rota.
[57] P: [vuelve a preguntar] La negación de "cada aula tiene una silla que no está rota".
[58] As: Cada aula tiene una silla que está rota.
[59] P: ¿Esa sería la negación? A ver analicemos
[60] As:Cada aula tiene al menos una silla que está rota.
[61] As: Para toda aula hay una silla rota.
[62] P: Aquí, cada aula tiene "una" silla no rota.
[63] As: Existe un aula con todas las sillas rotas.
[64] P: ¡Esa sería la negación! Hay que tener mucho cuidado con los cuantificadores. Si hay una, la negación es para todo. Luego "todos los estudiantes son buenos".
[65] As: Existe un estudiante que no es bueno.
[66] P: Existe un estudiante, ¿de acuerdo? A ver: "al menos uno de mis compañeros está casado
[67]As:Todos mis compañeros NO están casados.

Para los enunciados 7) y 8) que tienen el conectivo de la conjunción, los estudiantes en su registro escrito, muestran las siguientes negaciones:

P_7:*Sofía es alta y delgada*	$\boxed{A}$ Sofía no es alta ni delgada	$\boxed{B}$ Sofía no es alta o no es delgada
P_8: $1\leq x\leq 3$	$\boxed{A}$ $1>x>3$	$\boxed{B}$ $-3\leq x\leq -1$

En la socialización se observa que para ellos negar es equivalente a únicamente agregar "no", sin embargo, en el caso de la proposición 7) al socializarlo se da tiempo suficiente a los alumnos para reflexionar. Así en [71] se da la *C-acción* que da cuenta de que la "disyunción" niega la "conjunción". Para negar el enunciado 8) algunos alumnos cambian únicamente el sentido de la misma sin ocuparse del conectivo y eso los lleva a expresar de manera errónea la desigualdad [73]. Se dan cuenta de su error cuando el profesor escribe las dos desigualdades [74] asociándolas con un diagrama con intervalos [76] y construyen de manera adecuada la negación en la *C-acción* [79]. No obstante un alumno al socializar su producción asocia "significado opuesto" de la desigualdad con "opuesto" de un número y en [80 y 83] insiste en anteponer el signo "menos" a los números de la desigualdad. Nuevamente el profesor hace explícita la conjunción [84] y dibuja el intervalo en la recta [86]. Esto ayuda a que surja la *C-acción* que niega la desigualdad y es interpretada como complemento del intervalo [87, 88 y 89].

[68] Profesor: Sí. "Sofía es alta y delgada"[contestan los alumnos la negación] Sofía no es alta ni delgada.
[70] P: ¿Sofía no es alta ni delgada?
[71] Alumnos: ¡Ah! Sofía no es alta "o" no es delgada.
[72] P: $1 \leq x \leq 3$ [contestan los alumnos] $1>x>3$.
[74] P: Así, [escribe 1>x ; x>3, se expresa sorpresa de los estudiantes].
[76] P: A ver, está cumpliendo al mismo tiempo [dibuja un intervalo [1,3] y sitúa x dentro]. A ver cómo lo dirían en otras palabras.
[77] As: ¡Ah! que x es mayor o igual que 1 "y" que x es menor o igual que 3.
[78] P: ¿Cuál sería la negación?
[79] As: $1>x$ *o* $x>3$.
[80] As:Pero que no sería $-1>x$ o $x>-3$, porque es la negación ¿no? [El profesor pide que justifique].
[82] As: No, por qué [otro alumno cuestiona].
[83] As: Sí, con signo menos.
[84] P:[…]está cumpliendo dos condiciones $1 \leq x$ y $x \leq 3$ […] El enunciado es tipo *P y Q* ¿la negación?
[85] As: *NO (P y Q).*
[86] P: Sí, a ver, [dibuja el intervalo [1,3] con *x* dentro en la recta] ¿cómo niegas que x está aquí?
[87] As: Es el complemento.
[88] As: Ah sí, la unión de los $1>x$, $x>3$ [otro alumno complementa] $1>x$ o $x>3$.
[90] [Leen] determine valores de verdad de la negación. *P* es *V*, su contrario *F*, y si es *F*, (NO *P*) es *V*.

4.4.2.2 Análisis de construir la tabla de verdad de la conjunción

En esta tarea se les dan dos enunciados para que después de analizar su significado al agregar el conectivo "y" puedan construir la tabla de verdad de la conjunción. Los enunciados son, *P: hoy está lloviendo* y *Q: hoy hace frío.* Para el análisis omitimos el registro escrito, dado que fue el mismo en ambos equipos y la interacción en pequeño grupo nos da idea de su construcción.

En el trabajo en pequeño grupo se observa que para llenar la tabla de verdad no hay una discusión y análisis, al parecer es una tarea que encuentran fácil y directa. No obstante fallan al construir la última opción, es decir, si *P* es F y *Q* es F convienen en que *P y Q* es verdadero [25].

[23] [Leen] *P*: Hoy está lloviendo y *Q*: hoy hace frío. Este es de conjunción *P* y *Q*. Llenamos la tabla.
[24] La conjunción es este símbolo.
[25] Sí, el que abre para abajo. La primera *V* y *V*, es *V*. Luego [segunda] *V* y *F* es *F* y la otra igual [*F* y *V*].
[25] *F* y *F* es *V* [asienten].

En la socialización en gran grupo no se exhibe el error cometido por ambos equipos al considerar *F* y *F* como *V,* pues parece que no se presenta problema alguno. Al final el profesor puntualiza los aspectos importantes [96].

[90] Profesor:[…] Supongan que no han visto lógica. A partir de los enunciados tratemos de verificar la *V* o *F* de *P y Q*. A ver que *P* sea *V* y *Q* sea *V*. Está lloviendo (*V*)
[94] P: A ver *F* y *F* [contestan los estudiantes] También es F
[96] P: Si alguna de las dos no se cumple

y hace frío (*V*), ¿cómo sería *P* y *Q*?
[91] Alumnos: Verdadero
[92] P: Hoy esta lloviendo, *V*, y hoy no hace frío, *Q* es *F*. Entonces *P y Q* [contestan] Falso

entonces *P* y *Q* es *F*, deben cumplirse al mismo tiempo. En la tabla, con que alguna de las dos sea *F*, la proposición de la conjunción (*P y Q*) resulta *F*.

4.4.2.3 Análisis de construir la tabla de verdad de la disyunción no excluyente

A partir de dos enunciados, la tarea era que construyeran las tablas de verdad de la disyunción para el caso no excluyente (o bien *P* o bien *Q* o ambas). Para ello se les da la situación: En el escaparate de la librería de la universidad aparece escrito: «Nuestros clientes en posición de la credencial de estudiante o empleado de la universidad tendrán derecho al 15% de descuento». En esta tarea ambos equipos realizan el registro escrito en forma correcta y considerando que la interacción en equipo nos da la información suficiente hemos omitido el registro escrito.

En la interacción en equipo, encontramos *R-acciones* en las que reconocen el símbolo utilizado para la disyunción y lo asocian con la unión vinculada a su clase de lógica [26]. Con la finalidad de que se entienda la diferencia entre el sentido excluyente y el no excluyente, en [28] se exhibe una *B-acción* que ejemplifica tal distinción. Enseguida se aprecian *R-acciones* para reconocer las proposiciones que conforman la disyunción y la forma de la misma [29, 30 y 32]. Para la construcción de la tabla de verdad, se produce una *B-acción* en [33] que, aunque es correcta, no nos permite identificar si se entiende que esto es justamente en la parte donde se diferencia de la disyunción en el sentido excluyente. Se produce un cierto desacuerdo con las siguientes opciones de la tabla de verdad y se observa otra *B-acción*, para defender su postura de forma explicativa [37]. Finalmente la tabla de la disyunción no excluyente se obtiene de forma correcta.

[26] Acá el símbolo es disyunción es como una "v", si es la unión en lógica
[27] [Al leer que hay dos sentidos: excluyente y no excluyente] Pero no entiendo, ¿son dos símbolos?
[28] No, más bien aquí dice que hay dos maneras para la disyunción. Sí, por ejemplo, que diga hoy es "lunes o es miércoles", bueno, aquí es uno u otro. Pero puede haber un ejemplo también que contemple a los dos, "hoy es lunes o no es miércoles". Creo que a eso se refiere la "o" puede tomar a los dos al mismo tiempo o bien forzosamente a uno o a otro.
[29] [Leen] No excluyente, a ver "nuestros clientes en posición de la credencial de estudiante o empleado tendrán derecho al 15% de descuento" *P* es: estudiantes con credencial tienen 15%
[30] *Q*: empleados y luego [silencio] *P o Q*: estudiantes o empleados tendrán descuento
[31] Pues ponlos igual pero con o [escriben]
[33] [llenando la tabla de verdad de la disyunción no excluyente] *V o V* es *V*
[34] *V o F* es *F* [un estudiante muestra desacuerdo] No, es *V*
[36] Es *F* y también *F* o *F* es *F* no?
[37] [*V o F*] es *V*, porque aquí están contemplando que a un estudiante o empleado se les haga descuento. Entonces se cumple [*V*] si sólo a un grupo se le hace descuento.
[38] [asienten] y al revés también, *F o V* es *V* [asienten]

La interacción en gran grupo para socializar las respuestas transcurre sin problemas.

[97] Profesor: […] En el lenguaje cotidiano a veces decimos, "o hago esto o bien hago esto", utilizando el o pensando en hacer una cosa o la otra, pero no las dos, es decir, en forma excluyente. Pero también podemos tomar en consideración una cosa, o la otra o ambas, en el sentido NO excluyente. Lo que se plantea […] es que puedan hacer la distinción a

[99] P: Y *P o Q*.
[100] As: Estudiantes o empleados de la Universidad tienen 15% de descuento.
[101] P:[…] cómo serían los valores de verdad. Si son V los dos, podemos tener casos así.

partir de los enunciados y el contexto. […]«Nuestros clientes en posición de la credencial de estudiante o empleado de la universidad tienen 15% de descuento». Si en este caso *P* es: *estudiantes con credencial tienen 15% de descuento,* quién sería Q.
[98] Alumnos: Empleados tienen 15 % de descuento.

[102] As: Verdadero (*P o Q*).
[103] P: Si uno es *F* y el otro *V.*
[104] As: *V*, porque les hacen descuento si es uno de los dos (empleado o estudiante).
[105] P: Si los dos son *F* [responden los alumnos correctamente: Falso].

4.4.2.4 Análisis de construcción de la tabla de verdad de la disyunción excluyente

Para construir la tabla de verdad de la disyunción excluyente (o bien *P* o bien *Q* no ambas) la situación dada fue: Una niña se empeña en que su padre la lleve el domingo por la mañana al parque y por la tarde al cine de su barrio. El padre le dice: «No. Saldremos por la tarde e iremos al cine o al parque». En las interacciones en equipo los diálogos entre los estudiantes dejan ver respuestas rápidas sin mostrar dudas, bajo está consideración únicamente mostramos la interacción en grupo y las respuestas escritas que muestran diferencias.

En el registro escrito de la tabla de verdad para la disyunción excluyente el equipo **A lo** realizó de forma correcta, mientras que el equipo **B** falló en dos opciones; cuando *P* y *Q* son proposiciones *V*, ellos registran que *P* o *Q* es *V* y como veremos, lo hacen explícito en la socialización en gran grupo. También cuando *P* es *F* y *Q* es *V* fallan al considerar (*P* o *Q*) *F*, aunque en la opción anterior (*P* verdadera y *Q* falsa) consideran a *P* o *Q*, verdadera.

La socialización en grupo se da respondiendo los cuestionamientos del maestro de manera fluida y únicamente se discrepa cuando ambas opciones resultan *V* lo que se resuelve cuando un alumno exhibe una *R-acción* acerca del sentido excluyente de la situación [108].

[107] Profesor: […] *P* sería: *por la tarde iremos al cine.* A ver en este caso, si los dos son *V.*
[108] Alumnos: Verdadero.
[108] As: No //, es *F*. No se puede que vayan a las dos.
[109] P: Bien, en este contexto sería falso. Ahora, si van a uno y no van a otro [lugar].
[110] As: [*F o V*] Verdadero.

[111] P: Sí, entonces [en forma excluyente] *V* o *F* y *F* o *V* es V. Y ninguna [falsas ambas].
[112] As: Falso.
[113] P: […En] la forma excluyente y la no excluyente, las tablas de verdad son diferentes. En matemáticas debemos ser siempre muy precisos, no podemos estar decidiendo si a veces es excluyente o no excluyente. Hay una convención en matemáticas para considerar siempre la disyunción en el sentido no excluyente. […]

4.4.2.5 Análisis de construcción de la tabla de verdad de la implicación

Al día siguiente concluyen la hoja de trabajo 4. Al igual que antes, la tarea era construir tablas de verdad a partir del análisis de algunas proposiciones pero ahora se ocuparían de la implicación y de la equivalencia o bicondicional. En esta sesión se presentaron inconvenientes para la grabación, dado que se olvidaron los dispositivos necesarios. Por esta razón únicamente presentamos un análisis basado en registros escritos y en las notas sobre las observaciones realizadas por la investigadora.
Para construir la tabla de verdad de la implicación consideran las proposiciones, *P: hoy está lloviendo,* y *Q: Sofía y Oscar esta tarde verán una película,* una explicación breve de la implicación como conectivo entre enunciados, los símbolos utilizados ($\rightarrow$, “,”), la forma y su significado. Luego

se les pide que escriban el significado de la implicación y su recíproca a partir de los enunciados dados y que expliquen sus diferencias.

Los registros escritos de los estudiantes aparecen en la tabla 29. Podemos observar en el equipo **A** que los alumnos respetan el contenido de los enunciados y la forma de utilizar el conectivo de la implicación y a juzgar por su respuesta entienden la implicación en el sentido de dependencia de la hipótesis. En el caso del equipo **B** observamos que omiten "esta tarde" al construir la implicación y su recíproca, lo que se discute en la socialización destacando la importancia de tomar en cuenta toda la información dado que las proposiciones están limitadas a esa condición de temporalidad y cuando tratan con implicaciones en el contexto matemático es importante respetar todos los condicionantes. En cuanto a diferencias entre la implicación y su recíproca, en el equipo **B** exploran otras proposiciones del contexto cotidiano y concluyen que la principal diferencia es que el valor de verdad no siempre es el mismo.

Tabla 29. Implicación y su recíproca, respuestas de los equipos.

P→Q: $\boxed{A}$ *Si hoy está lloviendo entonces Sofía y Óscar esta tarde verán una película* $\boxed{B}$ *Si está lloviendo entonces Sofía y Óscar veran una película*

Q→ P: $\boxed{A}$ *Si Sofía y Óscar ven una película esta tarde entonces hoy estará lloviendo* $\boxed{B}$ *Si Sofía y Óscar ven una película entonces hoy está lloviendo*

¿Son iguales o diferentes los significados de las expresiones? Explica. $\boxed{A}$ *Son diferentes porque en una P está en función de Q y en otra Q está en función de P* $\boxed{B}$ *Son diferentes porque, por ejemplo: que llueva implica que haya nubes, pero, que haya nubes no implica que llueva.*

A continuación se comenta que existen formas equivalentes a este enunciado, se les muestran ejemplos y se les pide que intenten completar con otras.

En la tabla 30, podemos ver que el equipo **A** se limita a usar los enunciados para adaptarlos a las formas de las que se habla. En el equipo **B** nuevamente observamos que quitan la condición "esta tarde" y que no ponen suficiente cuidado en la escritura del enunciado. Al socializar se insiste en la importancia de ser lo más precisos en el lenguaje. Por último, en el equipo **B** presentan la forma de implicación interpretándola vinculada a la "ocurrencia". En el contexto cotidiano es frecuente vincular "ocurre" con "verdadero" y esto propicia que vean las proposiciones como "eventos". Esto ya se produjo y fue discutido en la hoja de trabajo 3 dedicada a las proposiciones (4.4.1 Proposiciones matemáticas, p.205).

Tabla 30. Respuestas de los equipos interpretando formas de implicaciones

Q sólo si *P* Si *Q* no sucede, tampoco sucede *P*

$\boxed{A}$ *Sofía y Óscar verán una película en la tarde sólo si hoy está lloviendo*

$\boxed{A}$ *Si Sofía y Óscar no ven una película en la tarde, tampoco estará lloviendo hoy*

$\boxed{B}$ *Que Sofía y Óscar vean una película sólo sí hoy está lloviendo*

$\boxed{B}$ *Si Sofía y Óscar no ven una película entonces tampoco hoy está lloviendo*

$\boxed{B}$ *Si P entonces Q*

$\boxed{B}$ *Si ocurre P entonces ocurre Q*

A continuación se les pide que llenen la tabla de verdad de la implicación y su recíproca recordando los enunciados sobre los que han trabajado. Se insiste en que para ello interesa saber, por ejemplo, cuándo es *F* el enunciado *P implica Q*. Se sugiere que en los cuatro casos conviene preguntarse cuándo el enunciado es *F* y que no pierdan de vista que este es un enunciado condicional, es decir, se sabe qué pasará en caso de <u>que llueva</u> y nada dice en caso contrario.

En el el equipo **B** se ha contruido la tabla de valores de verdad de manera correcta.

En el caso del equipo **A** observamos que cuando *P* es *F* y *Q* es *V* consideran que la implicación es *F*. En relación a este error (ver fragmento 442-455, p. 221-222, 4.4.1.4 Análisis de comprender hipótesis y conclusión en una implicación), cuando se trataba la tarea de decidir cuando un enunciado era proposición y, concretamente en relación a las implicaciones, en explorar acerca del papel condicional de la hipótesis se percibió la necesidad de establecer una relación entre la tabla de verdad y el proceso de demostración, en virtud de que un estudiante insistía en que la hipótesis podía ser *F* o *V*. En la socialización se retomó esto, para analizar por qué en los equipos **A** y **B** diferían en las respuestas del valor de verdad otorgado a *P implica Q* cuando *P* es *F* y *Q* es *V*. Para explorar y comprender esto, se consideraron las cuatro posibilidades de la implicación: 1) *P* (*V*), *Q (V)*; 2) *P (V)*, *Q (F)*; 3) *P (F)*, *Q (F)*; y 4) *P (F)*, *Q (V)*. Luego, el profesor los cuestionó y condujo la discusión para que reconocieran que las situaciones relevantes en el proceso de demostración serían 1) y 2); la primera para probar que *P* implica *Q* y la segunda para probar que *P* no implica *Q*. Luego, la discusión se enfocó en las opciones 3) y 4) donde la hipótesis es *F* y se concluyó que no importa el valor de verdad de la conclusión para determinar que la implicación es *V*, dado que de lo falso se deriva cualquier cosa. Concretamente se abordaron ejemplos que derivan en cuestiones *V* (e.g. si 1>7 entonces 7 es primo y si 15 es par entonces 5 divide a 15 y otros más).

Para el caso de la tabla de verdad de la recíproca (*Q* implica *P*) se observó el mismo error mencionado antes en el equipo **A** y en la socialización se insistió en la función de la hipótesis en el proceso de demostrar, que debe suponerse *V* y en que de una hipótesis *F* se deriva cualquier cosa y por lo tanto en la recíproca sí *Q* es *F* y *P* es *V*, *Q* implica *P* sería *V*, ver tabla 31.

Tabla 31. Construcción de tabla de verdas de la implicación y su reciproca en los equipos

P	*Q*	$P \to Q$	$Q \to P$
Verdadero	*Verdadero*	$\boxed{\text{A,B}}$ *Verdadero*	$\boxed{\text{A,B}}$ *Verdadero*
Verdadero	*Falso*	$\boxed{\text{A,B}}$ *Falso*	$\boxed{\text{A}}$ *Falso* $\boxed{\text{B}}$ *Verdadero*
Falso	*Verdadero*	$\boxed{\text{A}}$ *Falso* $\boxed{\text{B}}$ *Verdadero*	$\boxed{\text{A,B}}$ *Falso*
Falso	*Falso*	$\boxed{\text{A,B}}$ *Verdadero*	$\boxed{\text{A,B}}$ *Verdadero*

Se les propone el ejemplo; Eduardo dijo: «voy al banco y si está abierto traeré mil pesos». Usando esto se les pide que realicen una deducción si se sabe que «viene con los mil pesos». En ambos equipos la respuesta fue adecuada, «Entonces el banco está abierto».

4.4.2.6 Análisis de construcción de la tabla de verdad de la bicondicional

En esta tarea se da una breve introducción a este conectivo ($\leftrightarrow$) y a su uso en matemáticas para indicar que se dan de manera simultánea los casos $P \to Q$ y $Q \to P$. También se indica que se leerá como *P si y sólo si Q* o bien *P es necesario y suficiente para Q*. Los alumnos con ayuda de las tablas anteriores deben completar la tabla de valores de verdad de la bicondicional.
En la tabla 32 encontramos que los dos equipos crean de forma correcta la tabla. No obstante, vienen arrastrando el error derivado de la tabla de la implicación y la recíproca, que al final fue atendido en gran grupo y al socializar los resultados fueron los alumnos quienes corrigieron su error mostrando comprensión.

Tabla 32. Respuestas de los equipos a la tabla de verdad de la bicondicional.

P	*Q*	$P \to Q$	$Q \to P$	$P \to Q$ y $Q \to P$	$P \leftrightarrow Q$
V	V	$\boxed{\text{A,B}}$ V	$\boxed{\text{A,B}}$ V	$\boxed{\text{A,B}}$ V	$\boxed{\text{A,B}}$ V
V	F	$\boxed{\text{A,B}}$ F	$\boxed{\text{A}}$ F $\boxed{\text{B}}$ V	$\boxed{\text{A,B}}$ F	$\boxed{\text{A,B}}$ F

F	V	$\boxed{A}$ F $\boxed{B}$ V	$\boxed{A,B}$ F	$\boxed{A,B}$ F	$\boxed{A,B}$ F
F	F	$\boxed{A,B}$ V	$\boxed{A,B}$ V	$\boxed{A,B}$ V	$\boxed{A,B}$ V

Análisis de la tarea de resumen de conectivos lógicos

Aquí se les presenta una tabla con algunos espacios llenos y se les pide que la completen para tener un concentrado de los *conectivos lógicos.*
En esta tarea realizan el llenado de espacios vacíos sin problema, sin embargo esto fue antes de la socialización y no se dieron cuenta de que habían cometido antes algunos errores.

Nombre	*Notación*	*Significado*	*Cuándo es verdadero(tautología)*
Negación	$\boxed{A,B}$ $\neg P$	$\boxed{A,B}$ *No P*	$\boxed{A,B}$ *P es falso*
$\boxed{A,B}$ *Conjunción*	$P \wedge Q$	$\boxed{A,B}$ *P y Q*	$\boxed{A,B}$ *P y Q son verdaderos*
$\boxed{A,B}$ *Disyunción*	$\boxed{A,B}$ $P \vee Q$	*"P o Q"*	$\boxed{A}$ *P o Q son verdaderos* $\boxed{B}$ *Excepto cuando P y Q son falsos*
Bicondicional	$\boxed{A,B}$ $P \leftrightarrow Q$	$\boxed{A,B}$ *P si y sólo si Q*	*P, Q* tienen el mismo valor de verdad.
$\boxed{A}$ *Condicional*	$\boxed{A,B}$ $P \rightarrow Q$	$\boxed{A,B}$ *Si P entonces Q*	Excepto cuando *P* es verdadero y *Q* es falso.

Tabla 33. Respuestas de los equipos al completar el concentrado de conectivos lógicos

4.4.2.7 Análisis de leyes lógicas

Esta tarea fue posterior a la socialización de las tareas anteriores. Para empezar se les da la definición de una *ley lógica* como una proposición que es *V* cualquiera que sea el valor de verdad o falsedad de sus componentes. Enseguida se les proporciona el ejemplo de la ***ley de no-contradicción***: *no-(A y no-A)* o bien con símbolos $\neg(A\wedge\neg A)$ dado que su tabla de verdad es

A	$\neg A$	$A\wedge\neg A$	$\neg(A\wedge\neg A)$
V	*F*	*F*	***V***
F	*V*	*F*	***V***

Finalmente la tarea de desafío es que comprueben que las siguientes son leyes lógicas

1) *Ley del tercero excluido*: *A o no-A*
2) *Ley del método de demostración por contraposición: (A implica B) equivale (no-B implica no-A)*
3) *No-(A o B) equivale a (no-A) y (no-B)*
4) *(o bien A o bien B) equivale a [(A y no B) o (no-A y B)]*
5) *Ley método reducción al absurdo: (A implica B) equivale [(A y no-B) implica (P y no-P)*

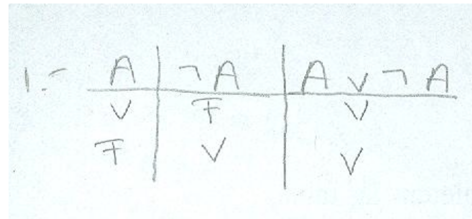
El equipo **A** muestra justificaciones rápidas y poco cuidadas. En 1) aunque es cierto lo que escriben, sin embargo, dado que en matemáticas la disyunción es no excluyente, falta agregar que en el caso tratado *A* y *No A* son excluyentes. En 2) al parecer toman en cuenta que en la bicondicional se da una tautología cuando *P y Q* tienen el mismo valor de verdad, sin embargo no analizan las componentes de la bicondicional. En las respuestas de la tabla 34, se limita a interpretar de manera vaga lo que les presentan como ley lógica.

Tabla 34. Respuestas del equipo A a convencer de las leyes lógicas

$\boxed{A}$ *1) Como es una disyunción con que se cumpla una de las dos la proposición es V* *2) Si los dos enunciados son F o V, la proposición es V*

3) ¬(A vB)= ¬A∧¬B; en la primera parte ponemos que no (A o B) o sea que A o B no van a pasar y es lo que estamos diciendo en la segunda parte, va a pasar no A y no B
4) (A vB)=(A∧¬B) v(B∧¬A); en la primera parte tenemos que puede ser V, A o B o ambos y en el segundo lado nos separa el hecho de que pueda ocurrir A v¬B o bien ¬A vB lo que concluye que puede ocurrir cualquiera de los dos o ambos
5) A→B=(A v¬B) →(P v¬P); en la primera parte si pasa A pasará B, en la segunda parte tendremos que si pasa A pero no pasa B, eso implica algo F pues P y ¬P es F entonces la implicación es V y esta es una ley lógica.

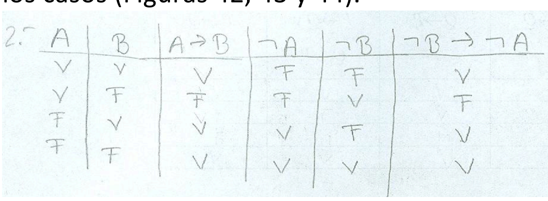
En las respuestas del equipo **B** (mostramos algunas), en los casos en que se da la equivalencia (2, 3, 4 y 5), sólo faltó hacerlo explícito en sus tablas agregando la columna de la bicondicional para la tautología. Por ejemplo en 2) la columna para (A→B⇔No B→No A). No obstante han mostrado un buen manejo en todos los casos (Figuras 42, 43 y 44).



1.-

A	¬A	A v ¬A
V	F	V
F	V	V

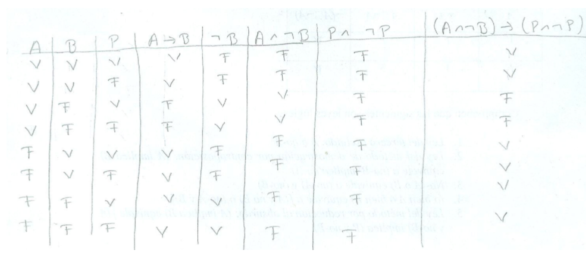
Figura 42. Producción equipo B. Ley del tercero excluido (A o no-A)



2.-

A	B	A→B	¬A	¬B	¬B → ¬A
V	V	V	F	F	V
V	F	F	F	V	F
F	V	V	V	F	V
F	F	V	V	V	V

Figura 43. Equipo B, demostración por contraposición



A	B	P	A→B	¬B	A∧¬B	P∧¬P	(A∧¬B)→(P∧¬P)
V	V	V	V	F	F	F	V
V	V	F	V	F	F	F	V
V	F	V	F	V	V	F	F
V	F	F	F	V	V	F	F
F	V	V	V	F	F	F	V
F	V	F	V	F	F	F	V
F	F	V	V	V	F	F	V
F	F	F	V	V	F	F	V

Figura 44. Equipo B. Reducción al absurdo.

4.4.3 Hoja de trabajo #5: Uso de ejemplos y contraejemplos

Esta hoja se llevó a cabo el 17 de junio de 2009 con una duración de 95 minutos, con ella se pretendía que se familiarizaran con el uso de ejemplos y contraejemplos en el contexto de la demostración matemática. Deben entender que para probar la falsedad de una proposición es suficiente exhibir un ejemplo en el que no se cumpla (contraejemplo), mientras que para probar la verdad de la proposición no es suficiente mencionar algunos casos, de manera que es necesario buscar estrategias para agotar todos los casos.

Para lograr lo anterior se organizó la actividad en cinco tareas que se trabajaron en pequeños grupos y posteriormente se socializaron en gran grupo.

En la primera tarea se les pedía que, a partir de la afirmación, *en este salón todos tienen menos de 19 años,* describieran algún camino para averiguar si el enunciado era *F* o *V*. En la segunda tenían que mencionar qué se necesita para probar que un enunciado es *F* y qué para probar que es V. En la tercera consigna había que refutar tres proposiciones dadas. En la cuarta se pedía que ensayaran con diferentes números naturales para verificar la proposición, *para todo número [natural] n, se tiene que* n^2+n+41 *es primo*. Mediante una tabla podían realizar sus registros para justificar cómo demostrarían que la proposición era *V* o *F.* Para finalizar la actividad relacionada con el uso de ejemplos y contraejemplos, se les mostró (tarea cinco) un video de una serie televisiva conocida (Dr. Who) en la cual aparece un acertijo cuya respuesta hace posible el acceso a una habitación de alta seguridad[32]. Para resolver el acertijo era necesario descubrir que se trataba de números primos felices. Este concepto fue previamente abordado en el bloque I de esta ingeniería en relación con la construcción de definiciones (ver 4.3.1.3 Análisis de la parte II: Construcción de números felices y primos felices, p. 172). Para complementar la tarea y para que los estudiantes tuvieran control sobre la veracidad de la respuesta ofrecida, inmediatamente después se les pedía que respondieran y justificaran una serie de preguntas.

4.4.3.1 Análisis de involucrar un número finito de casos

En esta tarea, a partir de la afirmación, *en este salón todos tienen menos de 19 años,* los alumnos describieron algún camino para averiguar si el enunciado era *F* o *V*. En la interacción en el equipo **A** el proceso de construcción de la respuesta se aprecia en la transcripción.

[1] En este salón todos tienen menos de 19 años queremos saber si es F o V ¿qué podemos hacer?
[2] Ir preguntado de uno en uno.
[3] No, con saber que sólo uno de ellos tiene más de 19 años.
[4] […] ¿menos de 19 años? vas preguntando de uno en uno y si te sale uno que no, con eso.
[5] Al menos uno mayor de 19 años.
[6] Sí, esos se van checando de uno en uno comprobando el enunciado y si encontramos un alumno mayor de 19 años ¿algún alumno? Con un alumno, así el enunciado es *F*. De no ser así es V.

Aunque no se muestra la interacción en el equipo **B** en su producción escrita concluyen que: «[Al] *preguntar a todos los integrantes del salón y con uno solo que no tenga 19 años la afirmación es F. Pero si todos tienen menos de 19 años la afirmación es V»*
Las respuestas de ambos equipos dejan ver una acción de reconocimiento; para confirmar que la afirmación es *F* basta con exhibir un ejemplo para el que no se cumpla. Y ambos equipos también sugieren que para probar que es *V*, todos los posibles ejemplos deben confirmar la afirmación. A pesar de ello, ninguno de los equipos considera el caso en que un estudiante tenga 19 años, para ellos lo contrario de menor es mayor y no mayor o igual.

En la discusión en grupo tampoco se profundiza en el caso que se tenga un alumno de 19 años.

[212] Profesor: Vamos a revisar tenemos la afirmación que todos en este salón tienen menos de 19 años, cómo podemos determinar que es *F* o *V*.
[213] Alumno: Escoger o revisar a todos los alumnos para ver cuántos años tienen y si encontramos uno, al menos a uno que tenga más de 19 años es *F.*

4.4.3.2 Análisis de cómo probar *V* o *F*

En esta actividad se les pedía que mencionaran qué se necesita para probar que un enunciado es *F* y qué para probar que es *V*. En la interacción en el equipo **A,** se observa que para probar que un enunciado es *F* se da una *R-acción* al reconocer la necesidad de encontrar un ejemplo que cumpla con la hipótesis y que «contradiga el enunciado» [8 y 11], o bien la conclusión sea falsa. Ellos pretenden probar que es *F* el enunciado, la palabra utilizada por ellos "contradiga" los lleva a

[32] La versión en inglés del fragmento de la serie que fue utilizado en la actividad está disponible en http://www.youtube.com/watch?v=ee2If8jSxUo (julio de 2009) última consulta noviembre 2011.

enfatizar que el ejemplo debe ser *V* [9, 14, 16 y 17]. Por otra parte, consideran que «no encontrar ningún ejemplo que haga *F* el enunciado» [16] constituye una prueba de que es verdadero, no obstante “no encontrar” no constituye una garantía de no existencia.

[7] Probar que un enunciado es *F*, para probar que un enunciado es *F* que se necesita ¬
[8] Encontrando un ejemplo que contradiga el enunciado ¿no?
[9] Que sea verdad, encontrar algún evento [asienten].
[11] Que contradiga lo que dice el enunciado.
[12] Sí, pero si contradice, qué contradice el enunciado, pero lo que contradice es algo. Tenemos que saber que eso sea V un enunciado que contradiga al enunciado que estamos probando.
[13] Me estás confundiendo.
[14] No, mira. Tenemos un enunciado, queremos probar que es *F* ¿no? Tenemos que encontrar un contraejemplo de este, pero ese ejemplo debe ser *V* [cumplir con la hipótesis], porque si no es *V* no estamos demostrando nada. Sí ¿no?, ¿están de acuerdo? o ¿qué tenemos que hacer?
[15] Más bien un ejemplo.
[16] Para probar que el enunciado es *F* sería un contraejemplo del enunciado. Encontrar un ejemplo *V* que contradiga al enunciado. Y para probar que es *V*, no encontrar ningún ejemplo que contradiga.
[17] Un ejemplo *V* que contradiga el enunciado.
[18] Es lo mismo, pero bueno está bien, lo ponemos así.
[19] Bueno yo lo entiendo como encontrar un ejemplo *V* […] que contradiga que el enunciado es *F.*
[20] Se necesita encontrar un ejemplo *F* del enunciado, no un ejemplo *V* que contradiga el enunciado.
[21] Un ejemplo *V* que contradiga el enunciado.
[22] Encontrar un ejemplo *V* que contradiga el enunciado o no encontrar un ejemplo *V* que no contradiga el enunciado…. ¿No?
[23] Un ejemplo que contradiga el enunciado.

En [25] y [30] observamos, al igual que Lehrer & Romberg (1999), que la dificultad para encontrar un contraejemplo es tomada como una verificación de la proposición. También se aprecia que no todos entienden ejemplo y contraejemplo de la misma manera.

[25] Es que no encontrar a ningún ejemplo sería como encontrar algún contraejemplo.
[26] Pero todos los ejemplos van a cumplir con el enunciado.
[27] Sería no encontrar algún ejemplo, ¿no?
[28] Pues, ninguno [se muestran dudosos].
[30] Mira estos 3 son ejemplos que contradicen al enunciado. Si encuentro uno de ellos, el enunciado es *F* o sea que no encontrar ninguno de ellos significa que el enunciado es *V*. Sí ¿verdad? No encontrar ninguno de ellos puedo decir no encuentro ninguno de ellos [asienten].

El equipo **B** en su producción escrita registró que el acuerdo era que «*para probar que el enunciado es F con al menos una de las condiciones del enunciado que no se cumpla»* y «verdadero *que todas las condiciones establecidas por el enunciado las cumpla»* En esta respuesta se toma en cuenta que todas las condiciones establecidas en el enunciado se cumplan para que sea *V* y si una de ellas no se cumple sería *F*.

En la interacción en gran grupo no se exhibe el conflicto de la discusión en pequeño grupo, encontrar un ejemplo *V* que contradiga el enunciado, es decir un contraejemplo [17 dos párrafos atrás]. Aquí se aprecia que para probar que un enunciado es *F* es suficiente encontrar un ejemplo que no cumpla [215], es decir que haga *F* el enunciado. Aunque esto último no se hace explícito ni se insiste en ello como en la discusión en pequeño grupo.

Para que sea *V* el enunciado se dan nuevamente *R-acciones* de la necesidad de ver que todos los ejemplos lo cumplan [218] y para que sea *F* es suficiente uno que no cumpla. Al integrar las *R-acciones* se produce una *B-acción* que aprovecha el profesor para mencionarla como técnica de demostración [219]. Sin embargo algo que tampoco entra en la discusión (ni en grupo, ni en equipos) es que la dificultad para encontrar el contraejemplo (si no han sido exploradas todas las posibilidades) no es suficiente para que el enunciado sea tomado como *V*.

[214] Profesor: Cómo probarían que es F un enunciado.
[215] Alumnos: Encontrando un ejemplo que no cumpla.
[216] P: Sí, encontrando uno que no cumpla. Y qué hacer para ver sí es verdadera.
[218] As: Ver a todos.
[219] P: Que se cumplan todos ¿verdad? Es algo exhaustivo. Eso que están haciendo es una técnica de demostración. Regularmente cuando yo pruebo que algo es *V* busco alguna estrategia para ver que todos los casos son *V*, aunque no pregunte uno por uno. Para probar que es F ¿qué basta?¬.
[220] As: Encontrar uno.

4.4.3.3 Probar falsedad o refutar

En la tercera tarea había que refutar que: 1) Para todo número real x, $x^2>x$, que 2) Todo número primo es par, y por último que 3) para todo p primo, existe un entero k tal que $p=2k+1$.
Para el desarrollo de la tarea, en el equipo **A,** para el primer inciso exhiben como contraejemplo el 1 (*R-acción*), seguida de *B-acciones* [38-41] que justifican el contraejemplo y conllevan un acuerdo general que constituye una prueba de que la proposición es *F* [42].

[33] Dada la falsedad de los siguientes afirmaciones vamos a encontrar un contraejemplo. Para todo real x , $x^2 > x$ […] x …x^2 ((Pva)).
[36] Existe un número real x, $x^2 >x$ tal que.
[37] El *1* [otro alumno argumenta] Sí, 1^2 no es mayor que el *1*, $1^2=1$, por lo tanto, *1*.
[39] x^2 no es mayor que x.
[40] Más bien, sería *1*.
[41] ((Mm)) x^2 no es mayor.
[42] Exacto. Eso que le pongas y es falso.
[43] Por eso x no es mayor.

En relación a la consigna anterior, no se incluye el diálogo del equipo B pero en su producción escrita se muestra que el contraejemplo encontrado por ellos es $x=1/2$ y justifican, como *B-acciones*, que: $x^2=¼$ y $¼<1/2$. Esto también se muestra en gran grupo [226].

[221] Profesor: Prueben la falsedad o refuten las siguientes afirmaciones, es lo que sigue. A ver para todo número real x, $x^2>x$, ¿cómo es?
[222] Alumnos: Falso.
[223] P: Falso. Por ejemplo? ¬.
[224] As: ½ [otro alumno menciona otro ejemplo], el 1.
[226] P: ½ o 1 muy bien; *1>1* y *¼>1/2* son desigualdades falsas […].

Para refutar la siguiente proposición en el equipo **A** recurren a una *R-acción* cuando utilizan una de las definiciones producidas en una sesión previa de esta ingeniería en relación con el enunciado *todo número primo es par* en [45]. A partir de ahí tienen lugar *B-acciones* para exhibir como contraejemplos el 3 y el 5. Además, esta consigna se caracteriza porque sólo un ejemplo es *V* y cualquier otro constituye un contraejemplo y se dan cuenta de ello (*R-acción*) al mencionar que los primos más bien tienen la forma *2k+1* [45] y que sólo 2 es un ejemplo verdadero [46 y 49] y los demás constituyen contraejemplos.

[44] Todo número primo es par.
[45] Para todo p primo existe un entero k tal que $p =2k$, para todo p primo $p=2k$. El 2, ¿no?. Más bien son [de la forma] 2 k más 1, porque y ¿qué sería 3?
[46] No, el 2 sí es un ejemplo, bien.
[47] ¿Por qué no?
[48] El 5.
[49] No puedes multiplicar ningún número por 2 y sumarle 1 que te dé 2 [respuesta a la línea 47].

En el equipo **B** no se agrega la interacción pero en el registro escrito muestran al 7 como un contraejemplo justificando que «7 es número primo y no par». En gran grupo se acuerda que casi todos los primos funcionan como contraejemplo, aunque no mencionan la excepción (2).

[226] […El siguiente] Todo número primo es par ¬.
[227] Alumno: Falso. Por ejemplo con 3,5,… [otro alumno interviene] Casi todos.

Para el tercer ítem de esta tarea, en el equipo **A** no tienen en cuenta que mientras en el anterior sólo un ejemplo hacia *V* la proposición y cualquier otro primo era un contraejemplo, ahora es lo contrario, únicamente el 2 es un contraejemplo y cualquier otro primo hace *V* la proposición. Probablemente esto hace que algunos se concentren en buscar cómo hacer que el 2 tenga la forma *2k+1* [51, 57, 59 y 66] y otros traten de convencerlos (*B-acciones)* de que es un contraejemplo [54, 55, 61 y 67] y por tanto la proposición es *F*. En el registro escrito de este equipo se percibe poco cuidado en el uso de cuantificadores y del dominio de *k* al puesto que escriben «*para p=2, 2k+1≠2*».

[50] Para todo *p* primo existe un entero *k* tal que *p=2k+1*. Sí, *2 x 2, 4*; *+1, 5* ¿cuál no te da un primo?
[51] No. Pero queremos encontrar de qué forma encuentras el número *2.*
[52] Ah porque es primo verdad [muestran acuerdo].
[54] No hay forma de encontrarlo [otros mencionan que no es posible].
[57] Ah, o sea, por ejemplo ( ) para encontrar [buscan los intentos escritos en sus notas].
[59] Para encontrar *p=2* [muestran acuerdo].
[61] No puedes multiplicar *2 x k+1* y que te dé igual a 2, no [muestran acuerdo].
[63] Ningún entero pues [asienten].
[65] Porque si pones *1/2* funciona.
[66] Un medio por *2 +1* funciona, pero como que están diciendo que *k* sea un entero.
[67] Entero, entonces no.

Por otra parte el equipo **B** registra que «cuando *k=4 ⇒ 2(4)+1=9*. El número 9 no es primo». Este equipo no toma en cuenta que éste no es un contraejemplo, dado que la proposición especifica que es *para todo primo p* y justamente el 9 no es primo. Esto se recupera en la discusión en grupo [233], sin embargo el profesor sólo menciona que no es contraejemplo sin ofrecer argumentos para convencerlos y tampoco provoca que los alumnos reflexionen por qué no lo es [234]. En esta parte no hay una *R-acción* del papel de la hipótesis.

[230] Alumnos:[El maestro pregunta si Para todo *p* primo, existe un entero *k* tal que *p= 2k+1*] Es falso.
[231] Profesor: Cuál contraejemplo
[232] As: *2.*
[233] As: *4* porque *p* es *2(4)+1.*
[234] P: *2* sí, pero *4* no.

4.4.3.4 Análisis de decidir verdad o falsedad

Se les presenta la proposición «Para todo número [natural] *n*, se tiene que n^2+n+41 es primo», con una tabla para ensayar con diferentes números naturales, registrar los resultados de la evaluación y decidir si éste es primo. Luego se les pide que indiquen cómo demostrar la *V* o *F*.

En el equipo **A** se analiza la transcripción, no hemos podido seguir las ideas en el orden de las intervenciones. Al escucharlo repetidas veces se percibe que se siguen tres líneas discursivas y que insistentemente se saltan de una a otra. Las líneas son: 1) ensayar con diferentes números, 2) considerar la paridad de *n* y 3) probar por inducción matemática manipulando expresiones algebraicas de manera errónea en el afán de acomodar los cálculos para que resulte *V*. De acuerdo con esto hemos dividido en tres fragmentos la transcripción y análisis.

Fragmento 1. Ensayar con diferentes números

Siguiendo la interacción del equipo **A** vemos que en el enunciado faltó especificar el dominio de los números y asumen que deben ser enteros [70]. Esto propicia que un alumno deje ver que no tiene claro el uso de la hipótesis [71] y esperaba ensayar con números primos. Más adelante [89] el profesor aclara que *n* debe ser número natural. Mientras tanto, como *B-acciones*, ensayan evaluando la expresión para algunos valores (3, 4, 5, 7) y obtienen como resultado un número primo. Primero atribuyen este hecho a que prueban con primos (3, 5) y luego evaluan con un número que no sea primo [80 y 82] y obtienen el mismo resultado. Intentan encontrar un patrón basados en los ejemplos, o patrón basado en los resultados (ver p. 26 de este documento o Harel 2001, p. 191) y deducen que el 1 (unidad en 41) los vuelve impares, ya que en el paso previo a sumar el 41 tienen un número par [74, 82, 88 y 92]. Hasta ahora consideran que el enunciado es verdad, aunque en [87] buscan un contraejemplo como *R-acción* de que la dificultad para exhibir un contraejemplo no garantiza la no existencia.

[68] Para todo número entero *n* se tiene que n^2+n+41 es número primo.
[69] […] hay que hacerlo con otros números, pero no dan instrucciones puede ser cualquier número.
[70] Ajá, para todo número entero *n.*
[71] Aunque no sea primo.
[72] El *3, 4* y el *5*, ¡ah no! [otro alumno] El *4* y el *5.*
[74] A ver *3* sería *3 x 3, 9* más *41, 53*, ¿*53* es primo? [contesta un compañero] *53*, no. Sí perdón
[79] Sí // Sí o sea entre que lo divides *53* por, () 5 no, () sí es primo, ¿no?
[80] ¿Qué número no es primo? A ver si agarramos uno [otro alumno muestra desesperación: Pero cuál]
[82] El *4*. A ver *4* por *4*, *16*, más *4*, *20, 20* más *41, 61.*
[83] *61* es primo ¿no?, *3*, entre *3*, (). ¡A ver espérame! un número que no sea primo ().
[85] El número que nos dió. Por ejemplo aquí nos dió *61* ¿no? [muestran acuerdo].
[87] 61 sí, pero para contradecirlo, hasta ahorita está siendo verdad, ¿encontramos un ejemplo que no sea verdad*?*.
[88] *7 x7, 49* [Interviene el maestro para pedirles que consideren a *n* un número natural].
[90] *49*, no.
[92] Bueno hasta ahorita está saliendo verdad, pero si encontramos un ejemplo que no sea cierto es falso*.*

Siguen buscando un contraejemplo y ensayan (*B-acciones*) con otros números mostrando su creencia de que la búsqueda del contraejemplo está vinculada con el tamaño del número [102]. Ensayan con el 144 y obtienen 20921, el cual es primo, pero sustentan a partir de revisar que no es divisible entre algunos números (*7, 3, 5, 6, 11, 13)* y en consecuencia no son divisores tampoco sus múltiplos [115].

[102] A ver dime cualquier número Dulce, pero grande [contesta que *144*].
[104] Ahora *144* al cuadrado, más *144*, más *41* (), es *20921.*
[107] *20921* entre *7* no, espera.
[108] ¿Qué era? [contesta un estudiante] *20921.*
[110] Entre *7*, no. Entre *3*, no [otro estudiante] *5* no, *6* no, *9* ¬.
[115] No, porque no puedes dividirlo entre *3,* no se puede entre *9.*
[116] Ah no, *10, 11, 12*, entre *11*. //No.
[118] *13, 13* entre los números primos ¿verdad? *14, 15, 16, 17*.
[120] Se me hace que este sí es primo, *20921* es primo. Se
[149] A ver díganme otros números. ¿Cuál más? [responde otro compañero] El *15* el *16* el *73.*
[153] ¿Cuál me dijo Dulce? *144*, ¿verdad? [apoyan la idea].
[155] *20000* que me dijiste Dulce // [Risas y responde] (Mm) *20921*.
[158] Ese es el del *7*.
[159] ¿Cuál es? [le contesta un compañero] El *33.*
[161] *11* [asienten].
[163] *10* por este es *141*.
[164] Todos son primos ¿no?
[165] *97* espérate *97*, entre *3*, no, entre *7*, no,

me hace que sí es primo

algo que de *27*, el *9* pero *3 x 9, 27* y ese no

Fragmento 2. Consideran la paridad de n

En el siguiente fragmento el equipo **A** insiste en generalizar a partir de la búsqueda de un patrón basado en resultados de los ejemplos (RPG ver p. 26 y Harel 2001, p. 191). Esto se ve en [122] donde expresan que el número obtenido de n^2+n es siempre par y al sumarle *41* resulta impar. Este patrón lo basan en los ejemplos encontrados y no en su estructura. Aunque esta conjetura es cierta y es sencillo probarla sustituyendo *n por la expresión de números pares e impares respectivamente* (*2k o 2k+1*) y realizando los cálculos algebraicos correspondientes para ver que n^2+n es siempre par, no lo hacen. Ensayan también sobre la paridad vinculando con fuerza la definición de número primo asociada a número impar. Esto lo vemos en [132, 134] cuando piensan en el *2* como no primo y en [137,138] número primo lo entienden como impar. No obstante en [188] un alumno hace la distinción considerando que no todos los impares son primos. Encontramos en esta parte que toda la discusión descansa en argumentos basados en los resultados de los ejemplos.

[93] Sí es *V*, porque mira el *1* nos los va a hacer impares. Por ejemplo *6 x 6, 36* más *6, 42 + 41, 83* ().
[121] Es que aparte ya tenemos que es verdadero, por eso.
[122] Ajá. Esto es un primo ¿verdad? Pero aquí te va a salir impar…
[123] Ajá porque un impar [n] más impar es par [$n+n^2$] siempre. Luego par más impar [*41*] es impar.
[124] Sería impar con par es impar.
[125] Es que puede ser par también [no aprueban se muestran dudosos].
[127] Con el *2* [intentan probar que n^2+n+41 es primo y *2* es primo].
[128] Sí, pero nada más con el *2* no.
[129] Y uno que no fuera impar [*n* par]. Este par más un par te da un par [n^2+n] más impar [*41*], impar.
[130] Ajá. Que puede ser un número primo.
[132] ¡ay pero es que *2* no es!, entonces no cumple para todos [demandan explicación] A ver, ¿cómo?
[134] Con el *2* cualquier número que agarres de *n* va a ser un número par. Entonces no es primo.
[135] A ver. No te entiendo.
[136] Que si *n*=0 y esto decimos que es *2*, pero es que eso no nos da *2*, mira *2 x 2, 4+2, 6+ 41 , 47*. Este *51, 53, 53* es impar es primo.
[137] Es impar, siempre.
[138] Sí me va a dar primo, al parecer siempre da primo [muestran acuerdo].
[140] ¿*41* es primo?¬ [asienten].
[142] ¿Será por eso?
[143] *10 x 10, 100* más…
[144] A ver agarramos cuarenta o cualquier número par te da número primo.
[145] ¿Será por eso?
[146] *151* entre *3*, ¡ah chihuahua! [otro estudiante]Prácticamente es como una división. A ver cómo es.
[182] [Leen] ¿Qué se puede concluir de lo anterior? Justifiquen. Pues, que es verdadero ().
[183] Ajá. Un número par más un impar sale impar ¿verdad? [asienten].
[187] Sí, pues sale impar porque n^2 *más n* es par, más *41* y *41* es impar.
[188] Sí, pero no todos los números impares son primos.

Por otro lado, se perciben *B-acciones* para buscar otra manera de averiguar el valor de verdad de la proposición. Intentan transformar la expresión n^2+n+41 en $4k^2+6k+43$ al considerar en [96] a *n* de la forma *2k+1* y piensan en igualar la expresión $4k^2+6k+43$ a un primo *p*, realizar manipulación algebraica y obtener diferentes valores de verdad en cada parte de la igualdad y llegar con ello a una contradicción [99]. Esta forma de proceder deja ver que intuyen que es *F* la proposición y tienen idea del método de reducción al absurdo (*R-acción*). Pero abandonan este camino.

[93] Sí es verdad, porque el 1 nos los va a hacer impares, por ejemplo 6 x 6, 36 más 6, 42 + 41, 83 () *k.*
[96] () El valor de *k* no lo podemos sacar [al hablar de impares conectan con el ejercicio anterior donde se les pedía probar que era *F* que: *para todo p primo, existe un entero k tal que p=2k+1*].

[97] Con la fórmula general [muestran acuerdo].
[99] Bueno, lo podemos intentar y aquí factorizamos esto para sacar, como para separar. De esa forma vamos a tener una parte que es verdad y otra parte que es falsa a lo mejor sale más bien.

Fragmento 3. Intentan probar por inducción matemática manipulando expresiones algebraicas de manera errónea en el afán de acomodar los cálculos para que resulte verdadera

En el fragmento es díficil darse cuenta que en el equipo **A** intentan generalizar y probar por inducción matemática, sin embargo la socialización en grupo nos ha permitido interpretarlo [241]. Las *B-acciones* percibidas se encaminan a probar que se cumple para $k+1$, aunque no hacen explícito que $F(1)$ cumple con ser primo, ni exhiben el supuesto de que $F(k)$ sea primo. Al tratar de probar que $F(k+1)$ es primo obtienen de n^2+n+41 la expresión $(k+1)^2+k+1+41$ [194]. Al manipular la expresión en [202] de manera separada intentan resolver la expresión como ecuación, tomando primero $(k+1)^2=0$ y encuentran la raíz $k=-1$. Luego, de esa raíz, cometiendo otro error, la sustituyen en toda la expresión $(k+1)^2+k+1+41$ sin tener cuidado de los signos y eso los conduce a encontrar el 47 [204]. Finalmente se percibe confusión en la relación entre n y k mezclando ideas y procedimientos algebraicos erróneos en un intento por generalizar y acomodar las expresiones para que funcione.

[167] Es que no me acuerdo entre qué. La raíz del primero.
[169] Más la raíz del segundo que al cuadrado es k más *41* pues debe ser… el doble producto () me da k.
[170] (Mm) pero *2* veces.
[171] *2* veces k por raíz de k^2, de *2* por raíz de *2*, no es *2*. No, es k. Perdón.
[172] Para que fuera así tendría que ser un *1.*
[173] (Mm) Se me hace que sí.
[174] Te fijas como me acomodo las operaciones. Y aquí ya tenemos un número primo por un número.
[176] Par. Pero quitas el cero ¿no? $(k+1)^2=k^2+2k+1$ [intentan probar que $F(k+1)$ es número primo].
[177] Ah sí. Es cierto. Es primo.
[178] ¡Ah! Se me hace que todos son primos.
[179] Todos son primos.
[180] Es que por ejemplo (Mmh). A ver.
[189] ¿Cuánto me da *42*?
[190] No. Te da *41* [con $n=0$] o *43* [con $n=1$]
[191] A ver *42, 43, 44, 45, 46, 47, () 47* es un número primo [muestran acuerdo los demás integrantes].
[194] Esto lo podemos factorizar. Es $k^2+2k+1+k+42$.
[195] Pero este es *1*.
[196] Olvida esa parte [asienten convencidos].
[198] Agrupé $(k+1)^2$ más k más *42*.
[199] Pero es que, ese *1* de ¿dónde?
[200] *42*, es *1* más *41* [expresan entendimiento].
[202] La raíces de esto es menos 1, k vale *-1* y luego la raíz como k vale *-1* [asienten y encuentran que $k=-1$ es raíz de $k^2+2k+1=0$ dando tratamiento por separado de la expresión dada en 194].
[204] 1^2 , *1*, más *2* por *1, 2*, más *1* menos *1* más *42* nos da *47.*
[205] Pero por qué menos *1*, ¿eso es n?
[206] k quién viene siendo, ¿n?
[207] k los resultados de las raíces [otro alumno se muestra con duda] ¿De las raíces?
[209] De k. O sea, es para generalizar.
[211] ¿No tiene nada que ver con n? Entonces le pongo [se suspende para socializar en gran grupo]

Finalmente las respuestas del registro escrito dadas por ambos equipos después de ensayar con diferentes números aparecen en la tabla 35.

Tabla 35. Ensayando ejemplos y buscando contraejemplos para ver si f(n) es o no primo.

Número n=	**Resultado de $f(n)= n^2 +n+41$**	**Primo/ No primo**
A 3,4,10,7,15, 16,33,11,144	A F(3)=53, F(4)=61, F(10)=151,F(7)=97, F(15)=281,F(16)=313,F(33)=1163,F(11)=173, F(144)=20921	A 53,61,151,97,281,313,1163,173, 20921 son primos
B 3,4,7,8,9, 10,15,20,25	B F(3)=53, F(4)=61, F(7)=97, F(8)=113,F(9)=131,F(10)=151,F(15)=281, F(20)=461, F(25)=691	B 53,61,97,113,131,151,281, 461,691 son primos

Y sus conclusiones a manera de justificación fueron: $\boxed{A}$ «El enunciado es *V*. Porque todos los números que escogemos al aplicarles n^2+n+41 nos da un número primo». $\boxed{B}$ «Que la afirmación n^2+n+41 para $n \in Z$ es *V*. Porque al aplicarle a cada número natural que elegimos y sumarle el *41* nos dio un primo».
En estos registros encontramos que para ellos la dificultad para encontrar un contraejemplo equivale a decir que el enunciado es verdad o bien que un buen número de ejemplos encontrados valida el enunciado

En gran grupo, aunque antes habían considerado que la proposición era verdad, en [239] un estudiante se muestra consciente (*C-acción)* de que no es suficiente el número de casos verificados para que sea verdad. También, aún cuando un alumno afirma que se demostró por inducción matemática [241], eso no se discute para verificar los pasos seguidos y encontrar el error. El profesor más bien afirma que la proposición es falsa y exhibe como contraejemplo F(41) [244, 246].

[235] Profesor: […] Cómo demostrar la *V* o *F* de: *Para todo número n, se tiene que* n^2+n+41 *es primo*. Ensayen con diferentes números […] y justifiquen. Ahí les dice que pueden usar [..] su calculadora. Viene calculado para 2, f(2) es 47[…] ¿Con los números que ustedes checaron se cumplió siempre? [asienten].
[237] P: Luego nos preguntan: qué pueden concluir de lo anterior.
[238] Alumnos: Que es verdadero.
[239] As: No es suficiente, bueno sólo cumple en específico para los que checamos.
[240] As: Como para *18*.
[241] As: Yo lo demostré por inducción matemática.
[242] P: Bueno habría que asegurarnos de que todos los pasos en la inducción matemática están bien, o si alguien encuentra uno que no cumpla pues es falso. A ver la expresión es ¬.
[243] As: n^2+n+41.
[244] P: A ver, bueno, en realidad esta expresión no siempre me da un número primo.
[245] As: Cuándo.
[246] P: A ver que pasa cuando *n* vale *41* [escribe $41^2+41+41$] ¿qué tienen en común?
[247] As: El *41; 41* por *41+2.*
[248] P: Es decir *41* por *43*. Entonces ¿es primo? [contestan que no].
[250] P: Qué divisores tiene.
[251] As: *41, 43, 1*, y ya no es primo.
[252] P: No siempre ocurre. Aunque ocurra en muchos casos. Ahora algo importante podría ser preguntarnos ¿cuál es el número natural, menor, más pequeño donde la expresión no es un número primo? Yo les he dicho 41, […] ¿habrá otro menor que 41 para el que la expresión nos dé un número no primo?. [Usa software para calcular] Ahora si lo hacemos en SWP y le ponemos FACTOR al número, si es primo lo muestra igual y sino pone sus factores. Bueno en este caso aunque ustedes lo hagan para muchos ejemplos y cumplan, […] es falso porque ya encontramos uno [el 41]. Esto es muy importante porque a lo largo de la historia […] se han planteado muchas preguntas, así se trabaja en matemáticas. Por ejemplo dicen "a ver creo que todos estos números son primos" y a tratar de probarlo con diferentes técnicas: reducción al absurdo,no; de manera directa,no; si no se puede probar que es verdad entonces intentamos probar que es falso buscando un contraejemplo o un ejemplo donde no sea verdad. Entonces se pueden pasar siglos buscando. [Menciona a detalle la conjetura de Goldbach (cualquier *número par mayor que 2 se puede escribir como suma de dos primos)* y el teorema de Fermat [*cuando n> 2,* $x^n+y^n \neq z^n$) y los intentos por resolverlos] Esos son los problemas en matemáticas. Hay gente que pasa la vida buscando un contraejemplo y a lo mejor sólo hay uno y es suficiente.

4.4.3.5 Un acertijo de números primos felices

En la última tarea se les proyectó el video[33] donde aparece un acertijo, que es necesario contestar para conocer el número que les dará apertura a una puerta de seguridad. El acertijo es: ¿qué número sigue en la serie 313, 331, 367? Se le pidió al profesor que no realizara sugerencias y los dejara trabajar interviniendo sólo en caso necesario y a manera de cuestionamiento. No obstante, sugirió a los alumnos que los números de la serie eran números felices [262-263], sin recordarles la definición [trabajada antes] y sin aclararles que además eran números primos.
En el equipo **A**, la primera *R-acción* se da al encontrar la regularidad de que las dos últimas cifras de la serie, al conmutarlas [261] les lleva al siguiente número y sugieren que el que sigue es el 376 (número feliz). Un estudiante observa [258] que los números de la serie son primos (*R-acción*) y a partir de esto se da la *B-acción* en la que combinan esta observación con la de hacer desaparecer la cifra de la centena de los números de la serie. Esto puede atribuirse a que al quitar el 3 siguen presentando las mismas características. Esta *B-acción* es usada para concretar un argumento que permita descartar al 376 como candidato a siguiente número en la serie, dado que se observa que entre el 13 y el 31 existen más números felices [264], así que deben tener otra característica: 13 y 31 son primos. Aquí observamos como se va trabajando en la construcción de una respuesta correcta sentada sobre argumentos no válidos, es decir. los números de la serie 313, 331, 367, son felices y primos y 13, 31, 67 también lo son, pero por ejemplo el 49 no es primo y el 349 sí lo es. Si los estudiantes continuaran en esta línea podrían llegar a completar la serie de los primos de dos dígitos a partir de 67 (71, 73, 79) y luego descartarían los que no son felices (71 y 73) para concluir que 79 es el siguiente primo feliz. Pero 371 y 373 son primos y no son felices y 379 es primo y feliz.

[255] *376*, ¿verdad?, porque […] la serie está compuesta por los números felices consecutivos.
[256] Son los números …felices.
[258] Los primeros números de la serie son primos; es que son.
[259] Bueno, consecutivos primos porque el 3 bueno sus últimos *2* dígitos por ejemplo.
[260] Pero el *376* no es primo.
[261] No o sea sin el *3*, el *67* pero el *13, 31, 67, 76*, (…) ah el *76* no es primo.
[262] […] el profesor nada más nos dijo que eran números felices, no nos dijo que eran primos felices.
[263] Pero es que nada más nos dió una pista.
[264] Pero no, porque igual y el *13* y el *31* entre el *13* y el *31* sí hay algún número feliz pero no hay un número feliz primo.
[265] Es que no, se me hace que no hay, porque entre el *13* y el *31* hay felices. Igual y no me acuerdo.
[266] No acuérdate que dijimos ¿? Ah no, el que dijimos el veinte, quien sabe, el *24* o cuál era.

Las *B-acciones* observadas giran en torno a la verificación de algunos números como el 373, pensando que si el 73 es primo entonces 373 también lo es [277]. Descubren que no es número feliz a partir de la conjetura que ya plantearon en la primera sesión de la ingeniería en la que se indicaba que si en el proceso de verificación de número feliz, aparece 5 el proceso se vuelve ciclíco y pueden concluir que no es número feliz [280 y 281].

[277] A lo mejor, se me hace que es el *373* no. El *73* es primo
[278] Bueno, tengo el *385*.
[279] *373* se me hace que sí.
[280] A ver. Hay que checar. A ver *3* por *3, 9, 7* por *7* que *49+9* y *9, 67, 36+49, 85*. No es que tiene un *5.*
[281] Ajá es que se vuelve cíclico.
[282] Ah ok, bueno no todos. Los de *2* dígitos nada más.

En [283] se observa que la fuerte asociación de números primos con impares los conduce a *B-acciones* donde comprueban si el 385 es feliz a pesar de no ser primo. Insisten [286] en la

[33] disponible en http://www.youtube.com/watch?v=ee2If8jSxUo

equivalencia de los números de la serie con los números al prescindir de la primera cifra (*B-acción*). A partir de bases erróneas [291-293] mediante una *C-acción* obtienen la respuesta correcta; el 379 es el siguiente primo feliz.

[283] Los de *3* ahorita. El *385* sí es. A ver *385*, *3* por *3*, *9* más *64*, más […] y *42*, no ¡ah chihuahua!
[286] […] si mi teoría es cierta entonces, nos fijamos en los últimos *2* dígitos [de la serie *313,331,367*] *13*, *31, 67* son primos y aparte hacen que todo número en conjunto sea un número primo feliz.
[289] Ah, o sea, que estos sean primos pero con el *3* [agregando 3 antes de las cifras 13, 31 y 67] es feliz pero no necesariamente es primo [asienten].
[290] Bueno supongo que de todos modos sería un primo feliz el *379* [asienten y verifican cálculos].
[293] Sí, ahí dan *100* [es número feliz].
[297-8] *379* es primo y feliz // y es el que sigue.
[299] O sea el *376* no, si es cierta la teoría de Carlos sigue este [*379*] si no vendría siendo este [asienten]
[301] Y ya el *376* es solamente feliz
[309] Es que […] *379*. Mira así, un número primo feliz y como *371, 373, 377*, qué número sigue pues *379* [revisan del *1* al *23* para encontrar divisores y convienen en poner que no tiene divisores].
[320] Y luego ya pongo la demostración para que sea feliz [verifican con cálculos que *313* es feliz].
[322] Los *2* son primos felices ¿no? [muestran acuerdo los demás].
[323] Y lo podemos justificar demostrando que el *367* también es un primo feliz.
[325] Ajá, ¿qué pueden decir acerca de *331* y *367?* Justifiquen [leen]. De los *2* alguno es feliz, primo feliz.
[326] La justificación sería: ya que los *2* sólo se dividen por *1* y él mismo y luego ya *371* y *367* son felices.
[331] *9, 9* más *9* más *1* es igual a …[verifican que *331* es feliz y que *31* también lo es y luego verifican *367*].
[339] Volviendo a la serie, *379* ¿no? […] el siguiente número primo feliz es el *379*, [asienten].
[342] Ponle es *379*, sí y luego ya cuando nos pregunte le decimos según nosotros es. Y lo llevamos aquí nos está diciendo que son primos felices, ¿no? pues el que sigue es el siguiente número feliz primo.
[344] *371* es primo, pero sí será feliz [realizan operaciones y encuentran que es cíclico al encontrar un *5* en *59* y enseguida verifican para *363* encontrando también que resulta cíclico].

En su producción escrita, el equipo **A** menciona que la característica de los números de la serie es que son felices y deciden aportar dos respuestas al número que sigue en la serie. La primera es que «*376 es el siguiente porque en la serie son números felices consecutivos aparte en los 2 primeros números sus 2 últimos dígitos se intercambian 313⇒331»*. La segunda respuesta es que «*379 es primo y feliz, es el que sigue»*.
Por su parte el grupo **B** caracterizan a los números de la serie como los que «*están entre 300 y 400, están en orden ascendente, los dos primeros sus dos últimas cifras conmutan. Que son felices».* Y que el número que sigue es el «*376 por las razones anteriores*».

Comparten respuestas generadas en cada grupo y revisan nuevamente el video, dejando que avance hasta que se plantea que el siguiente número de la serie debe ser primo y feliz (sin mencionar el número). Recuerdan la definición de número primo feliz (construidas antes en esta ingeniería). Finalmente, en el equipo A escriben: «Son los números que sólo son divisibles entre ellos mismos y la unidad y aparte la suma reiterada del cuadrado de sus dígitos es 1». Y en B «Son los números naturales que sólo son divisibles entre el mismo y la unidad y la suma del cuadrado de sus cifras es 1»

Además debían probar que 313, 331 y 367 son números primos felices. En sus repuestas observamos que no tienen ningún problema para entender la definición de número feliz. En esta parte resultó provechoso el uso de ejemplos y no ejemplos de la primera sesión de esta ingeniería didáctica, como estrategia para la comprensión de la representación verbal de la definición (ver p.172, sección 4.3.1.3 Análisis de la parte II: Construcción de números felices y primos felices). En el caso de los primos verifican que unos cuántos primos no tienen divisores y eso es suficiente para decidir que son primos. En esta sesión los estudiantes tenían calculadoras y acceso a software como *Scientific Work Place* y según el profesor conocían una instrucción de la calculadora (y del software) que les permitía verificar si un número es primo, aunque no fue utilizada. En cuanto a su registro podemos observar que al igual que en la primera sesión utilizan el signo "=" para indicar la ejecución de una tarea y para vincular las iteraciones.

Tabla 36. Respuestas escritas de los equipos para completar la serie 313, 331, 367,…

$\boxed{\text{A}}$ *313 no es divisible entre ningún número primo por lo tanto es primo. 331 y 367 que los dos son primos, ya que sólo se pueden dividir entre ellos mismos y la unidad aparte son felices.* *9+1+9=19=[⟼]81+1=82=[⟼]64+4=68=[⟼]36+64=100=[⟼]1 ∴es primo feliz.* *9+9+1=19=[⟼]82=[⟼]68=[⟼]100=[⟼]1;* *9+36+49=94=[⟼]81+16=97=[⟼]81+49=130=[⟼]9+1=10=[⟼]1* $\boxed{\text{B}}$ *Feliz: 9+1+9=19=[⟼]1+81=82=[⟼]64+4=68=[⟼]36+64=100=[⟼]1* *Primo: 2,3,5,7,11,13,19,23,29,31,37,41,43,47,17,….* *313⇒sólo es divisible entre él y la unidad. 331 y 367 son primos felices, no se descomponen entre otros factores que no sean el mismo y la unidad y la suma de sus dígitos al cuadrado es uno.*

Finalmente vuelven a la serie 313, 331, 367,… y ambos equipos responden que el número que sigue es el 379. Retomar el video ayuda a que el equipo **B** llegue a la respuesta, dado que antes únicamente consideraba que los números de la serie eran felices y que además los dos primeros conmutaban sus dos últimas cifras, así que los siguientes dos para ellos debían seguir ese patrón y por tanto su respuesta previa fue 376. En la discusión se concluye que estos criterios no serían suficientes si quisieran encontrar el quinto número en esa serie.

Para la última parte el profesor les pide que utilicen la calculadora TI Voyage, Excel o cualquier otro software que les permita realizar un programa para verificar si un número es feliz, es decir que construyan una *función,* que les devuelva la suma de los cuadrados de los dígitos. El profesor cuestiona cómo podrían hacerlo y los estudiantes mencionan que pueden utilizar la representación de un número considerando la posición de cada una de sus cifras. También que se pueden averiguar cocientes y residuos al dividir por ejemplo entre 10 o 100. La construcción de la definición de divisibilidad realizada anteriormente, centrada básicamente en ejemplos, no ejemplos y el paso a formas genéricas permitió realizar la tarea, ya que la programación es una tarea de mayor complejidad que requiere la comprensión de los conceptos (divisibilidad, números felices, etc) y de los procesos de generalización.

En la última parte se presenta la interacción en el equipo **A**. En esta tarea se les pide en la hoja de trabajo encontrar una fórmula que les devuelva la suma de los cuadrados de los dígitos de un número o bien realizar un programa que les permita verificar si un número es feliz. Se les sugiere utilizar calculadora para programar o la computadora donde disponen de diferente software. En el equipo **A** deciden utilizar como apoyo el software de Excel. Al principio se perciben acciones simples de reconocimiento de los conocimientos a emplear: intentan únicamente dividir entre 10 el número y elevarlo al cuadrado [367-371] y recuerdan detalles sobre el uso del software. La primera *B-acción* la encontramos en [372] cuando un estudiante provoca la reflexión en el equipo sobre el hecho de que justamente les interesa aislar los dígitos y entonces para la división entre 10 necesitan o bien calcular el residuo o el cociente (parte entera de la división).

[362] Ahí está un número [en la celda *A3* al

[369] Ajá, al cuadrado porque es al cuadrado. Sí era

parecer escribe el número *221*].
[364] Posiciónate en otro lugar [barra para ingresar fórmulas] Antes tenías que poner paréntesis ¿no?
[366] ¿No es punto y coma?
[367] Ah sí, paréntesis entre *10 [(A3/10)]* [otro alumno] Y ahora ya acabamos. Ahora es éste verdad.
[(A3/10)^2].
[370] ¿Cómo va a ser lo mismo entre paréntesis y ya? Así no.
[371] No, pero va el igual, va afuera del paréntesis [para generar la fórmula en excel se usa ”=”].
[372] El igual va afuera. Igual, paréntesis pero entero o residuo de *A3,* punto y coma *[=(Entero(A3;10)^2* o bien *=(Residuo(A3;10))^2].*

A continuación tiene lugar otra *B-acción* [373] al cuestionar que el número que tienen en la celda A3 es 221 y al dividirlo entre 10 y tomar la parte entera no se tendría un 2 sino un 22. Esto desencadena otras *B-acciones* anidadas al decidir utilizar el residuo [374] y además decidir tomar el residuo de la división entre 100 y a eso restarle el residuo de la división del número entre 10, llegando así a una *C-acción* [375] donde ya se construye una fórmula que en general les permite aislar el dígito de las centenas. En [381] se vuelve a explicar pasando de la expresión general al ejemplo particular (número 221) para convencer a quien aún muestra duda y luego proceden a elevar al cuadrado. En [390] encontramos que aún cuando tienen la expresión general buscan verificar con algún otro ejemplo particular.

[373] No, pero queremos que sea *2.*
[374] Por eso… así, sería éste con el residuo.
[375] No, mira. Es que va a estar más largo y luego entre paréntesis *A3,* punto y coma *100*… cierra el paréntesis y luego a eso hay que restarle lo que nos dió aquí y dividirlo entre 10 y así nos va a quedar el *2* [se refiere al *2* de las decenas de *221* y propone la fórmula *(Residuo(A3;100))-(Residuo(A3;10))/10)].*
[376] Es este, otro paréntesis…. sería *B3.*
[378] No es así, no es que….. ponle ahí un menos [pregunta con duda el estudiante] ¿Un menos?
[380] Ajá, es igual…. A ver, a este le restaste este y todo eso hay que dividirlo entre *10.*
[381] Ah *221* entre *100* me quedaría *2* y sobran… *21*, menos *1* te queda *20* y divides entre, entre *10* te queda *2* [verifican en la fórmula dada antes].
[382] Al cuadrado porque acá le estábamos sacando la raíz a uno… ah no aquí lo estábamos elevando al cuadrado. Aquí le sacamos la raíz no [residuo lo confunde con raíz].
[383] No residuo!!!! Mira […] te queda […] *21*, menos *1* te queda *20* [asiente convencida].
[384] Lo divides entre *2* y te va a quedar *2* y entonces elevas al cuadrado el *2.*
[385] El *2* al cuadrado nada más ponle ahí el paréntesis // Cierra el paréntesis […] Entre y luego… así.
[388] Y luego ponle entre *10*. [otro alumno] Luego ciérralo todo entre paréntesis y elévalo al cuadrado.
[390] […] lo que estamos viendo aquí es restarle por ejemplo aquí tenemos *3* le vamos a restar *9* […] Si tenemos *3* le vamos a restar *9* [ensaya otro número para entender]. Ah ya te entendí. Sí es cierto.

Enseguida encontramos un hecho antes observado (especificamente en la recostrucción de la definición de número racional): la fuerte asociación de “raíz” con la operación de “división” y aquí de manera insistente se utiliza el término raíz para referirse al residuo [391-392-395]. El resto de la interacción muestra una revisión de sintáxis de instrucciones en Excel para concretar el contenido que habrá de ir en la fórmula obtenida en la *C-acción* de [375].

[391] Entonces este sería,…, dividir. Este sería dividir y la raíz [residuo] de *A3* aquí sería menos la raíz [residuo] de *A3.*
[392] Como se pone la raíz Sqrt….. se pondrá aquí así [le contestan] Quien sabe. Pero es residuo.
[394] A ver… con minúsculas … sí será así. Mejor hay que poner todo así ¿????
[395] No pues, pero cual, quítale el sqrt y luego
[401] Ok y luego acá otro ¿verdad? […] Es el residuo de *A3* entre *100* que es *21, 21* menos el residuo de *21* entre *10* que es *1*, es *20* entre *2* me quedaría *10*. No […] no sería entre *2*, sería entre *10* y me quedaría *2.*
[402] Sí entre *10* ponle. A ver qué, *10* paréntesis al cuadrado.
[403] A mí se me hace que nos sobra un paréntesis.
[405] A ver qué te da, (..) Un *2*. No a ver. Residuo *A3,*

métete adentro del paréntesis y luego aquí.
[396] Ajá y luego le vamos a poner residuo otra vez y luego entre paréntesis // [Residuo] de *A3.*
[398] Paréntesis … abre un paréntesis y luego abre. Ponle A3, punto y coma. Punto y coma, *10.*
[399] No, sí porque aquí esta el otro paréntesis. No pero este entre 10. No, es que ya está todo entre *10.*
[400] Mira no aquí falta un paréntesis.
punto y coma, *100,* más menos residuo *A3,* punto y coma, *10,* un *2* entre *10,* nos falta *1*… aquí no se está agregando el paréntesis [revisa los paréntesis].
[406] Ahí ¿por qué se me hace que nos faltó?,… , sobra un paréntesis de este lado.
[408] Este [paréntesis] verde va con este, este va con este, y este moradito va con este…. Ah sí. Aquí nos sobra. Bueno aquí es lo mismo pero me da *4*… *2* por *2*, *4* sí.

Tratan de encontrar una expresión para obtener el dígito de las centenas al cuadrado y para ello lo intentan (*R-acción*) con el residuo de la división entre 100. El trabajo previo les permite pensar en la división entre 1000. Ocurren entonces dos *B-acciones* al pensar en que al dividir entre 1000 el residuo sería el mismo número por ser de 3 cifras y a eso tendrían que restarle el residuo de la división del número entre 100, es decir, los dos últimos dígitos [412-413]. Estas acciones los conducen a la *C-acción* [420-421] donde deciden dividir entre 100 para obtener el dígito de las centenas en un número de 3 cifras y deciden elevarlo al cuadrado.

[409] Ajá. Y luego aquí ¿? Se me hace que nada más debemos poner *residuo* ah cochinero [se desespera con el error que marca excel]……. *Residuo* [muestran acuerdo].
[410] No ¿verdad? ¿entonces?
[411] *A3* [más de una voz] Coma, punto y coma …… *100*.
[412] Pero nos va a quedar lo mismo… *221*…entre *1000,* que nos quede [residuo] *221.*
[413] Más bien sería eso de *A3* menos el residuo de todo esto con *100* ¿no?
[414] Ah ok sería *A3* ((Pva)) … menos sería el residuo de este ((mm)) Es que les vas a restar *21* ¿no?
[415] Menos el residuo de *A3* entre *100* ¿?
[416] Sí *A3* menos el residuo de éste de *A3* entre *100* que sería *21.*
[419] Entre paréntesis el residuo vendría siendo *21* [afirman].
[420] *A3* menos *21* serían *200* y luego así y luego todo eso entre… entre *100* verdad.
[421] Y ya todo eso al cuadrado [*(((Residuo (#;1000)) - (Residuo(#;100))/100))*^{2}].

Finalmente se obtiene de manera directa una *C-acción* [422] que los conduce a obtener la expresión para encontrar el dígito de las unidades al cuadrado, y otra *C-acción* [423] sumando las expresiones parciales que los regresa a la tarea inicial: una fórmula que les devuelva la suma de los cuadrados de los dígitos de un número. Hasta el momento [427] únicamente se tiene la primera suma del cuadrado de los dígitos y se tiene que hacer de manera reiterada para poder determinar si el número es feliz. En [430] los alumnos muestran una *R-acción* al reconocer que en Excel es posible hacer que a partir del resultado obtenido se repita el proceso cuantas veces sea necesario. Solicitan apoyo al profesor y en [434], cuando deciden que 30 iteraciones pueden ser suficientes para verificar que un número sea feliz, se da una *B-acción* que permite la construcción del proceso. Después de cumplir con la tarea en el equipo se percibe una gran satisfacción al haber encontrado su propia fórmula y ensayan con diferentes números mostrando entusiasmo cuando logran dar con un número feliz.

[422] Y en *D3,* residuo del número con [la división entre] *10,* todo esto al cuadrado (...) Sí y ya le vamos entendiendo muchachos [Risas].
[423] Y ahí ponle la suma de *B3* más *C3* más *D3.*
[427] ¿Qué le ponemos para que salga la función Carlos? [hasta el momento sólo tienen la primera suma del cuadrado de los dígitos].
[428] Y luego acá ponle ese. Que sería eso mismo igual
[446] *387* [verifican]. Se cicla no sirve. [otro alumno] *377* Ah pues en ese caso eeeh….es número feliz.
[450] Es número feliz. ¿Qué te parece eh? Encontré uno feliz.
[452] A ver. *222* [Risas] ah pero ese ya verdad (…) *666* (…) el *555* ¿no verdad? (…) ¿cuál otro piensan?

A3…. A3.
[430] No a este (…) *A3* y luego aquí vendría siendo (….) Profesor ¿cómo lo hacemos desde el mismo las otras sumas? [el maestro les indica que seleccionen las celdas y del extremo inferior izquierdo con el click sostenido jalen las fórmulas para que se copien hacia abajo y realicen las sumas reiteradas].
[431] Pónte acá donde aparezca la crucecita [..] en la blanca […] y con esa destiéndete hasta abajo.
[434] *30* digámos.
[435] Ajá (…) Es que aquí no tenemos. Es que era todo (...) No era desde acá era desde acá.
[436] El *89* aquí el *1* al cuadrado, el *8* al cuadrado ¿? y ya se ciclo…. A ver vamos a poner otro….. ¿cuál?
[437] *313* (…) Ahhh Aquí ya llego al 1 y luego vean uno más grande uno. Oh por Dios. No se puede.
[438] Sí ¿verdad? El *23.* Bueno díganme uno ustedes.
[439] El *80, 29* [revisan y contestan] Se cicla. A ver vamos a encontrar más números.
[441] *179*… Listo! Cuál otro mmh aaahh listo, listo [Risas].
[442] [se muestran contentos con la tarea] A ver (…) bueno. Pues ahí está igual (…) el *10* el *100* se cicla.
[443] Dime un número Dulce [responde] Mmm el *337* [verifica] Está ciclado Dulce. Ese no sirve.
[454] [Propone el *376*] Ooohh [Risas] órale Carlos encontraste uno[se perciben satisfacción del equipo].
[455] Ah ¿cómo no se me ocurrió ese?
[456] El *131* [otro estudiante] Saben cuál otro se me ocurrió.
[458] A ver espérate, ponle otra vez el *131*…. A ver bájale más. No mira. Ya se cicló.
[459] Pero porque si el *313* sí es. Ah no nada más que aquí son *2* treces aaaaahhh.
[460] *313* y el *133* pues (…) [otro alumno] Agarraste *333* Luis, ¿cuál? Carlos.
[462] *333* ¿no? Es que agarras los *3* y les pones algún otro.
[464] Ajá…. A ver. Vamos a ver otra combinación más acá.
[465] Tampoco da [proponen otro] El *230* oohhh.
[467] El *23* verdad [Risas] [porque es la misma prueba si le agregan ceros sigue siendo feliz].
[468] El *130* también.
[469] *213? …103* listo! Creo que con todos así.
[471] El cero. ¡Ah […] verdad! son puros ceros [risas] Qué listotes somos [Risas].

Finalmente obviamos la parte en la que realizan el registro escrito y en la que muestran al profesor ejemplos para convencerlo de que su programa funciona para saber si un número es o no feliz. A continuación se incluyen las respuestas de los equipos y el ejemplo dado por el equipo **A** en Excel en la figura 45.

A *(Residuo (num;10))*^{2}*+(((Residuo(num;100)-(Residuo(num;10)))/10)*^{2}*+((num-(Residuo(num;100)))/100)*^{2}	B *Para números de tres cifras (C,D,U) (((Residuo (#;1000)) - (Residuo(#;100))/100))*^{2} *+ (((Residuo(#;100)) - (Residuo(#;10))/10))*^{2}*+((Residuo(#;10))*^{2}

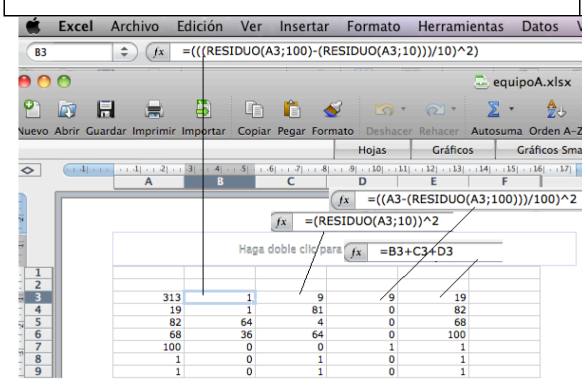


Figura 45. Muestra del trabajo realizado en Excel por el equipo A

Para la Hoja 5 de la ingeniería fueron necesarias dos sesiones de poco más de una hora y para finalizar se les solicitó que explicaran de la manera más organizada posible:
Para demostrar la verdad o falsedad de una proposición o enunciado matemático. ¿Cuándo es suficiente exhibir un caso y cuándo no lo es? La tabla 37 muestra las respuestas de los equipos.

Tabla 37. Justificaciones de los equipos para demostrar verdad o falsedad

A *Cuando la proposición es F, es suficiente dar un ejemplo que contradiga a esta. En caso de que sea verdadero el [H]echo de dar un ejemplo que cumpla con la proposición no es suficiente para comprobar que es V.*

$\boxed{B}$ *Cuando encontramos al menos un elemento que no cumpla la o las condiciones que se tienen en el enunciado. (Para demostrar que es F) Para demostrar que es V no es suficiente con mostrar que sólo un elemento cumpla con la condición.*

4.5 Análisis del bloque III: Métodos directos de demostración

En este apartado se realiza el análisis de cómo se desarrolla la noción de pregunta clave como estrategia para derivar enunciados verdaderos a partir de la extracción de significado de la información disponible hasta el momento (estrategia de avance), o bien tomando en cuenta la información que necesito tener para llegar a la conclusión (estrategia de retroceso). En esta parte veremos cómo los estudiantes hacen uso de los tópicos abordados en el bloque II, tales como: definiciones, conectivos lógicos, estructura de las implicaciones y papel condicional de la hipótesis, para el manejo de los procesos de avanzar y retroceder, como el tránsito de un enunciado verdadero a otro verdadero también.
También se analiza la forma en que los estudiantes se inician en la dinámica de organizar las ideas en un escrito que posteriormente los apoya para elaborar una versión condensada para comunicar el conocimiento en el medio matemático.
Finalmente, cómo desarrollan competencias para extraer significado y leer entre líneas a partir de demostraciones presentadas en su versión condensada o en el formato del medio matemático.

4.5.1 Hoja de trabajo # 6: Demostrando con el método avance-retroceso

Esta hoja fue implementada el 24 de junio de 2009. Al iniciarla el maestro introduce ejemplos que ilustran el método directo de demostración y los elementos implicados en dicho método: *pregunta clave, proceso avanzar y proceso retroceder*. Señala la importancia de identificar como *pregunta clave*, la pregunta específica obtenida al cuestionarse cómo se puede probar que el enunciado dado es verdadero a partir de la información disponible hasta el momento. También a través de los ejemplos ilustra los procesos avanzar y retroceder como el tránsito de un enunciado a otro, es decir, el *proceso avanzar*, se da al derivar a partir de un enunciado verdadero *P,* otro enunciado verdadero P_1, mientras que el *proceso retroceder*, es el que se da al derivar a partir de un enunciado *Q* (en este caso la conclusión), un nuevo enunciado, Q_1, con la propiedad de que si Q_1 es verdadero, entonces Q también lo es. Esto se hace formulando la pregunta clave y respondiendo a ella.
Uno de los ejemplos que introduce es: *Demostrar que dados a, b y c enteros. Si a divide a b y b divide a c, entonces a divide a c.*
Primero se asegura que los estudiantes entiendan el lenguaje, el manejo adecuado de las definiciones, esto es, que: *para a y b enteros, decimos que a divide a b si existe un entero q tal que aq=b. Si a divide a b, se escribe* $a \mid b$*, y decimos que a es* ***factor*** *de b, y que b es* ***divisible*** *por a.*
También, como vemos en la tabla 38, para un análisis de la demostración se determinan los elementos que componen el enunciado a probar, se proponen las preguntas claves adecuadas y sus respuestas y se aplica el proceso avanzar y el proceso retroceder para organizar la demostración (no se sigue un orden en el avance y el retroceso).

Tabla 38. Ejemplo de desarrollo de la demostración de una proposición.

Preguntas clave	Organizando la demostración

¿Qué información se supone cierta?	**P** $a \mid b$ y $b \mid c$
¿Qué se deduce a partir de la información P?	**P_1** $\exists\, q \in Z$ tal que $b=aq$
	$\exists\, k \in Z$ tal que $c=bk$
	$c=bk$
	$c=bk=(aq)k$
	$c=a(qk)$
	$\Rightarrow qk=r$
¿Qué significa probar Q?	**Q_1** $\exists\, r \in Z$ tal que $c=ar$
¿Qué se pretende probar?	**Q** Nuestra meta es mostrar que $a \mid c$.

El método avance-retroceso ilustrado se puede identificar de manera natural con el método RBC-**C** (que hemos adoptado en este trabajo para el análisis de la construcción del conocimiento). Tal identificación se sugiere, considerando que las *R-acciones* se dan al reconocer la información que se supone cierta así como las definiciones y conceptos implicados, las *B-acciones* surgen a partir del enunciado, por extracción de su significado, o cuando se realizan cálculos, para obtener deducciones y comprender el significado que tiene demostrar el enunciado, para finalmente construir la demostración solicitada y organizarla (*C-acción*). La *C-acción* se da una vez que consideran el enunciado de la proposición y su demostración como una unidad. La segunda **C** en el método RBC-**C**, representa las acciones de consolidación que ocurren cuando el aprendiz es capaz de presentar una versión condensada y/o elegante de la demostración, cuando es capaz de generar otras maneras de demostrar el mismo hecho, utiliza el lenguaje matemático de manera apropiada y finalmente utiliza la proposición con su demostración como una unidad para la construcción y demostración de nuevas proposiciones o bien para la resolución de problemas. Cabe mencionar que cuando se divide la tarea en subtareas, una vez concretada cada subtarea, su verbalización o registro escrito constituye *la C-acción* asociada a la subtarea.

Retomando el análisis de lo ocurrido durante la sesión 6, una vez aclarado el método a seguir mediante el ejercicio propuesto y resuelto en grupo con ayuda del profesor para demostrar las proposiciones, la tarea que deben enfrentar los alumnos es probar la proposición: *Si el triángulo rectángulo XYZ con catetos de longitudes x e y e hipotenusa de longitud z tiene área* $z^2/4$*, entonces el triángulo XYZ es isósceles.*

Para seguir la dinámica de los ejemplos mostrados anteriormente, primero hay que tener en cuenta que los alumnos interactúan en pequeño grupo. Concretamente a continuación describimos la interacción en el equipo **A**. Los alumnos recuerdan (*R-acciones*) las definiciones de triángulo rectángulo [2, 3, 9, 10 y 11], de triángulo isósceles [4, 5 y 6]. También encontramos una acción de reconocimiento en la que utilizan el término arista como sinónimo de cateto [12] que luego aparecerá también en su registro escrito.

[2] Un triángulo [rectángulo es el] que tiene un ángulo recto.
[3] De *90* grados. Entonces, con eso lo escribimos.
[4] Un triángulo isósceles es el que tiene *2* lados iguales.
[5] *2* ángulos y *2* lados [iguales] ¿verdad?
[6] Pues es lo mismo acuérdate que lo podemos definir de cualquiera de las 2 formas. Dependiendo lo que nos diga para poder demostrarlo.
[8] ¿Cómo?, cateto.
[9] Sí, cateto es uno de los lados del triángulo. También hay hipotenusa.
[10] No, pero, si hay que diferenciar entre cateto e hipotenusa, ¿no?
[11] La hipotenusa es el cateto más largo, pero, sigue siendo un cateto.
[12] ¿Un cateto? ¿Cómo se llama? Es como la arista ¿no? [asienten algunos].
[13] Hipotenusa es el cateto más largo del triángulo, el de mayor longitud.

Los alumnos registran por escrito las definiciones (ver tabla 39), lo que constituye una *C-acción* de construcción de las definiciones de los elementos involucrados en la proposición. Aunque en la transcripción anterior sólo se ha considerado la discusión dentro del equipo **A**, en el registro de respuestas incluimos tanto al equipo **A** como al **B**.
En cuanto de las definiciones, en el equipo **B** se percibe un gran cuidado en su manejo. Por ejemplo mientras que el equipo **A** considera la hipotenusa (que confunden con un cateto [11]) para un triángulo cualquiera, el equipo **B** especifica el caso de un triángulo rectángulo considerando su longitud y su relación con el ángulo recto.

Tabla 39. Extracción de definiciones por los equipos.

<u>Triángulo rectángulo</u>: $\boxed{A}$ *Es un triángulo que tiene un ángulo de 90º* $\boxed{B}$ *Es una figura geométrica cerrada formada por 3 segmentos de recta de los cuales 2 forman un ángulo recto*
<u>Triángulo isósceles</u>: $\boxed{A}$ *Es el que tiene 2 ángulos (o lados) iguales.* $\boxed{B}$ *Es una figura geométrica cerrada formada por 3 segmentos de recta, con dos lados de la misma longitud.*
<u>Cateto</u>: $\boxed{A}$ *Son los lados del triángulo (aristas)* $\boxed{B}$ *En un triángulo rectángulo son los segmentos que forman el ángulo recto, donde cada uno es de menor longitud que la hipotenusa.*
<u>Hipotenusa</u>: $\boxed{A}$ *Es el cateto con mayor longitud del triángulo* $\boxed{B}$ *En un triángulo rectángulo es el lado de mayor longitud opuesto al ángulo recto.*

A continuación, para realizar un análisis de la demostración, se les pide que determinen los elementos que componen el enunciado, que busquen preguntas claves y sus respuestas y que organicen la demostración. En la interacción del equipo **A** se dan *R-acciones* con las que identifican la información dada (hipótesis) [16, 17, 20 y 21] y lo que probarán [18 y 25].

[16] Ajá, catetos x , y, e hipotenusa z [del triángulo rectángulo] y el área particular es z cuadrada sobre *4.*
[17] Yo digo que sería suficiente con x, y, z en un triángulo rectángulo y su área es z cuadrada sobre *4.*
[18] Triángulo rectángulo, sí ¿verdad? Se pretende probar que x es igual a y [es la conclusión].
[20] Bueno, aquí no sabemos que estos lados no son iguales pero podemos decir que, por ejemplo, el ángulo donde están x y y mide 90 grados y … que el triángulo …
[21] //tiene área de una hipotenusa cuadrada entre cuatro, [apoyan la intervención].
[25] Nada más estás explicando que z es igual a la hipotenusa, pero se necesita probar que tiene dos de sus catetos iguales [que es un triángulo isósceles]. Que x y y son iguales.

En el siguiente fragmento, mediante *R-acciones* conciben al triángulo equilátero como caso particular del isósceles [27-28]. Este hecho lo encontramos en la discusión de la primera sesión cuando trabajaban sobre la reconstrucción de las definiciones de los diferentes triángulos. Más adelante [29], descartan la observación al considerar la hipótesis; el triángulo es rectángulo.

[27] Pero la hipotenusa ahí sí puede ser igual a ellos ¿no?
[28] Bueno que sea isósceles significa que x y y sean iguales y la hipotenusa puede serlo [identifican como caso particular al triángulo equilátero].
[29] Ah sí, bueno también si es rectángulo, no puede ser igual, la longitud es más grande.
[30] Ajá, porque se supone que la hipotenusa es el cateto con mayor longitud.

Dado que tienen claro a donde quieren llegar [31 y 35], y además el papel de la hipótesis, derivan de estas *R-acciones* la información conveniente. Primero al tratarse de un triángulo rectángulo [33] usan el teorema de Pitágoras en una *B-acción* para expresar el cuadrado de la longitud de la hipotenusa [z^2] en función de los catetos y, posteriormente, sustituyen ese valor en el área que plantea la hipótesis $z^2/4$, quedando expresada el área como $(x^2+y^2)/4$ en [33]. Además [38] se puede ver que siguen derivando equivalencias (*B-acciones*) al relacionar el área que tienen con la fórmula para encontrar el área de cualquier triángulo *xy/2*. También identifican que cualquiera de los catetos puede ser la altura del triángulo por ser rectángulo (*R-acción*) [39].

[31] Okay ya, queremos probar que estos dos [catetos] son iguales.
[32] ¿Cómo se saca el área?
[33] Mira. La hipotenusa al cuadrado es igual a [la suma de los] cuadrado[s] de los catetos, luego área igual a *x* cuadrada más *y* cuadrada sobre *4.*
[34] Sí. A ver. Entonces que … como tenemos *z* cuadrada que es la hipotenusa al cuadrado *y* es la suma de cuadrados de los catetos … y el área es igual a *x* cuadrada … entre *4*.
[35] Y queremos llegar a que *x* es igual a y ¿no?
[36] Ajá. Por ejemplo si sacamos z multiplicamos por *4*. Ah no, llegamos a lo mismo que es esto, […]
[37] Si esto estuviera igualado a cero. Pero se me hace que no está igualada a cero porque es igual al área. A ver,…, base por altura entre *2*.
[38] La base vendría siendo un cateto ¿no? digamos que es el cateto *x*. Entonces digamos que *x*, base, por altura *y*, sería *x* por *y* sobre dos *y* esto tiene que ser igual a *z* cuadrada sobre *4.*
[39] No importa si es base *y* por *x* ¿no? También, esto es igual a *z* cuadrada entre *4.*

Luego encadenando *B-acciones* obtienen la equivalencia $xy/2=(x^2+y^2)/4$, simplifican en [40] obteniendo $xy=(x^2+y^2)/2$. Al transformar la igualdad anterior en $2xy=x^2+y^2$ [46-50] los alumnos, mediante *B-acciones* deducen que para que sea posible se debe dar que $x=y$ en cuyo caso la igualdad quedaría $2x^2=2x^2$. En [58] observamos la *B-acción* que, aunque no aparece de manera explícita, permite que al alumno al igualar a cero la expresión se dé cuenta que se trata de un trinomio cuadrado perfecto y lo factorice como $(x-y)^2$ deduciendo que $x-y=0$ y por tanto $x=y$.

[40] y luego de ahí despejamos. El que sigue *x, y* igual a x^2 más y^2 sobre dos [asienten sus compañeros].
[41] Y luego lo pasas para acá dividiendo. La *x* cuadrada, más *y* cuadrada, sobre *2 x y.*
[42] Mejor pasa para acá *y* este para acá.
[43] Ah sí ¿verdad? El dos pasa para acá y este acá.
[44] Entonces se eliminan ¿no?
[45] No. Está bien a dos, porque *x* cuadrada más *y* cuadrada queda entre dos.
[46] Ajá, dos *x* por *y.* Sí pero aquí tienen que ser iguales.
[47] Sí estos dos son iguales los multiplicas y acá cuadrados iguales los sumas.
[49] Ah ya. Sí*, x* y *y* son iguales. ¿Que pasó? A ver. Te sale igual.
[52] No, pues creo que no. Es que *x* cuadrada más *y* cuadrada, entre *2 x y* [Mm].
[53] Este lo pasas para acá. ¿Estás de acuerdo?
[54] Ajá. A ver la hipotenusa es la suma del cuadrado de sus catetos.
[55] Ajá. Bueno la raíz de la suma. No, bueno, la hipotenusa.
[56] Ajá. A ver el área es *x* por *y* sobre *2* ¿verdad?
[57] Sí, bueno de aquí para que esto se cumpla, de todos modos *x* y *y* tienen que ser iguales.
[58] Tiene que ser cero *x-y.*

Al no ser transparentes los razonamientos de sus compañeros, un estudiante [59] expresa la necesidad de un ejemplo específico para verificar la validez del argumento (*R-acción*). Como respuesta en forma de *B-acciones* [60-62] le plantean un ejemplo con $y=4$, con lo que $-x^2+8x-16=0$ y por tanto debe ser también $x=4$. Sin embargo esto no resulta claro para él [53] por el manejo de los signos. Intenta una *B-acción* para formular una explicación sustituyendo nuevamente 4 en la ecuación [64]. Con un nuevo intento en el que inician una *B-acción* suponiendo que $x=y$, sustituyendo en $x^2-2xy+y^2$ el alumno se convence de que esa expresión es igual a cero [70-71]. En 80-81 mediante una última *B-acción* que es un repaso del proceso seguido [83-84] se inicia la *C-acción* que se completa cuando ellos organizan su demostración.

[59] No, pero por ejemplo ¿qué pasa cuando *y* vale ¿*4* [le contestan] Bueno cuando *y* vale *4* acá vale *16*
[61] Y entonces es ocho *x* menos *16* es igual a *x* cuadrada. Porque aquí también tiene que ser
[68] Esto sí. Aquí te dice que te debe de dar menos *16*.
[69] Sí, pero menos *16* es diferente a *16* y aquí te está diciendo que son iguales. En este caso debes de tener menos menos *16*. Ah sí, sí. Eso es lo que pasa. Por eso te digo que los dos van a valer cero. Para que cumplan

cuatro. Menos *x* al cuadrado es igual a cero.
[62] Y *x* va a valer cuatro también.
[63] No, es que menos más esto menos, aquí debe de ser…
[64] Menos 16 para que te queden igual. Menos x cuadrada, más *8x* es igual a y cuadrada, o sea *16*. Si y cuadrada vale *16* entonces *x* cuadrada tiene que valer *16,* y menos por el signo te da menos *16,* y para que sea cierta la igualdad el otro término [*8x*] debe ser 32, para que menos 16 más *32* sea *16.*
[65] Porque menos *16* no es igual a *16.*
[66] No, pero es que ya con este, … Mira. Menos *x* cuadrada, más *8x* igual a *y* cuadrada [asienten]. Para que esto se cumpla *x* debe de ser igual a *y.*
[67] Por ejemplo *y* vale *4*, …, va a quedar cuatro al cuadrado no entonces va a ser igual a *16.*
deben de valer cero. (…) Ah. Ya sé por qué es así. ¡Ah ya! Bueno no sé por qué hice esto.
[70] Ahí se puede ver que son iguales. Mira por ejemplo si valen lo mismo te queda *xx* menos dos *xx* tienes menos *x x*. Luego, eso más *x* cuadrada o *xx*, te queda cero ¿no?
[79] Para que esto se cumpla sería *x* igual a *y*. Porque x^2 e y^2 igual a $2xy$. Y luego de ahí, despejar *y.*
[80] Si, mejor igualamos a cero [Apoyan la idea: x^2-$2xy+y^2=0$].¡Perfecto! *x* menos *y* es igual a 0, $x = y$.
[83] Algo estamos haciendo mal ahí. Sí, ¿no? … cuyos catetos son *x* y *y* [revisa].
[84] Entonces el área está definida *x* por *y* sobre dos y esto es igual a *z* cuadrada sobre *4*, ¿no? [asienten]. Entonces igual a *x* cuadrada más *y* cuadrada sobre *4*. Luego lo demás queda bien, *x* igual a *y.*
[85] Entonces el triángulo es isósceles [asienten].

Después de la interacción los alumnos organizan sus anotaciones lo que constituye ya una *C-acción*. Las producciones de los equipos **A** y **B** aparecen en la tabla 40. La construcción de **A** se ha descrito antes y, en el registro se observa que **B** expresa con claridad la demostración.

Tabla 40. Organización de la demostración lograda por los equipos

Preguntas clave	Organizando la demostración	
	Equipo $\boxed{A}$	Equipo $\boxed{B}$
¿Qué información se supone cierta?	***P***: *XYZ es triángulo rectángulo y su área* $=z^2/4$	***P***: *XYZ triángulo rectángulo,* $c_1=x$, $c_2=y$ *y* $h=z$, $A=z^2/4$
¿Qué se deduce a partir de la información ***P***?	P_1: *el ángulo entre x e y es de 90º y su área es* $z^2/4$ *donde z es la hipotenusa.* $z^2=x^2+y^2 \Rightarrow z^2/4=(x^2+y^2)/4$ $xy/2=(x^2+y^2)/4$ $2xy=x^2+y^2$; $x(2y-x)=y^2$ $x^2=y^2$; $x=y$ $2y-x=x$; $2y=2x$; $y=x$	P_1: $x^2+y^2=z^2$; $A=z^2/4=xy/2$ *Entonces* $z^2=2xy$ *Ahora* $x^2+y^2=2xy$ $x^2-2xy+y^2=0$; $(x-y)^2=0$ $x-y=0 \Rightarrow x=y$
¿Qué significa probar ***Q***?	Q_1: Los catetos son de igual longitud	Q_1:$x=y$
¿Qué se pretende probar?	***Q***: *XYZ* es isósceles	***Q***: *XYZ es isósceles*

Finalmente el profesor retoma el ejemplo que utilizó al inicio de la sesión para explicar el método avance-retroceso, *Demostrar que dados a, b y c enteros. Si a divide a b y b divide a c, entonces a divide a c,* y expresa la importancia de dar una versión ordenada y condensada una vez que tienen claridad de los argumentos utilizados. Él realiza dicha versión en el pizarrón y les pide que hagan lo mismo con el resultado recién demostrado. Las versiones finales de sus demostraciones aparecen en la tabla 41 y en ambos equipos se comunica una demostración coherente y ordenada. Esta última parte muestra ya una acción de consolidación (***C****-acción*) del *registro matemático* (Forman 1996) como un género de discurso especializado utilizado por personas del medio. En este caso hay un manejo y comprensión de la proposición y su demostración y la forma de comunicarla en el lenguaje de la disciplina.

Tabla 41. Versiones condensadas de la demostración por los equipos.

$\boxed{A}$ *Dado que tenemos el triángulo rectángulo XYZ entonces su área está definida por* $xy/2= z^2/4$ *y por definición del* $\triangle$ *rectángulo sabemos que* $z^2 =x^2+y^2$ *entonces* $zz/4=(x^2+y^2)/4$ *entonces* $xy/2=(x^2+y^2)/4$ *luego* $xy=(x^2+y^2)/2$ *despejamos* x^2+y^2 *y tenemos* $2xy=x^2+y^2$ *volvemos a despejar y nos da* $0= x^2-2xy+y^2$ *lo que es igual a* $(x-y)^2=0$ *y para que esto se cumpla* $x-y=0 \therefore y=x$.
$\boxed{B}$ *Tenemos que XYZ es un triángulo rectángulo, x, y catetos, z hipotenusa y* $A(\triangle XYZ)=z^2/4$. *Luego del* $\triangle$ *rectángulo obtenemos que:* $x^2+y^2= z^2$ *y* $A=z^2/4=xy/2$. *Entonces* $z^2=2xy$ *y sustituyendo* $x^2+y^2=2xy$. $x^2-2xy+y^2=0$; $(x-y)^2=0$; $x-y=0 \Rightarrow x=y$. *Como* $x=y$ *entonces* $\triangle XYZ$ *es isósceles.*

Continuando con la sesión pasan a una serie de ejercicios propuestos con el objetivo de reforzar la idea de *pregunta clave* para retroceder en el método *avance-retroceso*. Una *pregunta clave* es una pregunta abstracta obtenida al cuestionarse cómo se puede probar que un enunciado dado es verdadero. La pregunta se formula haciendo referencia a sus conocimientos generales sobre el objeto o concepto eliminando detalles irrelevantes (como etiquetas, ecuaciones específicas, etc). Por ejemplo si se trata de probar que un determinado triángulo *ABC* es isósceles, la pregunta puede ser ¿cómo puedo saber que un triángulo es isósceles? es decir, se hace referencia a conocimientos generales de triángulos. O bien si se requiere probar que la ecuación $ax^2+bx+c=0$ tiene soluciones positivas en una determinada proposición bajo algunas condiciones de partida, la pregunta clave puede ser, en abstracto: ¿cómo puedo saber que una ecuación de segundo grado tiene solución positiva? O bien ¿cuándo la fórmula para resolver ecuaciones de segundo grado me da un número positivo?.

Después de una explicación previa se les presentan las siguientes cuestiones con las que se pretende lograr que manejen la idea de pregunta clave:
Para demostrar que *"Si x es un número real, entonces el valor máximo de* $-x^2+2x+1$ *es mayor o igual que 2"*. ¿Cuál de las siguientes preguntas clave es incorrecta?
a) ¿Cómo probar que el valor máximo de una parábola es mayor o igual que un número?
b) ¿Cómo probar que un número es menor o igual que el valor máximo de un polinomio?
c) ¿Cómo probar que el valor máximo de la función $-x^2+2x+1$ es mayor o igual que un número?
d) ¿Cómo probar que un número es menor o igual que el máximo de una función cuadrática?

Para esta tarea se les pide que justifiquen su respuesta. La idea de pregunta clave es justamente que no contenga información específica y éste es el argumento principal para identificar c) como la opción incorrecta. Esto, como veremos más adelante no lo tiene en cuenta el equipo para tomar su decisión. Inicialmente, intentan analizar las opciones, pero deciden estudiar previamente el enunciado tratando de identificar hipótesis y conclusión (*R-acciones*) [92-95]. Posteriormente se aprecia como la interacción entre ellos permite una aproximación a la comprensión del problema. Así se producen ciertas *B-acciones* [97 y 99] en las que el uso de lenguaje apropiado juega un papel determinante. Por ejemplo, en [97] no se considera el valor máximo que toma $-x^2+2x+1$. En su lugar se plantean sacar el valor máximo de *x;* aunque finalmente se dan cuenta de su error y buscan el mayor valor en el eje y [99]. Entienden *y* como la imagen de *x* según la ley $-x^2+2x+1$ y descartan los valores de $y<2$, al considerar que deben probar que son mayores o iguales que 2. Posteriormente, una nueva *B-acción* que entrelaza las anteriores permitiendo que otro alumno se dé cuenta que el máximo de la función se da cuando $x=1$ [102].

[88] La a) no, esta no.
[89] Sí, pues es una función cuadrada.
[91] Cuál sería la pregunta que ustedes verían.
[92] Bueno primero aquí cuál sería
[95] No, *P* sí es que: *x* es número real. Acuérdate que *Q* es lo que está después del entonces.
[97] Bueno sí se entiende, entonces que vendría preguntándonos, ¿cómo sacar el valor máximo de *x*?
[98] No, el mínimo valor que cumpla con esto, porque este

nuestra *P* [hipótesis]
[93] *P* es igual: sea *x* número real y *Q*: el valor máximo de $-x^2+2x+1$ es mayor o igual a dos, ¿verdad?
[94] Si *P* es esto *Q* vendría siendo que *x* es esto, sí ¿verdad?

valor para abajo tenemos el valor y que es el valor mínimo de *x* que cumple con esto.
[99] Menores [que 2] en [el eje] *y* no cumplen con esto y los mayores sí cumplen con esto, entonces sería de aquí para allá.
[102] No, si agarramos el mayor valor [de $-x^2+2x+1$] podría *x* valer uno [Risas].

Una vez comprendido el enunciado, proceden al análisis de las opciones para identificar cuál no es una pregunta clave o cuales son equivalentes; en ambos casos ocurre una *B-acción* [103, 106, 112, 118]. En principio [103], piensan que la opción c) al contener la información específica que se pide en la proposición es adecuada y no está claro para ellos que las preguntas claves, al ser un apoyo para realizar la demostración, no es conveniente que contengan información específica. En [104-105] se realizan *R-acciones* implícitas al reconocer los elementos que les permiten emprender *B-acciones* centradas en determinar la equivalencia de b), d) y a). Dado que $-x^2+2x+1$ es un polinomio, de grado 2, se dan cuenta que se puede considerar función cuadrática y que también es una parábola [118]. Consideran que a) es equivalente a b) y d) analizando el orden de los términos que forman parte de cada pregunta [106] y tienen en cuenta el tipo de desigualdades (en a) es menor o igual y en b) y d) mayor o igual) y el tipo de números que se están comparando [112]. Hasta ahora no se discute acerca de la opción c), sólo se menciona [106] que puede ser inadecuada pero no se ofrecen argumentos y en resumen, consideran a), b) y d) como posibles preguntas claves.

[103] Se me hace que es este ¿no?, por ejemplo la [opción] *c* es lógica. Es lo que nos estamos preguntando aquí, como probar que el máximo de esta función es mayor o igual.
[104] Ajá y el de acá por ejemplo este [b)] y este [d)] como que me está diciendo lo mismo, cómo podrías probar que un número es menor o igual que el valor máximo de un polinomio.
[105] Sí, es como probar que el valor máximo de esta función cuadrática es mayor que el número.
[106] Como que no, esa no me gusta a mí, la c no me gusta y luego como que la a), cómo probar que el valor máximo de una parábola es mayor o igual, es lo mismo.
[107] Como pueden probar que el valor máximo de la función esta es mayor o igual que un número.
[108] Esta y esta es la misma pregunta y solamente nos están dando la función [c)] y aquí nos dice que es una parábola cualquiera [a)] pero nos está preguntando por el valor máximo en las dos.

[109] Sí es la misma pregunta.
[110] Pero aquí queremos encontrar que si *x* es número real, el valor máximo es mayor o igual que dos.
[111] Sí verdad como que estas dos no nos servirían de mucho porque este sí me está diciendo que es mayor o igual como probar que es mayor o igual.
[112] Pero es que te la están preguntando al revés.
[113] Cómo pueden probar que un número es menor o igual que este número.
[117] Cómo probar que el valor máximo de una parábola es mayor o igual que un número.
[118] Entonces la función es la parábola ¿no?
[119] Ajá, mayor o igual que un número.

En el siguiente fragmento se puede ver que más que centrarse en identificar las preguntas clave, que era el propósito de la actividad, están interesados en cómo probar la proposición. En este sentido emprenden tanto *R-acciones* para reconocer los elementos disponibles [120,132], cómo para reconocer la proposición a probar [133,134] y para identificar cuál pregunta los ayudaría a avanzar [123,129].

[120] Tenemos las propiedades de una parábola, el cálculo del vértice.
[123] Cómo pueden probar que el valor máximo de una parábola, el valor máximo

[130] Ajá, sí podemos demostrar que muchos números son menores que este.
[131] Ajá hay varios. Puedo pensar que hay varios pero no me está respondiendo mi pregunta.

de esto es mayor o igual que un número.
[128] O sea esto sí sirve ¿no?
[129] Ajá y lo de cómo pueden probar que este número es menor o igual que el valor máximo del polinomio es contrario.
[132] Ajá, sabemos que *x* es real o no.
[133] También, pero lo que quiero ver es: cómo demostrar que esto es mayor o igual a esto.
[134] Quiero demostrar que el valor de este es mayor o igual que este. Supongamos que el valor máximo de este es *x*

Mediante algunas *R-acciones* [135-145] buscan elementos comunes de las preguntas clave, por ejemplo [135] se fijan en el signo "mayor o igual" para expresar que a) y c) se parecen en el sentido de la desigualdad, indican que b) y d) comparten el signo "menor igual" [136], tratan de encontrar además del signo relación entre parábola y función cuadrática [141]. Un alumno reconoce que ciertamente los signos se han invertido al igual que los elementos [137], pero eso no les permite avanzar en la demostración, lo que deja ver que no tienen clara la tarea de identificar preguntas clave. Al pensar que un polinomio no es necesariamente parábola [142] consideran la posibilidad de eliminar la opción b). Finalmente deciden descartar a) ya que no incluye la función, argumentando que para ellos es un elemento fundamental para construir la prueba, sin embargo bajo este argumento no consideran que en b) y d) tampoco aparece la función de manera explícita. Así reconocen como preguntas clave b), c) y d) argumentando que sí contienen la información necesaria para demostrar la proposición [145]. Como antes mencionamos, el término pregunta clave aún no se comprende del todo ya que consideran importante que tenga elementos específicos del enunciado a probar, justo lo contrario a la idea de pregunta clave que más bien se considera en abstracto como estrategia para darse cuenta de los elementos generales que deben utilizarse en la construcción de la demostración.

[135] En la primera y en la c me están diciendo que tengo la opción de demostrar que esto [máximo de la parábola en a) y el valor máximo de la función específica $-x^2+2x+1$ en la opción c)] es mayor igual a dos [un número en abstracto no menciona al 2] que en sí, es lo que quiero probar.
[136] Ajá pero en b y d me están dando la opción de cómo demostrar que esto [número] es menor igual a esto [valor máximo de la parábola en b) y valor máximo de la función cuadrática en d)].
[137] Y yo puedo demostrar que es menor o igual. Pero no me está sirviendo para decir sí es mayor o igual, que es lo que a mí me están preguntando.
[138] Aunque de una forma u otra sabiendo si es menor igual podemos saber.
[139] A ver déjame, creo que sí. El c) sí.
[140] Ajá igual que en el a) que me están diciendo lo mismo [asienten].
[141] Ajá, es menor que ese. [En b) número menor o igual que el] Máximo de la parábola, [en d) número menor o igual que el valor máximo de la] la función cuadrática.
[142] ¿No es b?, porque cualquier polinomio no es necesariamente parábola.
[143] Y cuál es su valor máximo.
[144] No, pues es que no sé cómo.
[145] Ajá // Porque nos está preguntando el valor máximo de una parábola cualquiera. Para lo cual necesitamos una función y en este caso no la tenemos. En los incisos *b, c* y *d* si tenemos las herramientas para sacar los valores que nos piden sí ¿no? [asienten y descartan *a*].

En ese momento interviene el profesor retomando sólo este último ejercicio interpretando la "pregunta clave", de forma diferente a como estaba planificado, sin considerarla como algo abstracto, sin símbolos e información específica. En este fragmento la discusión se centra en *R-acciones* queconduce a los alumnos ver la equivalencia de las opciones y el cambio en el sentido de los símbolos de la relación de orden.

[146] Profesor: A ver lo que tienen que pensar es la pregunta, esa sería una pista. Por dónde debo ir. Por ejemplo, ¿cómo pueden probar que el valor máximo de la función $-x^2+2x+1$ es
[149] As: En el *a)* me dice lo mismo.
[150] P: Como que en todos me dice lo mismo. A ver el *b)*.

mayor o igual que un número? Si yo contesto eso, ¿me ayuda a probarlo? […] El inciso c), por ejemplo,
[147] Alumnos: Sí el inciso c) sí.
[148] P: Sí, ¿no?, porque cuando yo sepa como se prueba eso, ya puedo avanzar.
[151] As: Lo está cambiando.
[152] P: La idea es la misma.
[153] As: Sí, sólo que ahora es de allá para acá [se refiere al cambio de signo y de los elementos].

El profesor les pide centrarse en *R-acciones* para distinguir la diferencia entre los objetos [154]. En cuanto al polinomio [155-157], concluyen que si en general saben encontrar el valor máximo de un polinomio pueden hacerlo para el caso particular del ejercicio. Luego para el a) en el que figura la parábola, determinan [158-161] que no es sencillo encontrar el valor máximo para cualquier parábola influenciados por un dibujo que realiza el profesor de una parábola con vértice fuera del origen y el eje de simetría no paralelo a ningún eje (también creemos que influye la actividad de construcción de la parábola a partir de su definición como lugar geométrico del primer bloque de la ID). Un estudiante habla de la posibilidad de hacerlo a partir del criterio de la derivada [162] y en [163] el profesor expresa la necesidad de tener expresada la función. Esto último nos lleva a concluir que al requerir información específica el profesor entiende la pregunta clave como que debe incluir información específica y no una pregunta con un formato más abstracto. Esto nos habla de la necesidad de replantear la noción de pregunta clave con un enfoque centrado en su función, más que en su apariencia, es decir, dirigido hacia preguntas que ayuden a encontrar una pista que me permita avanzar, más que considerar si debe o no contener símbolos o información específica.

[154] Profesor: Cambia el orden, pero te dice lo mismo. Pero el punto no es en esa parte, a ver si nos fijamos en los objetos, podemos ver las diferencias: parábola, polinomio, menos *x* cuadrada … en específico la función, función cuadrática. Por ejemplo el del polinomio, me ayudaría [lee] ¿Cómo pueden probar que un número es menor o igual que el valor máximo de un polinomio? me sirve para esto.
[155] Alumnos: No, porque puede ser cualquier polinomio y no para este.
[156] P: Pero si yo sé en general cómo hacerlo para cualquier polinomio, ¿me ayuda? [asienten]
[158] P: En el a), si yo sé, bueno ahí se refiere a una parábola, no está hablando de una función cuadrática, no de un polinomio, no habla de la función particular. Si yo sé cómo probar que el valor máximo de una parábola es mayor o igual que un número, ¿eso me ayuda?
[159] As: Para cualquier parábola?
[160] P: A ver si tengo una parábola cualquiera [dibuja], será fácil encontrar el valor máximo.
[161] As: No, así no es fácil.
[162] As: Sí, yo puedo encontrarlo con la derivada.
[163] P: No, pero no tienes la función, sería complicado.
[164] As: Entonces no me ayuda.
[165] P: Bueno, quiero que ustedes lo expliquen ahí. Ahora el último inciso, dónde se refiere a la función cuadrática, dice lo mismo.
[166] As: Polinomio, función cuadrática, la específica [$-x^2 +2x +1$], sí se puede.
[167] P: Pero la parábola no me dice nada. Bueno expliquen con sus propias palabras.
[168] As: Como nos está preguntando para una parábola, entonces necesitamos tener definida la función. [Escriben y repiten] Para lo cual necesitamos la función.
[170] As: En este caso, pues ya [antes lo habían manifestado], en los incisos *b, c* y *d* sí tenemos las herramientas necesarias para probar ahí.

En las respuestas que aparecen en la tabla 42, ambos equipos coinciden y su argumento es la necesidad de información específica, es decir, la expresión de la parábola . Sin embargo bajo este argumento no consideran que b) y d) tampoco muestran la función explícita. En la interacción hemos apreciado *R-acciones* tanto durante el proceso de reconocimiento de elementos, importantes para ellos, que debe tener la pregunta clave, como para el reconocimiento de conceptos involucrados en el enunciado de la proposición. Sin embargo, es necesario fortalecer la idea de pregunta clave y revisar la manera de aproximarnos para lograr una comprensión.

Tabla 42. Respuestas de los equipos a identicar preguntas claves.

$\boxed{A}$ *Es la pregunta incorrecta a porque nos está pidiendo el valor máximo de la parábola para la cual necesitamos la función y en este caso no la tenemos. Y para los incisos b, c y d sí tenemos datos suficientes para probar lo que nos pide*. $\boxed{B}$ *No nos ayuda el inciso a, ya que está hablando de una parábola pero no conocemos su función y para poder obtener su valor máximo necesitamos la derivada de la misma.*

El tiempo previsto para el desarrollo de la actividad no fue suficiente y al día siguiente se continuó con la siguiente parte. Dado que el audio de la grabación fue mejor en el equipo **B** el se incluye análisis de las transcripciones de este otro equipo.

La cuestión planteada para los equipos era que para dos problemas propuestos elaboraran una lista con al menos dos preguntas claves. La indicación era que las preguntas no deberían contener símbolos ni notación del problema tratado. Esto último se enfatizó dado que en la sesión anterior se percibió confusión en torno al concepto de pregunta clave.

Para la primera proposición propuesta, a) *Si n es un entero par, entonces* n^2 *es un entero par.* El equipo **B** construye sus preguntas claves a través de *R-acciones* que ayudan al reconocimiento y comprensión de lo que desean probar [2-4]. Hay un estudiante que pone atención en que la pregunta clave no tenga información específica ni símbolos y eso ayuda a concretar *B-acciones* para enunciar, en una *C-acción* [8], de manera correcta la pregunta clave ¿cómo ver que un número es par?, es decir una pregunta planteada de forma abstracta (en este caso sería la pregunta clave considerando el método de retroceso, es decir, ¿cómo probar *Q*? [6]). Vemos que en esa *C-acción* se tienen en cuenta *R-acciones* de reconocimiento de pregunta clave sin recurrir a símbolos específicos [1 y 10]. Luego se concentran en buscar respuestas a la pregunta planteada mediante *B-acciones* [12 y 13]. Da la impresión siguen sin entender cuál es el papel de la pregunta y que la tarea solicitada termina cuando ésta se enuncia, mientras que ellos continúan tratando de probar la proposición.

[1] Ah pero sin símbolos.
[2] Pero, por qué dos preguntas para *Q* : *n* cuadrada es par.
[3] Por eso pero es cómo probar que *n* cuadrada es par a partir de un par ¿verdad?
[4] O sea como probar que el cuadrado de un par sigue siendo par.
[5] Sí, sería algo así.
[6] Pues es que lo que no entiendo, es que por ejemplo, hacer preguntas que nos ayuden a demostrar el *Q* [*n* cuadrada es par]
[7] No, tratar de entender qué es esto.
[8] Mmm, ¿cómo ver que un número es par?
[9] No es lo mismo.
[10] Ah sí, cierto. No incluye símbolos.
[11] ¿Cómo probar que *n* cuadrada es par?
[12] Si es divisible entre dos.
[13] Ajá, si en el módulo 2, *n* es cero.

Se produce «el error de la recíproca» [16-23] (e.g. Epp, 2003; Alvarado & González, 2010) aunque mediante una *R-acción* [29] se dan cuenta del papel de la hipótesis y de lo que quieren probar. En el extracto anterior formularon la pregunta ¿cómo probar que un número es par? [8] y su respuesta [13] es si el número en módulo 2 es cero. En este momento [31] mediante una *C-acción* [31] se preguntan ¿cómo probar que n cuadrada [un número] módulo 2 es cero?. Aunque aún no construyen las preguntas de forma abstracta, esto puede considerarse un indicador de una ***C****-acción* de consolidación vinculada al proceso retroceder construyendo preguntas que permitan llegar al consecuente.

[16] Pero a poco si demostramos […] que n^2 es divisible entre *2* ya llegamos a que esto viene de un par.
[17] ¿Cómo?
[25] Este, podríamos poner algo sobre el módulo dos no.
[26] Algo así. Este *n* cuadrada módulo dos.

[18] O sea es lo que dicen supongamos que tenemos un cuatro [la hipótesis es que *n* es par].
[19] (Mm) bueno, a ver *36* por ejemplo.
[20] Que viene de un *6*, viene de un par, o sea si demuestro que es divisible entre dos, es *18.*
[21] De ahí ya demuestro que un cuadrado viene de un par.
[22] O sea no estamos dando por hecho que esta pregunta nos va a ayudar a defenderlo, esta pregunta nos va a ayudar a dar un paso de la demostración. Digo yo.
[23] No estoy cien por ciento seguro.
[24] No, porque de hecho no demuestras todo.
[27] Ah sí, este es el residuo.
[28] Pero tiene que ser n^2 o puede ser la otra *n* que venga de que es un par. ¡Ah no! pero lo que queremos demostrar es que… ¡Ah sí!
[29] No, no estamos dando por hecho que n^2 es par, lo que queremos demostrar es que n^2 es *par.*
[30] Entonces sí se puede así ¿no? con la *n* cuadrada.
[31] Cómo probar que *n* cuadrada módulo *2* o en módulo *2* o así es cero.

Tabla 43. Los equipos derivan preguntas claves para avanzar en la demostración de *Si n es un entero par, entonces n^2 es un entero par*

$\boxed{\text{A}}$ *¿qué es un entero par?*
¿Cómo podemos probar que n^2 es entero par para n entero par?
¿Cómo se define n^2 para n entero par?
$\boxed{\text{B}}$ *¿Cómo probar que n^2 es divisible entre dos?*
¿Cómo probar que n^2 MÓDULO 2 es igual a cero?

Observando la tabla 43, en el caso del equipo **A** encontramos una pregunta clave que reúne las características de no contener información simbólica, ni específica, ¿qué es un entero par?, vemos que se construye a partir de la hipótesis para dar un paso en el proceso de *avance* de la demostración, es decir buscan extraer información relevante de los elementos que conforman la hipótesis. A juzgar por las siguientes preguntas registradas por el equipo vemos que tratan de perfilar la forma que tendría el cuadrado de un número par y ligar con la hipótesis para probar que es par.
El equipo **B** en su escrito plantea las preguntas claves a partir del método de *retroceso*, es decir, su pregunta se dirige a donde necesitan llegar, la conclusión. Una vez que tienen clara la definición de número par, que aunque no aparece en el registro escrito se indicó en [8], la pregunta clave que plantean es ¿cómo ver que un número es par?
Al observar el desempeño de los estudiantes con esta actividad encontramos que no ha sido muy clara la forma en que se ha definido pregunta clave, en el sentido de sugerir que sea abstracta, que no contenga símbolos e información específica del problema. Esto se hizo así con la intención de que no transcribieran símbolos sin una comprensión de los diferentes elementos puestos en juego y de los conocimientos de resultados previos que tienen los estudiantes. Además estos elementos (definiciones, proposiciones, propiedades, etc) se suelen escribir en general y por esa razón tratar de formular preguntas abstractas se considera que puede ayudar a encontrar la información necesaria para la demostración. Sin embargo, el ejercicio de búsqueda de preguntas y respuestas que puedan ayudar a extraer y derivar información para construir las demostraciones ha resultado muy rico. Se observa que las primeras actividades de esta ingeniería didáctica han cumplido el objetivo ya que los estudiantes son cuidadosos en el tratamiento de las definiciones y también en la identificación de los elementos que componen la proposición: hipótesis y conclusión
El proceso de búsqueda de preguntas clave sigue con la proposición, *Si n es un entero dado que satisface* $-3n^2+2n+8=0$, *entonces* $2n^2-3n=2$. Durante la interacción en el equipo **B**, encontramos que, al igual que antes, ponen cuidado en tratar de reconocer (*R-acciones*) los elementos que conforman la proposición, así como su función [33]. También es interesante notar que un alumno es consciente de que ha cometido el error de negación del antecedente [33], lo que constituye una acción de consolidación (***C̲***-*acción*) del rol de los elementos de una proposición (Epp 2003).

Mediante *B-acciones* por ensayo y error tratan de encontrar raíces de los polinomios [33, 34 y 36], técnica de uso común en los alumnos que para Watson & Mason (2005) conduce por un camino de razonamiento hacia las demostraciones.

[32] Entonces, mh…, bueno que satisface entonces dos *n* cuadrada menos tres *n* igual a *2.*
[33] De hecho cero tampoco satisface en el primero entonces el cero tampoco en el segundo. ¡Ah no, estoy viendo mal! si satisface este [la hipótesis], entonces satisface el de acá [la conclusión].
[34] Con dos, cuatro … menos doce más cuatro … cero, sí es 2 [$-3n^2+2n+8$ es igual a cero cuando $n=2$]. Ahora ocho menos seis es dos [verifica que se satisface $2n^2-3n=2$ cuando $n=2$].
[35] Es el único, el dos.
[36] No, [Risas]. Cómo podemos probar que para valores de *n* se satisface también este polinomio

En el siguiente fragmento se aprecia como el equipo se enfoca en una nueva estrategia, sumar ambos polinomios y dar por hecho que la proposición es válida, es decir, su razonamiento se basa en que si se tiene la raíz entera del polinomio $-3n^2+2n+8$ y es raíz también de $2n^2-3n-2$ entonces lo será de un tercer polinomio que es la suma. Aunque con esto se desvían de la tarea que es encontrar preguntas clave que los apoye a la demostración, hay que reconocer que se encuentran ya inmersos en la actividad de la demostración y sin darse cuenta están generando conjeturas susceptibles de prueba y que constituyen un nuevo conocimiento, es decir, realmente están haciendo matemáticas. Vemos también una *B-acción* donde verifican que la solución encontrada por ensayo y error satisface la tercera ecuación [41].

[38] //Cómo probar que … la solución de un polinomio es [solución] del otro.
[39] ¿Cómo? A ver espérame. Sí, mira no le podemos hacer así, sumar los dos.
[40] Y nos da otro polinomio si satisface estos dos va a satisfacer a este [$-n^2-n+6=0$] ¿no? ¿cómo probar que el número entero es raíz de otro polinomio?
[41] Entonces también lo satisface *2*, menos *4* menos *2* más *6* igual a 0.
[42] (Mm) Sí, de hecho … cómo probar… qué, sí lo cumple [el 2 es raíz de $-n^2-n+6=0$].
[46] Cómo probar que …un entero, un entero satisface. [Pensando en voz alta] Menos *n* cuadrada …
[48] A lo mejor sí, poniendo enteros que cumplen con el polinomio $-n^2-n+6$ este también cumple acá.
[49] O podemos ponerle otra. Si ya encontramos que nada más satisface éste podemos ponerle como probar que el entero dos satisface esta ecuación.
[50] Pero no sabemos ¿?

Más que plantear una pregunta clave por ejemplo, ¿cómo encontrar un entero que sea raíz del polinomio $-3n^2+2n+8$ o que satisfaga la ecuación $-3n^2+2n+8=0$? los estudiantes están enfocados en dar respuesta a la pregunta clave. Esto se aprecia en *B-acciones* [52, 55] con las que han encontrado las soluciones 2 y 4/3 factorizando la expresión. Tienen necesidad de verificar su validez [56] y se dan cuenta que 2 satisface ambas ecuaciones, sin embargo 4/3 únicamente satisface la primera ecuación, sin tener en cuenta que en la hipótesis se hace referencia a solución entera. Finalmente expresan en una *C-acción* que la pregunta clave sería, "¿cómo pueden encontrar un entero que satisface la ecuación?" [69] aunque a juzgar por el registro escrito del equipo **B**, que presentamos más adelante, se refieren a la ecuación que resulta de sumar ambas, las ecuaciones de la hipótesis y conclusión ($-n^2-n+6=0$).

[52] Bueno no sé si haya más ¿? Para división sintética se empieza de acá ¿verdad? [intenta factorizar].
[53] Sí. Pero empieza de aquí multiplico este… de acá ¿no? *2* por menos *3* menos *6* verdad …
[54] No hay uno que lo multiplique por menos *3* y me dé *4*.
[55] A menos que sea … sí es *2* y *-4/3* [encuentra las
[61] De hecho a ninguna.
[62] ¿Cómo no? Esta sí la satisface el *-4/3*.
[63] ¡Ay! Entonces el *2* es el único que la satisface.
[64] Bueno vamos a ponerlo así.
[65] Pero ya sería esa la pregunta ¿no?

raíces de $-3n^2+2n+8$ presente en la hipótesis]
[56] Menos tres por *16/9*, menos *16/3* más *2* por menos *4/3* más *8* igual a cero aaaaah
[57] Menos *3* por *16* novenos.
[58] Sí son, *-16/3* menos *8* /3 son *8.*
[59] Entonces sí son *2* y - *4/3*.
[60] ¡Ay pues sí! pero salen dos raíces el *2* y el *-4 /3* ¿verdad? el *-4/3* satisface ésta pero no satisface a ésta [4/3 sí es raíz del polinomio $-3n^2+2n+8$ pero no es raíz de , $2n^2-3n-2$].
[66] Bueno vamos a ponerlo así como quiera [Risas].
[67] Cómo le pongo a cómo probar que el dos es el único entero que satisface los dos [polinomios].
[68] Bueno al menos aquí es encontrar el que sirve.
[69] Sí y aquí qué pregunta. A ver pero la pregunta clave cómo pueden encontrar un entero que satisface la ecuación.

Aunque sólo hemos seguido la interacción en el equipo **B,** en la tabla 44 se incluye también al equipo **A**. En las preguntas clave de ambos equipos se encuentra información específica de la proposición *Si n es un entero dado que satisface* $-3n^2+2n+8=0$*, entonces* $2n^2-3n=2$, no obstante les ayuda a construir la demostración a partir de las respuestas generadas.

Tabla 44. Preguntas claves de los equipos para avanzar en la demostración de: *Si n es un entero dado que satisface* $-3n^2+2n+8=0$*, entonces* $2n^2-3n=2$

A *¿Cómo probamos que n satisface* $2n^2-3n=2$*? ¿Cómo probamos que el valor de* $2n^2-3n$ *es igual a 2? ¿Cómo probar que el valor de* $-3n^2+2n+8$ *es igual a 0? ¿Cómo probamos que n satisface* $-3n^2+2n+8=0$*?*
B ¿Cómo probar que el 2 satisface los dos polinomios?*¿Cómo probar que un entero satisface* $-n^2-n+6=0$*?*

En la siguiente consigna se solicita a los estudiantes que identifiquen de las opciones a), b), c) y d) la respuesta incorrecta para la pregunta clave: *"¿cómo pueden probar que dos rectas en un plano son paralelas?"* y que expliquen su respuesta.

a) Probar que las pendientes de las rectas son iguales,
b) probar que cada una de las dos rectas es paralela a una tercera recta,
c) probar que cada una de las dos rectas es perpendicular a una tercera recta, y
d) probar que cada una de las dos rectas están en lados opuestos de un cuadrilátero.

En la interacción del equipo **B**, en relación a las opciones a), b) y c) podemos observar que es inmediato considerarlas como respuesta correcta. Además b) y c) de manera inmediata las encuentran equivalentes y muy obvias como un camino para probar que dos rectas son paralelas. Es de destacar que aunque el concepto de rectas perpendiculares se estudia en primaria y secundaria, los alumnos vinculan este concepto con el plano cartesiano. Omitimos esta parte del diálogo considerando que no se pierden los aspectos relevantes. Una vez descartadas las respuestas correctas, la discusión se centra en explorar la opción d) para lo que activan *B-acciones* cuando analizan como ejemplo crítico de cuadrilátero un trapecio [83,84]. Durante la interacción discuten acerca de considerar los lados paralelos del trapecio [85,123], pero manifiestan una *C-acción* cuando expresan que el trapecio es un contraejemplo [137, 139, 140] al tener dos lados no paralelos y, por tanto, probar que cada una de las rectas están en lados opuestos de un cuadrilátero no prueba que dos rectas sean paralelas. Esto [137, 139 y 140] se considera una ***C**-acción* ligada al manejo y papel de los ejemplos y contraejemplos trabajado ya en esta ingeniería didáctica por lo que constituye una acción de consolidación.

[83] [la opción d es incorrecta] Porque un cuadrilátero también puede ser este ¿no? [dibuja].
[84] Sí, sí, un trapecio. Y no, y nada más tiene un par de rectas paralelas.
[124] Pero cuáles, … es que no siempre son las rectas paralelas y ¿? también están confusas.
[125] ¡Ah no! pero es que te acuerdas que cada una de las dos rectas que están en lados opuestos,

[101] Pero es que cada una de las rectas están en grados.
[102] ¡mira! […], si están aquí, sí, estas son las rectas, sí son paralelas y eso que es un cuadrilátero.
[118] Es la *d)* [un integrante del equipo muestra desacuerdo] No, no es la *d)*.
[120] Y sí, podemos poner para explicar este ejemplo..
[121] Sí, porque por ejemplo, un trapecio y luego […], sólo tiene un par de lados paralelos *a, b, c* y *d* sólo tiene un par de lados paralelos *a* y *c*.
[123] Pues también podemos explicar eso ¿no? De que sin embargo en estos lados, estos dos sí son paralelas, que puede ser cierto.
entonces sí, o sea entonces esta tiene que ser por fuerza paralela, son opuestos.
[126] ¡Ay! dos no son.
[136] Luego cuál no responde la pregunta.
[137] Ajá no siempre la *d)* entonces no sirve.
[138] De sentido contrario.
[139] Más bien es un contraejemplo [los dos lados opuestos que no son paralelos en el trapecio].
[140] Ajá y esa es la que nos sirve para demostrarlo.
[141] Que no son [asienten].
[142] Entonces que pongan en esta letra: lado *a* [trapecio] es paralela a *c* y los otros no.

En la tabla 45 las respuestas de ambos equipos, son evidencias no sólo de *C-acciones*, sino de acciones de consolidación inherentes a los objetivos de sesiones previas. En el caso del equipo **A**, muestran un manejo cuidadoso de las definiciones, y en **B** del manejo de contraejemplos.

Tabla 45. Identificando respuestas incorrectas a: *"¿cómo pueden probar que dos rectas en un plano son paralelas?"*

$\boxed{A}$ *La d) es incorrecta, dado que en un cuadrilátero los lados opuestos no necesariamente son paralelas por definición de cuadrilátero, pues este sólo tiene que cumplir con ser una figura de cuatro lados cerrada.*
$\boxed{B}$ *d) porque por ejemplo en un trapecio sólo tiene un par de lados paralelos.* *[Dibuja] a* $\mid\mid$ *c y b no es paralela a d, por lo cual cada lado opuesto no es paralelo al otro.*

En la siguiente consigna se solicita a los pequeños grupos que *para cada una de las preguntas clave, elaboren una lista con al menos tres respuestas.*

Para encontrar respuestas a la pregunta ¿Cómo se puede probar que dos números reales son iguales? El equipo **B** discute, en forma de *B-acciones*, inicialmente sobre si igualdad del valor absoluto al cuadrado de los números implica la igualdad de números aunque lo desechan con un argumento válido [152-154]. Luego exhiben una *C-acción,* en relación a la igualdad de números cuando sostienen que para que sean iguales al dividirlos por un número distinto de 0 cociente y residuo son iguales [155] o al asociarlo con la multiplicación y observar que se da la igualdad si el producto por otro número es el mismo en ambos casos [165, *C-acción*]. En esta parte podemos percibir de manera implícita *R-acciones* al discutir sobre operaciones básicas, que se van entrelazando para conformar *B-acciones* que derivan en *C-acciones*. De la misma manera muestran *B-acciones* cuando utilizan la sustracción, y llegan a una *C-acción* al decir que dos números son iguales si su diferencia es 0 [170-174]. La posibilidad de discutir en el grupo permite corregir algunos errores derivados de querer entrelazar de manera directa la acción previa. Por ejemplo, mientras se discute que la igualdad se deduce de que la resta de los números es 0 [171], un alumno sigue pensando en la multiplicación y argumenta tratando de convencer que el argumento es incorrecto, sin embargo al centrarlo en la resta se acepta como válida la respuesta. Además, al trabajar con el 0 como "neutro" de la suma [170] aunque no sea de manera explícita, se desencadena otra *B-acción* realizando la conexión con el neutro multiplicativo y planteando que si el 1 es resultado de la división entre dos números entonces se prueba que los números son iguales. Así se produce una nueva *C-acción* [175].

[151] Cómo se puede probar que dos números reales son iguales
[152] Probar que su absoluto al cuadrado es igual [otro
[169] Bueno, si *c* está en los naturales
[170] No, no pero de hecho no necesitas justificarlo si fuera 0 su resta ya la hicimos.

estudiante corrige] No, su absoluto es igual
[154] No, pero un absoluto puede venir de un negativo y otro de un positivo y el absoluto es el mismo positivo y no son iguales
[155] Y no puede ser con la división porque la división es el mismo número y el mismo residuo
[158] Luego *a)* para las respuestas: a sobre b
[159] Bueno, más bien …. No *a* sobre c. ¿No? es que también falta *c*
[160] Bueno, entonces le ponemos en *c*. Un entero o no sé. Yo decía así, por ejemplo *a/c* sea igual a *b/c*
[161] ¡Ah sí!, sÍ //
[165] Espérate cuando tú expusiste algo del módulo. Ponías las propiedades de los números, algo lo de la compatibilidad. No, compatibilidad no otra que al final... Por ejemplo que si tienes *a* por *c*, bueno es lo mismo *a* por *c* siempre cuando *a* sea igual a *b.* ¡Ay algo así! ¿Hay una propiedad así?
Porque por ejemplo, 1 con 1 ,… 2 con 2 es 0
[171] No pero 0 por 2, 0 y -1 por 0 es 0. Entonces ahí no son iguales y te da un resultado igual
[173] Pero en resta sí
[174] Pero ahí falta justificar. Nada más *a* menos *b* igual a 0
[175] Ah sí, también puede ser si a entre b es 1
[176] Deja escribir todo porque si no se me van a olvidar, que … Probar si c está en los naturales y …
a es igual a *b* si *a* entre *b* igual a *1*. Sí, ¿no?
[178] Si estos son los naturales y si, multipli- cados por otro, o cómo le ponemos, ocurre pues *a* es igual a *b* y este nada más así con c

El juego con las operaciones los conduce a *B-acciones* que significan un conocimiento más sofisticado y proponen, en el contexto de funciones, que si *f* es función y las imágenes de *a* y *b* son iguales deben provenir de pre-imágenes iguales, es decir *a=b*. Esta *B-acción* muestra un conocimiento superior y vemos como de una pregunta en apariencia muy sencilla van entrelazando conocimiento y razonando sobre su validez. En esta parte podemos observar que trabajan con conocimiento crucial en matemáticas: cuándo una relación es función. A menudo un matemático cuando propone un candidato para "función" debe justificar que está bien definida, es decir toma la igualdad *f(a)=f(b)* y debe probar que *a=b*. Esto justamente es la *C-acción* que se propone [180]. En esta parte podemos destacar la importancia de seguir las interacciones en equipos, puesto que la mayoría del conocimiento que se va generando no se reporta en los escritos. De hecho esta parte no fue documentada para entregarla como un registro escrito sin embargo sí se discutió y fue aprobada por el equipo. En el diseño de esta hoja de trabajo hemos encontrado que sugerir que las preguntas claves no tuvieran símbolos ha generado confusión y se han descartado buenas respuestas en el registro escrito [181].

[180] Podíamos poner funciones si una función *f* y *f(a)* es igual *f(b)*
[181] Sí sería *a=b.* Pero no sé, es que acá especifica que no podemos usar símbolos ¿no?
[183] No, dice que en las preguntas, no dice que en las respuestas
[184] [..] entonces le ponemos, de hecho […] nos está faltando probar que … ¡ah no! si ya es función
[185] Ah sí, prueba que estos son los naturales iguales entonces ¿verdad?

Finalmente, en la tabla 46 del escrito de los equipos, no se plasma todo lo ocurrido durante la interacción del equipo **B**. En relación al equipo **A** aparecen también algunas ideas surgidas en la discusión de **B**, pero además nos encontramos con que en la tercera respuesta incluso ensayan una sencilla prueba.

Tabla 46. Justificaciones de los equipos para probar que dos números reales son iguales

A *Si* $a-b=0$; $a\lambda=b\lambda$; $a+b=2a$ $\therefore a-2a=-b$ $\therefore -a=-b$ $\therefore a=b$
B *Sean a, b los números* *a) Probar que si* $c\in N$ *y ocurre* $ac=bc$ *entonces* $a=b$; *b)Probar que* $a-b=0$; *c)Probar que* $a/b=1$ *con* $b\neq0$

En la siguiente consigna para proponer al menos tres respuestas a la pregunta clave ¿cómo puedes probar que dos conjuntos son iguales? ensayan *B-acciones* primero sobre la cardinalidad [191] y poco a poco los alumnos demandan mayor explicación y argumentación dentro de los equipos [193] o plantean un contraejemplo (*B-acción* en este caso) [195] que hace que abandonen la idea, exhibiendo con ello una ***C**-acción* de consolidación vinculada al manejo de ejemplos y contraejemplos. Se observa una *C-acción* al mencionar que la cardinalidad es necesaria pero no suficiente puesto que se requiere que sean iguales los elementos [201]. Otras *B-acciones* de reconocimiento [194, 204] conectan con la noción de función y con la idea de función inyectiva [206] aunque no exploran la necesidad de la sobreyectividad para la igualdad de los conjuntos, por lo tanto no concretan la *C-acción*.

[191] Que tengan el mismo número de elementos
[192] Sí, lo que decía él, de hecho hay que probar que sí sus correspondientes son iguales
[193] Por qué el número?
[194] Primero las correspondientes
[195] Pero como puede ¡Eh!, no, no. Porque por ejemplo: uno de tres elementos en A que sean 5,6 y 7 para el conjunto *B,* 9, 10 y 11 y no son iguales
[198] Sí, sí. El número de elementos no tiene nada que ver
[199] Ajá Ni la cardinalidad o cómo dijo [el profesor] que se llamaba?

[200] Sí es la de números de elementos
[201] Este, sí son correspondientes si son iguales
[202] Pero qué le pongo, Inciso *a*
[204] Por ejemplo el primer elemento sea igual al primero elemento del otro
[205] Ah ok. Bueno qué más, qué se te ocurre pues
[206] Que aquí se podría decir función inyectiva

Finalmente, en el escrito de la tabla 47, los equipos **A** y **B** coinciden en verificar la igualdad entre cada elemento del primer conjunto con uno en el segundo. Por su parte el equipo **A** busca otras formas de demostrarlo recurriendo a las operaciones de unión e intersección de conjuntos. El equipo **B**, como antes apreciamos en la interacción, se centran en la existencia de una función biyectiva (aunque ellos sólo mencionan la inyectividad) y en la noción de subconjunto.
Es interesante como la interacción en pequeños grupos permite que los estudiantes se sientan cómodos explorando diferentes estrategias y, al no sentir miedo al error, se expresan libremente, encuentran inconsistencias en su propio razonamiento, van refinando sus respuestas y como resultado disponen de una variedad de estrategias.

Tabla 47. Respuestas de los equipos a cómo probar que dos conjuntos son iguales.

$\boxed{A}$ *Si* $A_i=B_i$ $\forall i\in\mathcal{N}$; $A\cap B=A\cup B$; $A\cap B=A=B$
$\boxed{B}$ *Sean* $A=\{a_1,a_2,\ldots\}$ $B=\{b_1,b_2,\ldots\}$
a) Probar que los i correspondientes de *A* es igual a los de *B* ($a_i=b_i$)
b) Probar si existe una función inyectiva de A a B ($f:A\Rightarrow B$) y c) Probar que $A\subseteq B$ y $B\subseteq A$

A continuación se les pide que señalen tres maneras de *probar que dos triángulos son congruentes*. El diseño de la ID y la manera en la que se ha venido trabajando, ha permitido sentar ciertas normas que no se han determinado de manera explícita, pero que encontramos ahora en las interacciones en equipos de manera sistemática. Se comienza con acciones de reconocimiento (*R-acciones*) de los objetos y conceptos involucrados con el propósito de comprender los enunciados, y extraer significado e información de las definiciones acordadas [244-246]. Las interacciones permiten establecer conexiones, aún cuando conduzcan a un error [254 y 256], pero al discutirlas son refinadas por otros compañeros [255 y 257] emprendiendo *B-acciones* que contribuyen a la variedad de estrategias. Así los alumnos se forman la idea de que hay distintas maneras de enfrentar un problema/demostración.

[244] ¿Qué es congruentes? [otro alumno corrige] Triángulos congruentes
[246] Si los ángulos iguales
[247] Cómo se puede probar que dos triángulos son congruentes
[248] ¡Ah ok¡ supongamos que tenemos *A*, *B* y *C* en un triángulo y otro triángulo es *X*, *Y*, *Z*. Y queremos demostrar *A* es igual a *X*, *B* igual a *Y* , *C* y *Z* son iguales
[249] Pues esa puede ser una forma de demostrarlo ¿no? Luego podría ser responder que los ángulos *A*, *B* y *C* son iguales a los ángulos *X,…* ¿?
[253] [Otro forma] Que pasan las dos cosas los lados también
[254] Qué el seno [trata de relacionar con otro ejercicio], […] ¡Ah! pero eso sólo en los rectángulos
[255] No es que se cumple con cualquiera, si el seno es el mismo en los dos, los ángulos también
[256] Pero yo quería hacerle el seno pensando en el otro
[257] ¡Ah ok! ya, ya, podíamos tomar uno de estos *a* sobre *seno de A* en forma de *b* entre *sen B*, y sí son iguales son iguales para todos ¿no?

En los registros escritos observamos que las estrategias consideradas en el equipo **A** coinciden con las mostradas en la interacción y además coinciden con las dos primeras opciones presentadas por el equipo **B**, aunque estén expresadas de forma diferente (con palabras/lenguaje simbólico). En el caso de la tercera opción de **B** encontramos una idea errónea que puede considerarse una buena oportunidad para discutir en grupo una nueva cuestión: ¿en una circunferencia los triángulos [rectángulos/equiláteros/escalenos, isósceles] formados por tres puntos sobre ella son siempre iguales? La discusión permitiría explorar y esperar algunos contraejemplos para obtener la respuesta. Transmitiendo la idea de que las respuestas erróneas pueden darse oportunidades de generar nuevas investigaciones, al igual que ocurre en la práctica del matemático y otros científicos.

Tabla 48. Respuestas de los equipos a cómo probar que dos triángulos son semejantes

$\boxed{\text{A}}$ *Un triángulo A,B,C otro triángulo X,Y,Z*
A=X; B=Y; C=Z
A∠B=X∠Y; B∠C=Y∠Z; C∠A=Z∠X
A/Sen A=Y/Sen Y
$\boxed{\text{B}}$ *a) Probar que sus ángulos son iguales; b) Probar que sus lados son iguales*
c) Probar que son del mismo tipo de triángulo y la circunferencia circunscrita sea del mismo radio

4.5.1.1 Reforzar la idea de deducción

Para reforzar la idea de *deducción* en el avance del método *avance-retroceso* se pide que para cada una de las hipótesis dadas, se formulen tantos enunciados como sean posibles que resulten de aplicar el primer paso del proceso de avanzar a partir de la hipótesis.
La primera hipótesis es que: *el número real x satisface* $x^2-3x+2<0$
A partir de ahí los estudiantes del equipo **A** empiezan [210] por despejar y enseguida ensayan *B-acciones* al buscar números que satisfagan la desigualdad [212]. En [221-223] se puede observar que están tomando el enunciado como una proposición y no como la hipótesis. Intentan buscar qué es lo que hay que demostrar pensando en que encontrar una *x* que satisfaga la desigualdad sea conclusión [221] usando como hipótesis que *x* es número real [222] y tratando de extraer información. Ensayan *B-acciones* con diferentes números y no encuentran valores que satisfagan la desigualdad. Deciden entonces resolver la ecuación cuadrática y encuentran como soluciones 2 y 1. Sustituyen esos valores y otros lo que constituye una *C-acción* [224] y deciden que no hay números que satisfagan la desigualdad. En esta parte observamos que tienden a buscar ejemplos sólo en el conjunto de los números enteros y, al no buscar valores entre 1 y 2, no resuelven la desigualdad.

[210] Qué *x* cuadrada es menor a *3x-2.*
[211] (Mm) Esto debe concluir que en la ecuación esta sea menor que cero.
[212] Sí, sí nos serviría esto que digo para ver si es mayor igual o menor que cero y si es eso nada más agarramos puros para menor que cero, ¿no, verdad?
[213] ¡Ya, mira! Cuánto puede valer *x* en esta ecuación. Puede valer menos uno.
[215] No, ni uno.
[216] *4* y *2* no.
[217] Una de 0 sería que *x* puede valer *2* y aquí podíamos sustituir 2^2, *-3* por *2+2,…*pero nos piden con *0.*

[220] Pues la más fácil sería tres menos tres más menos la raíz es cero ¿no? ¡Ah no! perdón, es igual a x.
[221] […] Mira, para cada una de las fórmulas qué es lo que queremos demostrar. El primer paso es la pregunta: qué es lo que queremos demostrar. Ah queremos encontrar a una *x* que …
[222] Espérate, que nos están diciendo, que *x* es real, que significa que *x* es real.
[223] Que pueden estar todos los números, negativos, fracciones y todo eso ¿no?
[224] *x* es igual a *2* o *1* para igual a cero, luego … cuál es … diferente,
[225] No, sí es menor el ejercicio.
[226] Y aquí no, no es menor es igual a cero, *2* por *2, 4* menos *3* por *2, 6* es igual a …
[230] Cuando vale uno es también cero. No, parece que no es menor que cero con otros.

Los registros en la tabla 49, evidencian que en ambos equipos conciben *-∞ y ∞* como extremos incluidos de los números reales ([ ] y ≤). Ambos encuentran la solución de la ecuación de segundo grado (por métodos distintos) y, como antes vimos, en el equipo **A** después de la búsqueda de valores enteros (aún cuando ponen énfasis en que *x* es real), deciden que no hay valores que satisfagan la desigualdad. En relación al equipo **B**, si observamos la respuesta b) podemos pensar que es incorrecta y que en el inciso c) encontramos una respuesta correcta. Esta parte puede ser interesante discutirla dado que la tarea establece que a partir de la hipótesis se deriven pasos para avanzar y tomando ambas respuestas podemos elucidar el razonamiento del grupo. Partiendo de la hipótesis se debe cumplir que $(x-2)(x-1)<0$. Para que eso suceda uno de los factores debe ser positivo y el otro negativo. Esto les conduce a la respuesta b) y c) y ahí detienen su búsqueda. Es posible que en este equipo sí tengan claro el papel de la hipótesis y al no tener conclusión se detienen al cumplir con lo que se les pide. Sin embargo, el siguiente paso podría ser descartar b) por la imposibilidad de encontrar un número real *x* que a la vez sea mayor que *2* y menor que *1*, quedándose con la opción c) para avanzar en la demostración en caso de conocer la proposición completa. Aunque no seguimos la interacción en este equipo podemos encontrar acciones de consolidación del papel de la hipótesis y del método avance retroceso. Lo observado en su producción escrita nos remite a una interesante cita acerca de una directriz para elucidar el pensamiento de los estudiantes: no asumir que una respuesta incorrecta es incorrecta o una respuesta correcta es correcta, «look beneath the answer to understand the thought that produced it»[34].

Tabla 49. Deducciones construidas en los equipos a partir de la hipótesis: *el número real x satisface $x^2-3x+2<0$*

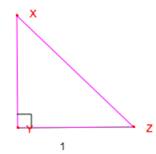
$\boxed{A}$	*x está dentro del intervalo [-∞,∞]; x=[3±√(9-8)]/2; x=2, 1; $(2)^2$-3(2)+2 no es menor que cero; y $(1)^2$-3(1)+2 no es menor que cero*
$\boxed{B}$	*a) $x^2-3x<-2$ para $-\infty\leq x\leq\infty$; b) Debe cumplir que x-2>0 y x-1<0; x>2 y x<1 c) Debe cumplir que x-2<0 y x-1>0; x<2 y x>1*

[34] Ginsburg, H. (1997) *Entering the Child's Mind: The Clinical Interview in Psychological Research and Practice*. New York: Cambridge. p. 142

La siguiente hipótesis dada para formular o deducir al menos dos enunciados a partir de ella y avanzar en el método descrito fue: *El seno del ángulo X en el triángulo XYZ de la figura es 1/√2*

[259] Que ya el seno viene siendo como… ¿cómo?
[260] Sí, bueno el seno es la parte de abajo. Sería algo así. El seno viene siendo esta
[262] Cuál, …, o qué nos están preguntando, …, ¡ah! cómo se saca el ángulo de un triángulo
[264] No, pero esas son igualdades
[265] ¿Cuáles? Ayúdame
[274] ¡Ah ok!, ya, del número 1 es el seno es la más importante deducción
[275]Ajá // Sí. Digamos que este es X, este es Y, y este es Z, entonces uno entre raíz de dos es YZ

Encontramos, en [259], que la necesidad de visualizar el *sen X* directamente en el triángulo*,* los conduce a establecer la conexión con la función seno en el círculo unitario y a representar *sen X,* de manera errónea, como el segmento YZ [260 y 264].



Los alumnos establecen conexiones con lo trabajado anteriormente. Revisan la demostración que realizaron en las primeras tareas de la hoja y se centran en el reconocimiento (*R-acciones*) de cómo obtuvieron las deducciones para emprender *B-acciones* qué les permita avanzar en la deducción de nuevos hechos. Continúan de manera errónea pensando que *sen x* es 1 [297-299] pero durante la discusión, un estudiante parece no entender exactamente lo que dice su compañero y les hace pensar en el seno como la razón del cateto opuesto entre la hipotenusa [300-302 *B-acciones*] y no como segmento. Para clarificar esta idea [303] vuelve a explicarla y deducen que es un triángulo rectángulo isósceles. Esta *C-acción* la exhiben en [308-310].

[294] [Revisan anteriores tareas] ¡Ah ok!, ya, así se van deduciendo. Por ejemplo en esta se me ocurre decir que es igual entonces como es un triángulo rectángulo del otro [ejercicio] es cateto opuesto sobre hipotenusa ¿No?
[295] Ajá, o sea esto [sen x] es igual a y sobre z
[297] Sí // Ok. Puede ser uno el y
[298] No más bien el seno, tienes *sen x* es *y* sobre *z.*
[299] De ahí podíamos decir que el seno de este es igual a uno y raíz de dos es *z.*
[300] Ajá, y entonces *y* es igual a uno y *z* es igual a raíz de dos.
[302] Porque sabemos que el seno de x es 1 sobre raíz de 2, entonces y es 1 y z es raíz de 2.
[303] A ver, otra vez, otra vez, …
[304] Si el seno de *x* es *y* sobre *z*, pero sabemos que entonces y vale uno *z* vale raíz de dos [asienten].
[306] Este [cateto opuesto a ∠ *X*] vale *1*, este también vale *1* y pues este vendría siendo la hipotenusa.
[307] Raíz de dos.
[308] Ajá raíz de uno al cuadrado más uno al cuadrado que es raíz de dos [Por el teorema de Pitágoras].
[309] Pero si ¡mira! tenemos ya que el seno de x nos da que es de 45 y que el ángulo este otro es de 45^0.

Finalmente, los registros escritos de ambos equipos en la tabla 50 muestran que el trabajo en pequeños grupos ha permitido extender su comprensión de la tarea de deducción a partir de un enunciado que puede funcionar como hipótesis o punto de partida.

Tabla 50. Avance de los equipos a partir de la hipótesis: *El seno del ángulo X en el triángulo XYZ de la figura es 1/√2*

A	sen x =1/√2 *; x=1, y=1, z=√2 y* $\angle X=45^0$
B	*a) El ángulo mide* 45^0*;b) La suma de sus otros dos ángulos mide* 135^0

Esta comprensión se puede ver como una medida cuantitativa y cualitativa de las conexiones que la idea de deducción propia de una tarea, tiene con otras ideas ya existentes de una tarea previa y se conforma como la “noción de deducción” dejando de lado su noción paramatemática en el curriculum. Otra cuestión interesante es que la demanda de la tarea de proponer más de una deducción a partir de la hipótesis abre a los estudiantes la posibilidad de avanzar en el proceso de la demostración.

Posteriormente pasan a realizar deducciones a partir del enunciado: *el rectángulo ABCD es un cuadrado*, omitimos la transcripción pero observamos que rápidamente realizan deducciones y únicamente encontramos alguna debilidad en el lenguaje cuando ocasionalmente se refieren a rectas en lugar de lados del rectángulo. Los registros escritos fueron.

Tabla 51. Avance de los equipos desde: *el rectángulo ABCD es un cuadrado*

A $\overline{AD} = \overline{BC}$; $\overline{AB} = \overline{CD}$; $\overline{AD} = \overline{CD}$
B *a) Sus cuatro lados tienen la misma longitud; b) Sus cuatro ángulos miden* 90^0;
c) Su diagonal es el cuadrado de la suma de dos lados.

La siguiente tarea fue obtener deducciones a partir de: *el entero* n^2*-1 es impar.* Los alumnos toman el enunciado como proposición [333, 338] y no sólo como la hipótesis para realizar las deducciones y avanzar. Esto les conduce a *B-acciones* para plantear contraejemplos [335] y para explorar posibles valores para *n* par o impar estableciendo valores de verdad [341].

[332] Lo primero que vamos a ver es *n* cuadrado es par o impar?
[333] pero sabemos que n^2 - 1 no es par, no lo hemos demostrado pero sabemos que *n* no es par.
[334] No, *n* sí es par.
[335] No, sí es cierto, porque entonces 7 por 7, 49-1, 48, eso no es cierto, eso es par. Son contradicción.
[337] Bueno lo que tenemos es solamente poner los enunciados que ya por ejemplo sí son *F* o *V.*
[338] Sí // […] n^2 no necesariamente es par. Lo primero que se nos ocurrió es pensar si n^2 es par o no.
[340] Si es par entonces menos uno es impar pero si no es par entonces menos uno sería par.
[341] Bueno yo pensé, no sé tú, pero eso vendría siendo, así como esto qué valores puede tomar. Si
puedo tomar valores pares o no pares y ya de eso depende si es falso o verdadero.
[342] Es así, los valores podemos tomar x, ¡ah! pero eso lo decíamos porque nos estaban diciendo x real.

Continuando con la idea de que constituye una proposición, intentan una representación simbólica del enunciado y plantean como primera opción n^2*-1=x* para *x* impar [346] y llegan la representación n^2*-1=2x+1* para *x* entero [348-349]. Manipulan la expresión obteniendo diferentes formas [357-358]. Ver el enunciado como proposición lleva a los alumnos a construirla para que resulte verdadera [359]

[343] El entero n^2 -1 es impar, nos están diciendo que este es un entero ¿no?
[344] Ajá, y que n^2 es igual a par.
[345] A ver, ¿cómo? n^2 podemos igualarlo a *1*, n^2 es un entero, ¡ah no! pero es que no es igual a 0.
[346] No, es igual a un impar, n^2-1 es igual a *x* para *x* impar.
[347] Sí. ¿Qué simboliza que sea impar?
[348] ¡Ah! ya sé, qué *n* cuadrada es igual a dos *x* más uno.
[349] Ajá. Entero.
[350] Mejor no podíamos poner que es [de la
[351] ¿Cómo? pondríamos dos *n* más uno.
[352] Dos por 7, 14 más 1.
[353] Mmmmh, pero es que, bueno … sí, sí *n* cuadrado es igual a dos *x.*
[355] Es que n puede tomar cualquier número pero aquí nos están diciendo que tiene que ser entero.
[356] *n* cuadrada es igual a dos *x* más dos.
[357] *n* cuadrada sobre dos es igual a *x* más *1*, … [risas]
[358] *n* cuadrado es igual a dos *x* más dos.
[359] Si *n* es un número par *n* cuadrada es par, entonces impar [n^2-*1*].
[360] […] Esto es un número par [n^2]. Por definición de

forma] dos *n* más uno. número par sabemos que es $2x$ para x entero.

En el diálogo podemos ver que uno de los estudiantes exhibe una *R-acción* que muestra su comprensión del papel del enunciado como hipótesis [366, 370 y 372], pero no ocurre esto con el resto del equipo que insiste en una contradicción [368 y 375].

[361] ¿Qué es un número par? ¿la suma de pares es par?
[362] Pero es que eso no es cierto.
[363] ¡Cómo que no es cierto!
[364] Bueno es que estamos diciendo que el número cuadrado es par [n^2].
[365] Sí. Pero ya habíamos dicho que esto no era cierto ¿no?
[366] ¡Ah! Pero es que partimos de esto porque n^2-1 es impar.
[367] ¡Oh! que ya no se me ocurren más enunciados que se puedan recurrir.
[368] Pero como que ya llegamos a la contradicción a una contradicción.
[369] O sea que *n* cuadrada es un par.
[370] Pero *n* cuadrada,…, si *n* cuadrada es par menos uno es impar.
[371] Pero aquí nos dice que para todo.
[372] Bueno el entero *n* cuadrado menos uno es impar siempre.
[373] Todo entero? No siempre va a ser impar, no siempre.
[375] Aquí ya llegaríamos a la contradicción de que llega a ser par.
[376] De aquí vamos a llegar de que *n* cuadrada debe ser par para que esto se cumpla.
[377] Para que todo el entero [$n^2 -1$] sea impar.

Finalmente, en la producción escrita en el equipo **A**, llegan a dos deducciones correctas (aunque omiten que x es entero, esto tiene lugar en la interacción) a partir del enunciado tomado como hipótesis. No obstante, en el diálogo se puede apreciar que toman el enunciado como una proposición completa y analizan en qué casos es falsa o verdadera y no interpretan (todos los integrantes del equipo) la tarea como: a partir de esa hipótesis realizar deducciones. En el escrito del equipo **B** encontramos también ese tratamiento como proposición.

Tabla 52. Avance de los equipos desde la hipótesis: *el entero n^2-1 es impar*

A	$n^2-1=2x+1;$	$n^2=2x+2$
B	*a) Si el valor de n es par el resultado es impar;b) Si el valor de n es impar el resultado es par*	

Cerca del final de la sesión, el profesor percibe la confusión de los alumnos cuando dan a la hipótesis el tratamiento de implicación. No obstante, observamos que mencionan un ejemplo en el que realizaron bien las deducciones y no discuten aquellos ejercicios en los que se aprecia que toman la hipótesis como la proposición. Finalmente no realizan cambios en estos ejercicios a partir de la intervención del profesor y al no explorar más, se mantiene la confusión.

[415] Profesor: A ver en reforzar la idea de deducción, sí queda claro. Tienen enunciados, pero en realidad no les están pidiendo que demuestren eso, sino a partir de ahí que pueden deducir. […] me explico, son hipótesis, no les dan una implicación completa. No les dice Si … entonces. De ahí que se puede deducir. Por ejemplo *el número real x satisface esta ecuación* [escribe] Cómo lo pueden extender de ahí, cómo lo pueden reinterpretar, que deducimos. Esa es la idea. Por ejemplo, tienen un triángulo rectángulo, que pueden deducir de ahí, que un ángulo es de 90^0, que pueden usar teorema de Pitágoras,
[416] Alumnos: Por ejemplo d).
[417] P: A ver tienen un triángulo con seno *1* entre raíz de dos.
[418] As: Bueno, si le ponemos nombres a los lados, puede ser que el lado de allá, por ejemplo que vale uno y que la hipotenusa vale raíz de dos.
[419] As: Que el ángulo mide *45* grados.
[420] P: Ajá// exacto que vale *45* grados. Qué más podemos poner.
[421] As: Mmmmmmm, no. [Pausa] Que la suma de los otros dos mide *115* [corrigen] *135*.

De la hipótesis: *la circunferencia C consta de todos los valores de x e y que satisfacen la ecuación* $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 25$, se solicita a los equipos que realicen dos deducciones a partir de ella. En la interacción en el equipo **A** deducen [385 y 386] que la circunferencia está centrada en (3,2) y tiene radio 5 (constituyen *C-acciones* dada la solicitud en la tarea). Pero podemos observar que únicamente un alumno tiene conocimiento completo de la ecuación de la circunferencia y de lo que representa cada elemento. En este caso la interacción permite que ayude a sus compañeros a darse cuenta de la representación errónea del centro [383-384].

[382] Sabemos que… que está en el centro de …
[383] ¿En el origen?
[384] No. En menos tres, menos dos.
[385] No, es en tres, dos.
[386] *3, 2*. Porque es *x-h* al cuadrado ¿verdad?, y… [escribe] Es el origen o centro, *3, 2* y su radio es *5.*
[387] Ajá, *5.* Ya. Todos los valores de *x* y *y* …
[388] Todos esos valores, ya son todos los enunciados que nos piden [muestran acuerdo].

Siguiendo la interacción encontramos que manifiestan la necesidad de conectar la ecuación con la la posición concreta de la circunferencia y para ello necesitan visualizar puntos y verificar que cumplen con la ecuación. En [401-403] podemos observar cómo el estudiante utiliza un argumento de pensamiento "transformacional" para explicar a sus compañeros que los puntos *(x,y)* de la circunferencia va variando y que la noción de circunferencia se piensa como conjunto de puntos que se encuentran a la misma distancia del centro, esto los lleva a pensar que si el radio fuera *0* hablarían de un punto. A partir de ahí piensan en el radio *5* en [410].

[390] Pero sí nos sirve de algo.
[391] Porque si desarrollas todo esto ¿a qué llegarías?
[392] ¡Ah! porque si estás en tres, dos y su radio es *5* entonces a *3* le sumas *5* y a dos le sumas *5*.
[393] O sea te irías como quien dice al que está en medio.
[394] No, pero espérate ¿cómo está?
[395] ¿Para qué?
[396] No es que no sé qué.
[397] La circunferencia. Es que mira el radio 5. Si es tres y dos ¿no? el centro. Es que mira …
[398] No, es que aquí le pones tres, aquí dos, éste es el centro.
[399] No. Pero es que *x* menos *h* más *y* … no nos da, y el centro es *(h, k).*
[400] De *x* y *y* van variando.
[401] Cuándo se hace cero el radio, ¿cuándo es cero?
[402] Cuando están en ese punto, *x* es igual a 3 y *y* es 2 el radio se hace *0*, porque están en ese punto.
[403] Pero como el radio es el cinco, *x, y* se expanden. ¿Sí me explico?
[404] Ajá. Sí // Que cuando el radio es cinco se marca la circunferencia.
[405] Mira. Préstamelo […]. Aquí tienes otra circunferencia. Ya para. Sí, no… ¡Bueno más o menos! [Risas]
[406] Es cuando *x* vale *3* y *y* vale dos, entonces están en ese punto *x* y *y.*
[407] Pero cuando es *5* [el radio], …, sí no es este.
[408] Ajá, pues este y luego …
[409] Ok y luego dice su radio es cinco [otro alumno interviene] Aquí es cinco, ¿no? //Ajá [asienten].

Una vez que entienden de manera intuitiva la noción de la circunferencia expresan una necesidad de buscar puntos en la circunferencia. Su compañero trata de persuadirles sugiriendo en una *R-acción,* que para eso es la ecuación que representa a la totalidad de esos puntos, puesto que es su forma general [429]. Intentan diferentes *B-acciones* para; buscar números tales que la suma de sus cuadrados les den 25; ensayan descartando alguno [432] y aceptando otros [434]. Los puntos sobre la circunferencia que buscan primero son los que resultan de agregar o quitar 5 unidades a la ordenada del centro y después a la abscisa [444, 445, 448, 451]. Este proceso conformado por las *B-acciones* exhibidas les ayudó comprender la representación algebraica de la circunferencia y conectarla con la noción de lugar geométrico, vista al trabajar definiciones. Esto se considera una

C-acción de consolidación del manejo de definiciones al extraer significado y ser capaces de establecer conexiones entre contenidos.

[411] Entonces su radio es cinco. *x* y *y* este *x* digamos que en este punto vale cinco pero ya vale cero.
[412] Y, o sea, son todos los valores que pueden tomar *x* y *y*. En ese radio, sí ¿me explico? Porque cuando es 0, es el centro, pero cuando tiene radio 5 (25 es radio cuadrado) *x* y *y* valen eso. Y para que estén en esta línea hay que seguir.
[425] Ah pero ya no podemos deducir nada de […] la ecuación del círculo *x* menos *h* más *y* menos *k* y …
[426] El cuadrado igual al radio al cuadrado.
[427] Mmmhh ¿qué más podemos decir de ahí …?
[428] También lo que podemos hacer es que esto, desarrollarlo, para encontrar los valores de *x* y *y.*
[429] Pero cómo vas a encontrar todos los valores de *x* y *y.*
[430] Mmmmh [pausa], todos ¡ah no! [otro estudiante los anima a seguir] A ver qué más.
[432] Cómo, raíz de cinco más raíz de cinco, ¡Ah no!, no es cierto, no, ¡ah ya sé cuál!
[434] *16* más *9* [igual a *25*].
[435] Sería *4* más *3* [$4^2+3^2=25$].
[437] Qué este valga cero y este valga *7* [asienten].
[440] Bueno *x* vale *3* [el punto *(3,7)* está en la circunferencia].
[441] ¡Ah ok! Pero puede ser cualquier punto.
[442] Cero. Bueno, tres y siete, es uno. Este sería *x* y este sería *y* y estaría en la circunferencia ¿no?, … sí//
[444] No. Es que este es tres, dos a uno el cero y otro el cinco sería acá.
[445] Aquí, ¡ah sí!, sí cierto. Entonces *3* y *5*, *8,* y *2* [encuentra *(8,2)* agregando el *5* a la abscisa].
[446] dos y cinco …Estaría dentro del círculo.
[448] No, es que este es *2*, y más *5* o menos acá *3*, [*(3,-3)*].
[449] ¡Ah sí!, [Risas] Si te digo …[otro estudiante] O sea es que este va acá, de hecho.
[451] [Ra] De hecho sí, menos *5*, menos *2* también [(-*2,2*)] cuadrado cero y 25 [verifican la ecuación].
[452] Debería ser cinco al cuadrado ¿Verdad?
[453] Que más bien, esto [menos dos] menos tres al cuadrado da 25 que es la parte de aquí [asienten].

Finalmente, en las producciones escritas, ambos equipos resumen con las mismas dos deducciones (*C-acciones*) cuál es el radio 5 y el centro (3,2).

La siguiente consigna varía un poco en el de sentido que ahora se les da una proposición y cuatro opciones para que seleccionen la que NO es válida o adecuada para avanzar en una deducción a partir de la hipótesis para demostrarla.
La primera proposición es: "Si *x* e *y* son números reales tales que $x^2+6y^2=25$ e $y^2+x=3$, entonces $y=2$". Al aplicar el proceso de avanzar a partir de la hipótesis, ¿cuál de los enunciados siguientes no es válido? a) $y^2=3-x$; b) $y^2=(25/6)-(x\sqrt{6})^2$; c) $(3-y^2)^2+6y^2-25=0$ y d) $x+5=-6y^2/(x-5)$

Durante la interacción en el equipo realizan sustituciones en las expresiones algebraicas a partir de la hipótesis. Omitimos la transcripción por considerar que no aporta elementos diferentes de los que aparecen en el escrito. En el registro escrito vemos que en ambos casos dan la respuesta b). Sin embargo, en el equipo **A** ofrecen un argumento aplicando el proceso avanzar, mientras que en **B** argumentan por retroceso conocidos los valores de *x* y *y*.

Tabla 53. Descartando opciones no válidas de avance en la proposición: Si *x* e *y* son números reales tales que $x^2+6y^2=25$ e $y^2+x=3$, entonces $y=2$

$\boxed{\text{A}}$ *$y^2=(25/6)-(x\sqrt{6})^2$ es falso dado que $x^2+6y^2=25$; $y^2=(25-x^2)/6$; $y^2=(25/6)-x^2/6$; si subimos 6 al numerador $y^2=(25/6)-x^2 6^{-1}$ la respuesta b) nos dice $y^2=(25/6)-(x\sqrt{6})^2$ o bien $y^2=(25/6)-x^2 6$ y $y^2=(25/6)-x^2\ 6^{-1}$ o $y^2=(25/6)-x^2\ /6 \neq y^2=(25/6)-x^2\ 6$*
$\boxed{\text{B}}$ *b) No válido; porque al sustituir los valores no se obtiene la igualdad requerida. $4=25/6-(-1\sqrt{6})^2$; $4=25/6-(-\sqrt{6})^2$; $4=25/6-6$; $4=(25-36)/6$; $4=-11/6$*

En este mismo sentido, en el siguiente ejercicio se les pide que: *Supongan que quieren probar que:" Si R es un subconjunto de S y S es un subconjunto de T, entonces R es un subconjunto de T"*. Expliquen por qué el siguiente enunciado en el proceso de avanzar es incorrecto: "puesto que *R* es un subconjunto de *S*, se sigue que todo elemento de *S* también es elemento de *R"*.
En la discusión en equipo no se aportan elementos distintos al reporte escrito de la tabla 54, mostrado a continuación. Esto puede deberse a lo acotado de la tarea, ya que sólo se limitan a revisar opciones o bien a explicar por qué resulta incorrecto algo establecido.

Tabla 54. Producciones de los equipos justificando argumento incorrecto.

$\boxed{A}$ Es falso que todo elemento de S también es un elemento de R, R está contenido en S pero sólo abarca una parte de éste, existen elementos de S que están fuera de R. [Dibujo]
$\boxed{B}$ *$R\subseteq S\subseteq T$ Es incorrecto porque no está afirmando que los subconjuntos son iguales sino que R está contenido en S y no S en R.*

4.5.2 Hoja de trabajo #7: Práctica del método avance-retroceso para demostrar

Esta sesión se realizó el 29 de junio de 2009, con un equipo de 5 estudiantes, dado que estaba por terminar el ciclo escolar y los estudiantes foráneos empiezan a irse a sus poblados de origen y faltaron alumnos. La interacción se dio en gran grupo y en esta parte el profesor cuestionaba a los estudiantes para que construyeran juntos un primer esquema de la demostración de la proposición: *Si a, b y c son números reales para los que $a>0$, $b<0$ y $b^2-4ac=0$, entonces la solución de la ecuación $ax^2+bx+c=0$ es positiva.*
El profesor realiza preguntas provocando *R-acciones* en los estudiantes para reconocer la hipótesis y su significado [9] así como el resto de los elementos de la proposición [2, 4 y 6] .

[1] Profesor: [Lee y escribe la proposición], ¿qué cosas necesitamos saber ahí por ejemplo?
[2] Alumnos: Saber cómo resolver la ecuación [del tipo] $ax^2+bx+c=0$.
[3] P: Además de eso, ¿qué definiciones necesitamos saber? ¿alguna definición importante?
[4] As: De que *$a>0$,* significa que es positivo y *$b<0$* significa que es negativo.
[5] P: ¿Qué significa que algo, un número, sea solución de una ecuación?
[6] As: Que ese "x" satisfaga la ecuación, que al sustituirlo nos dé cero.
[8] P: ¿Qué información se supone cierta?
[9] As: Que *$a>0$*, *$b<0$* y *$b^2-4ac=0$* con *a, b y c reales.*

Los alumnos escriben en forma correcta la fórmula para encontrar la solución de la ecuación general de segundo grado y el texto que aparece en el siguiente recuadro. Como antes se ha indicado en el registro escrito utilizan el término "ecuación " en dos sentidos diferentes [11].

Posteriormente el profesor plantea preguntas para inducir *B-acciones* que se van obteniendo a partir de las *R-acciones* anteriores en forma de deducciones. Por ejemplo, la *B-acción* [12] está asociada con la *R-acción* donde se identifica la hipótesis [9] y su función (no explícita, pero entendida) junto con el reconocimiento del método de resolución las ecuaciones de segundo grado [2]. Esta *B-acción* [11] se transforma en una *R-acción* para entrelazarse junto con [9] y dar lugar a la *B-acción* [14]. La siguiente *B-acción* [15] se obtiene a partir de dos *R-acciones* [14 y 12]. Todas las acciones anteriores desencadenan la *B-acción* [19] que supone reconocer que el discriminante es 0. Finalmente, como el objetivo era probar la proposición, la *C-acción* o la demostración se consigue cuando se hace explícito que el objetivo se ha cumplido [20].

[10] Profesor: ¿Qué se deduce de ahí?
[11] Alumnos: Que la ecuación general es $ax^2+bx+c=0$ [otro estudiante].
[12] As: Que eso quedaría de la forma $x=-b/2a$.
[13] P: ¿Qué más?
[14] As:Como $b<0$ entonces el numerador es mayor de 0.
[15] As: Y $2a$ es positivo por lo tanto es positiva la solución.
[16] P: Bueno, eso lo pudieron ustedes ya deducir, ¿cuántas raíces va a tener la ecuación?
[18] As: Dos.
[19] As: Pero aquí [en este caso] son iguales.
[20] P: Muy bien, y ¿qué es lo que probaron?
[21] As: Que la solución de la ecuación es positiva.
[22] P: Y ¿qué significa?
[contesta más de un estudiante] Que es mayor que cero.
[24] P: Entonces este método [avance-retroceso] de hacernos preguntas y organizar las respuestas nos puede funcionar. Organicen, escriban y luego ponen la demostración condensada.

Dado que deben registrar por escrito la demostración (tabla 55), con el objetivo de *comunicar* sus resultados han de resumir las *R-acciones* del proceso anterior. Señalan cuál es la *P* (hipótesis) y la *Q* (conclusión) y a continuación deciden escribir sus *B-acciones* como P_1 (como avance desde *P*) y Q_1 (como retroceso desde *Q*). Por último la *C-acción* se produce cuando presentan la versión condensada de su trabajo que es la versión para comunicar en forma escrita.

Tabla 55. Demostración desglosada y versión condensada de: *Si a, b y c son números reales para los que $a>0$, $b<0$ y $b^2-4ac=0$, entonces la solución de la ecuación $ax^2+bx+c=0$ es positiva*

Preguntas clave	Organizando la demostración
¿Qué información se supone cierta?	P: $a,b,c \in \Re$, $a>0$, $b<0$ y $b^2-4ac=0$
¿Qué se deduce a partir de la información P?	P_1: $x=[-b\pm\sqrt{(b^2-4ac)}]/2a$
	$x=-b/2a$ donde $b<0$ $\therefore x>0$
¿Qué significa probar Q?	Q_1 : $x>0$
¿Qué se pretende probar?	Q: *La solución de la ecuación $ax^2+bx+c=0$ es positiva*

$\boxed{\text{B}}$ *Tenemos que $a,b,c \in \Re$ y $a>0$, $b<0$ y $b^2-4ac=0$. Ahora $x=[-b\pm\sqrt{(b^2-4ac)}]/2a$. Luego sustituyendo en la ecuación general, $x=(d\pm\sqrt{0})/2a$ donde $d>0$ y $2a>0$. Entonces $x=d/2a$ $\therefore x>0$.*

4.5.3 Hoja de trabajo # 8: Leyendo y entendiendo demostraciones

Esta hoja se realizó junto con la anterior el 29 de junio 2009 y como ya mencionamos sólo participó un equipo. Para la primera tarea se les presenta la proposición «*Si x e y son números reales no negativos que satisfacen $x+y=0$, entonces $x=0$ y $y=0$*» acompañada de su demostración condensada, que aparece después de este párrafo, con la intención de iniciarles en la lectura de demostraciones como las que aparecen en sus libros de texto, dado que es una habilidad que no han desarrollado. Primero se les pide que realicen un desglose de la demostración y que escriban un análisis indicando los pasos del método *avance-retroceso*, así como las preguntas clave y sus respuestas.

<u>Demostración:</u> Primero se probará que $x\leq 0$, porque entonces, como $x\geq 0$ por hipótesis debe cumplirse que $x=0$. Para ver que $x\leq 0$, por hipótesis $x+y=0$, de donde $x=-y$. Asimismo, como $y\geq 0$, se sigue que $-y\leq 0$, de donde $x=-y\leq 0$. Por último, para ver que $y=0$, como $x=0$ y $x+y=0$, se sigue que $0=x+y=0+y=y$.□

Los estudiantes aplican con éxito el método *avance-retroceso* extrayendo significado de la demostración condensada. Van a utilizar el mismo esquema que se ha seguido previamente [27]. Las *R-acciones* identificadas son el reconocimiento de la hipótesis y su significado [26, 28 y 29] y la conclusión [26 y 33]. Las *B-acciones* serán las deducciones obtenidas a partir de *P* [31, 35, 36 y 40]. Por ejemplo, en [36] al enlazar la hipótesis [29] y despejar [35] obtienen [36]. Otra *B-acción,* expresada en dos maneras, [38 y 40] se obtiene al encadenar que $x=-y$, $-y<0$, $x<0$ y por hipótesis $x\geq 0$, luego $x=0$ [35 y 36]. También muestran *B-acciones* [34] al extraer información de la conclusión al formularse la pregunta ¿qué necesitamos para que se dé *Q* ($x=0$, $y=0$)? Así establecen que Q_1 es $x+y=0$, pero les faltaría considerar que alguno de los sumandos fuera 0. Vemos que no distinguen aún la diferencia entre avanzar de algo conocido y retroceder de algo a lo que quieren llegar. Finalmente mediante una *B-acción* [41] enlazan la hipótesis con [38] que es lo que realmente constituye el Q_1 concluyendo así la demostración.

[26] Aquí tenemos que ver quién es *A*, quién *B* y así [hipótesis y conclusión].
[27] Podemos poner la pregunta clave: ¿qué se supone cómo cierto?
[28] Que *x* y *y* son números reales no negativos, [escriben] así, o mayor o igual que cero.
[29] Que están en los reales y que $x+y=0$.
[30] ¿Qué se deduce de la información de *P?* [hipótesis].
[31] Que $x\geq 0$ porque no es negativo y que $x+y=0$.
[32] Y luego eso va en la demostración.
[33] *Q* [la conclusión] vendría siendo $x=0$, $y=0$.
[34] Q_1 que $x+y=0$. Ahora ya las preguntas se acabaron ¿qué cosas son de probar?
[35] P_1 es $x \geq 0$, $y\geq 0$ para $x+y=0$, $x=-y$.
[36] Ponle ya que $-y<0$ [objetan] y lo que sigue. Faltan cosas.
[38] Lo que acaba de probar es que $x=0$.
[39] Pero ¿no puede ser negativo?
[40] Es que $x=-y$ y $x\geq 0$ y no puede ser [porque $-y\leq 0$] a menos que sean iguales
[41] Así directo, $x+y=0$ y por lo tanto $x=0$, $y=0$.

Finalmente el escrito que desglosa la demostración por extracción de significado de la versión condensada constituye una *C-acción*. Vemos que utilizaron el mismo esquema planteado en las sesiones anteriores para desglosar la demostración de la proposición que se les mostró en forma condensada. En Q_1, repiten la información, esto ya lo hemos mencionado como atribuible a la confusión entre avanzar de algo conocido y retroceder de algo a lo que quieren llegar. En esta parte consideramos que trabajar sobre esto puede contrarrestar el error de la recíproca, que como veremos cometen nuevamente en la siguiente tarea. No obstante, han podido leerla y muestran comprensión al desglosar y justificar cada paso.

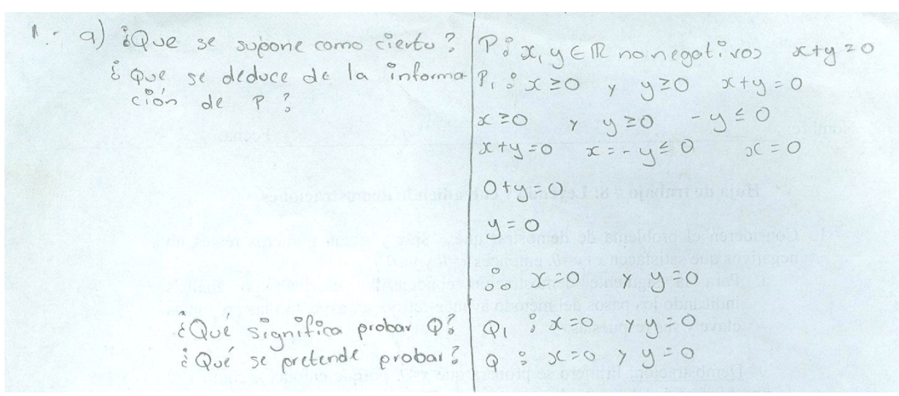


Figura 46. Desde una versión condensada de la demostración extraen significado y detallan la demostración de la proposición P implica Q

En la demostración condensada, aplicando el proceso retroceder, encontramos el *error de la recíproca* (*Q implica P* en lugar de aplicar el proceso retroceder para probar *P implica Q*) y como hemos observado, en el estudio exploratorio, en la implementación de la ingeniería y en la revisión de la literatura en relación a los conflictos que enfrentan los alumnos con la demostración, este error persiste y hasta el momento ha sido el más difícil de contrarrestar.

[42] Luego regresarnos. A ver, como $x=0$ y $y=0$ entonces $x+y=0$, $0+0=0$, luego 0 es un número real no negativo y por tanto ya x y y son reales no negativos.

[43] Otra vez tenemos que hacer el cuadro [método *avanzar-retroceder*] ¿verdad?

[44] Más bien, qué es lo que se cumple y por qué

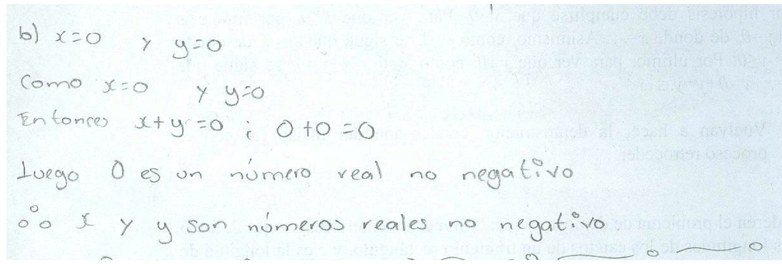


Figura 47. Error de la recíproca

La siguiente consigna de esta sesión es que consideren el problema de demostrar que *« si n es un entero mayor que 2, a y b son las longitudes de los catetos de un triángulo rectángulo, y c es la longitud de la hipotenusa, entonces* $c^n>a^n+b^n$ *»*. Se les pide que justifiquen cada afirmación de la siguiente demostración condensada.

<u>Demostración:</u> Se tiene que $c^n = c^2c^{n-2}=(a^2+b^2)c^{n-2}$. Al observar que $c^{n-2}>a^{n-2}$ y que $c^{n-2}>b^{n-2}$, se sigue que $c^n >a^2(a^{n-2})+b^2(b^{n-2})$. Por consiguiente, $c^n>a^n+b^n$.□

Para justificar que $c^n = c^2c^{n-2}$ recurren a la ley de exponentes en la *B-acción* [42] y de ahí surgen otras *B-acciones* al utilizan la hipótesis de que a, b son catetos y c hipotenusa de un triángulo rectángulo para obtener $c^2c^{n-2}=(a^2+b^2)c^{n-2}$ del teorema de Pitágoras [43-46]. Para justificar las desigualdades $c^{n-2}>a^{n-2}$ y $c^{n-2}>b^{n-2}$, de manera asertiva [49] lo hacen con la *B-acción* en la que utilizan la hipótesis junto con la *R-acción* de que la hipotenusa es mayor que cualquier cateto, aunque no aclaran en ese momento que al ser cantidades positivas se conserva la desigualdad al elevar a un exponente positivo. Es necesario que pongan mayor cuidado en estos detalles. Para verificar que se cumplan las deducciones mediante algunas *B-acciones* proponen ejemplos con números fraccionarios [50-57]. Se producen reiteradamente *R-acciones* [58, 59 y 67] para retomar la hipótesis y reconocer su función. Aunque son *R-acciones*, sí señalamos que los alumnos han mejorado sustancialmente en la consideración de la función y cuidado de la hipótesis. Esto representa una <u>***C***</u>*-acción* de consolidación asociada al propósito de la hoja 3.

[42] El primero, con exponentes, con la ley de exponentes.

[43] Y luego al tener a^2+b^2 igual a c^2 es por ser triángulo rectángulo y por el teorema de Pitágoras.

[44] No, es que vamos ajustando cada cosa [usar el formato de las hojas anteriores].

[45] Es directo por triángulo rectángulo y teorema de Pitágoras.

[46] No estoy seguro, $c^2=a^2+b^2$ […] pasaría sólo si 1 igual a a^2. Ah no. [] Sí, por el teorema de Pitágoras.

[47] Bueno, tenemos que a [elevada] a la n…

[48] Pero esa es ya la conclusión a la que queremos llegar.

[49] Tienes un entero $n>2$, a y b catetos y c es la hipotenusa. La hipotenusa siempre va a ser mayor que el cateto, no importa el exponente que le

[55] Igual, si n es igual a 2 tenemos que c cuadrada es mayor que a cuadrada.

[56] ¿Cómo sería n si fueran fraccionarios? A ver, con a igual a un cuarto y b igual a un cuarto.

[57] Como son reales positivos y con la hipotenusa primero digo que es mayor que cualquiera de los dos catetos.

[58] Entonces las longitudes son positivas y $c^{n-2}>a^{n-2}$, si $n=2$ es entero y es …

[59] No es cierto, n no puede ser igual a 2.

[60] Nada más multiplica esto [$(a^2+b^2)c^{n-2} =a^2c^{n-2}+b^2c^{n-2}$]

[61] Y sustituye igual la de b^2c^{n-2}

[62] Sustituyendo directo acá con > [$c^{n-2}>b^{n-2}$ en $a^2c^{n-2}+b^2c^{n-2}>a^2c^{n-2}+b^2b^{n-2}$]

[63] Y ya aquí los toma juntos, esto mayor que a^{n-2} y esto mayor que b^{n-2} [$c^{n-2}>a^{n-2}$ en $a^2c^{n-2}+b^2c^{n-2}>a^2a^{n-}$

pongas, pero que sean iguales los exponentes, claro.
[50] Por eso lo está separando. La única para que fueran igual *c* y *a* sería con *1* pero entonces ya *c* no sería hipotenusa.
[51] El único exponente con que serían iguales sería … pero no, como no tienen la misma longitud.
[52] Si son fraccionarios es otra cosa.
[53] Pero uno mayor que un cuarto.
[54] A ver. Tienes *c* mayor que *a,* uno mayor que un medio. ¿Y sí? Uno mayor que un cuarto.

$^{2}+b^2b^{n-2}$]
[64] A ver [silencio], ya entendí puse lo mismo que tú, de otra manera, pero ya lo entendí.
[65] Esto nos va a dar esto, y como es mayor, ya no igual, nos va a dar esta parte y otra vez mayor que b^{n-2} nos va a dar esto c^n mayor que a^2a^{n-2} y más b^2a^{n-2} [asienten mostrando comprensión].
[67]Yo estaba queriendo ver igualdad, pero no claro es que esta parte que [la hipotenusa] mayor que los catetos es importante. Sería c^n igual c^2c^{n-2}, luego sustituir c^2 …[revisa los pasos].

En la interacción con el profesor, los alumnos responden a los cuestionamientos de manera clara y justificando cada paso, por esta razón hemos omitido la participación del profesor y solo presentamos el escrito. Se puede considerar que los estudiantes son más autónomos y muestran confianza en su manera de justificar. Esta confianza también tiene que ver con disponer de la demostración "correcta" desde el inicio y que su papel es extraer significado y justificar.

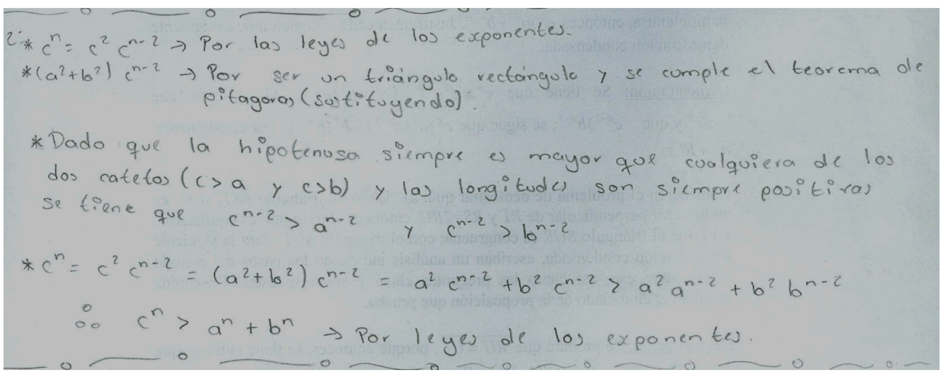

$c^n = c^2c^{n-2}$ → Por las leyes de los exponentes.
$*(a^2+b^2)c^{n-2}$ → Por ser un triángulo rectángulo y se cumple el teorema de pitagoras (sustituyendo).
*Dado que la hipotenusa siempre es mayor que cualquiera de los dos catetos ($c>a$ y $c>b$) y las longitudes son siempre positivas se tiene que $c^{n-2}>a^{n-2}$ y $c^{n-2}>b^{n-2}$
$*c^n = c^2c^{n-2} = (a^2+b^2)c^{n-2} = a^2c^{n-2}+b^2c^{n-2} > a^2a^{n-2}+b^2b^{n-2}$
$\therefore\ c^n > a^n+b^n$ → Por leyes de los exponentes.

Figura 48. Desde una versión condensada de la demostración extraen significado y presentan una versión explicativa.

Para la siguiente tarea, al igual que antes, se les proporciona la demostración condensada de la proposición: *Dado un triángulo RST, si SU es un bisector perpendicular de RT y RS=2RU, entonces el triángulo es equilátero*, y se les pide que escriban primero un análisis indicando los pasos del método *avance-retroceso*, así como las preguntas clave y sus respuestas, seguido del enunciado de la proposición que se prueba.

> Demostración: Se probará que $\overline{RU}=\overline{UT}$, porque entonces, se tiene también que *∢RUS=∢TUS=90º y* $\overline{SU}=\overline{SU}$. Para ello, se observa que $\overline{RU}=\overline{UT}$ porque *SU* es bisector perpendicular de *RT,* y por tanto la demostración está completa.□

Mediante *R-acciones* identifican el consecuente de la proposición [70], reconocen y mencionan la definición de triángulo equilátero dado que figura en el consecuente [71], asocian punto medio y mediatriz con bisector perpendicular, como parte de la hipótesis [72]. Con una *R-acción* [73] perciben la necesidad de probar que *SU=RT*. Ahora tienen mayor cuidado al justificar y no encontramos justificaciones del tipo «pues es obvio». Esto representa una acción de consolidación (***C***-*acción*) respecto de la necesidad de argumentar y justificar en matemáticas. Justifican lo anterior mediante una *B-acción* [74] integrando elementos de la hipótesis y su significado. El maestro interrumpe, sin que sea necesario, el curso de la discusión retomando el enunciado y leyendo la demostración confundido por la palabra bisector perpendicular. No aclara esto y les guía a probar la igualdad de *RU* y *UT* para asociar igualdad de ángulos. Como respuesta, los estudiantes continúan con una *B-acción* [78] que enlaza la hipótesis con las acciones previas para justificar la igualdad de los ángulos *RUS* y *SUT*. Otra *B-acción* [79] entrelaza la medida de los ángulos, con el hecho de ser triángulos rectángulos y con la posibilidad de realizar los cálculos para obtener la medida de *SU*. A través de *B-acciones* [80 y 81] se concluye que no es necesario saber la medida de *SU*, al ser lado común en los triángulos *RSU y SUT,* se puede usar el criterio de congruencia *LAL* con la igualdad de lados, *RU=UT*, la igualdad de ángulos *RUS=SUT=90*^{o} y la igualdad de lado *SU=SU*.

[70] Ahí ¿qué vamos a demostrar? ¿qué es un triángulo equilátero?
[71] Podemos demostrar que este lado [RS] mide lo mismo que ST pero no se me ocurre cómo.
[72] Podemos usar lo del punto medio, la mediatriz lo divide en su punto medio.
[73] *SU* lo divide a la mitad [a *RT*] pero no sabemos cómo demostrarlo.
[74] Pues como *SU* es la mediatriz [de *RT*] lo parte a la mitad y es *2RU* la [misma] medida de *RS.*
[75] [El profesor se acerca percibiendo que dudan] Ahí tienen la demostración, a ver, bisector perpendicular, lo toman como bisectriz [se muestra inseguro], no lo traducimos como mediatriz. A ver, lo que saben es que este ángulo *RUS* es igual al ángulo *TUS*, [lee la demostración], quieren probar primero que *RU* es igual a *UT* para llegar a la igualdad de ángulos, …
[78] Pero al ser perpendicular [*SU*] a *RT* el ángulo *RUS* es de 90^{o} y el otro [ángulo *SUT*] también …
[79] Con el teorema de Pitágoras entonces.
[80] *SU* es igual a *SU.*
[81] Por criterio de congruencia *LAL.*

Dado que la tarea era probar que el triángulo *RST* era equilátero y se concluye congruencia de los triángulos *RSU* y *SUT*, el profesor cuestiona a los estudiantes para ver si están entendiendo esa diferencia y por qué es adecuada la demostración [82]. Los alumnos muestran *R-acciones* [83-85] que dan cuenta de su conocimiento de la función y elementos tanto de la hipótesis como de la conclusión. Además retoman las deducciones hechas (como *B-acciones*) en el fragmento de la interacción anterior, en forma de *R-acciones* [87 y 89] y retoman la conclusión para construir Q_1 [90], es decir, «qué significa regresarnos». Esa *B-acción* [92] es una anticipación de que de lo anterior deben concluir que los lados del triángulo *RST* son iguales (*RS=RT=ST).* Al extender el significado de la congruencia de triángulos encontrada previamente muestran una *C-acción* [93]. Es decir, mediante [90-92] se retrocede desde la conclusión y la *C-acción* [93] es una avance desde la hipótesis. Finalmente, los estudiantes reconocen que se prueba que es un triángulo equilátero [95] y que los triángulos *RSU* y *SUT* son congruentes [96]. El profesor anticipa que son proposiciones equivalentes y lo enlaza con la siguiente parte de la tarea, que en realidad han resuelto ya. El profesor aprovecha esta oportunidad para trabajar en el proceso de retroceder a partir de la conclusión y que los estudiantes se den cuenta de la importancia de aclarar lo que exactamente han probado y su significado.

[82] Profesor: ¿Cuál es la pregunta clave? Y ¿qué es lo que queremos probar?
[83] Alumnos: Probar que es triángulo equilátero.
[84] As: *P* [la hipótesis] sería que *RST* es un triángulo y que *SU* es bisector perpendicular de *RT.*
[85] As: Y que *RS=2RU.*
[86] P: Eso es lo que sabemos cierto, ahora ¿qué significa esto?
[87] As: Que *RU* es igual a *UT* por ser bisector *SU [de RT]* y que *RSU* es congruente con *UST.*
[88] As: Porque el ángulo *RSU* es de 90^{o} y también es
[91] As: ¿Qué significa para regresarnos y tener Q_1? [un paso previo enlazado con la conclusión].
[92] As: Que *R*T es igual a *RS* y también igual a *ST.*
[93] As: Ya de ahí cerramos con lo de congruencia *LAL* y eso significa que sus lados homólogos son iguales *RS* con *ST* y *RU* con *UT* y *SU* con *SU*.
[94] P: La demostración exactamente ¿qué prueba?
[95] As: Qué el triángulo [RST] es equilátero.
[96] As: También que los triángulos son congruentes [$\triangle RSU \simeq \triangle SUT$].

igual al [ángulo] *SUT.*

[89] As: Luego que *RT* es igual que *RS.*

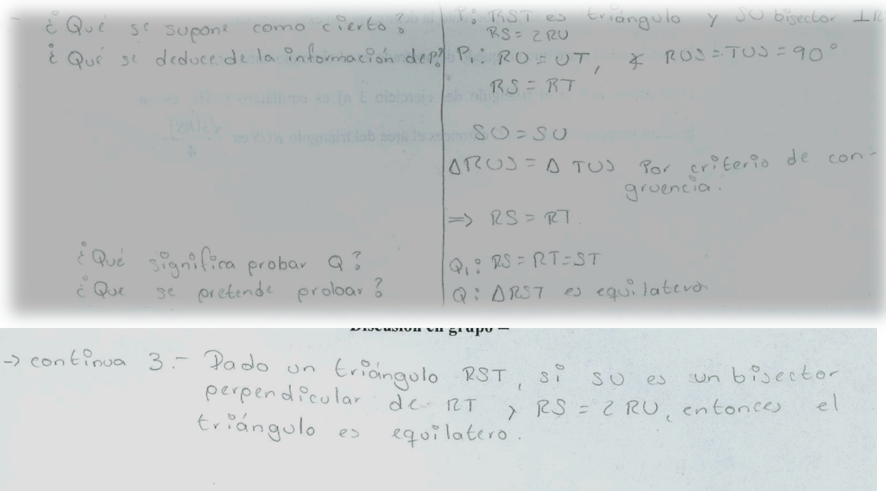
[90] As: Ahora pues la *Q* [la conclusión de la proposición] es que *RST* es triángulo equilátero.

[97] P: En realidad son proposiciones equivalentes.

[98] As: La demostración de la [tarea] 4 es pasar entre una y otra porque son equivalentes.

Finalmente en el registro escrito plasman la discusión y aunque mencionan el criterio de congruencia de triángulos no hacen referencia específicamente al criterio LAL.

Figura 49. Desde una versión condensada los estudiantes presentan una versión explicativa detallada de la demostración P implica Q.



La proposición: *Dado un triángulo RST, si SU es un bisector perpendicular de RT y RS=2RU, entonces el triángulo SUR es congruente con el triángulo SUT,* quedó de tarea para que derivado de la parte anterior extendieran y la analizaran de manera independiente. En la interacción anterior probaron que *Dado un triángulo RST, si SU es un bisector perpendicular de RT y RS=2RU, entonces el triángulo es equilátero*, era equivalente a probar que el triángulo *SUR* es congruente con el triángulo *SUT* basados sobre la misma hipótesis. Los alumnos lo demuestran utilizando el criterio de congruencia *LLL* en lugar del utilizado en la resolución de la tarea previa (*LAL*). Esto muestra una ***C**-acción* de consolidación del alumno que expone su solución dando evidencia de flexibilidad de pensamiento al utilizar otra estrategia con éxito.

En este fragmento se observa que proponer la tarea para un análisis individual previo de cada estudiante modifica notablemente la interacción en equipo. Dado que es un estudiante el que explica su prueba (*R-acción* [1]) esperando ser cuestionado por sus pares, que emprenden *B-acciones* realizando cálculos para verificar su aportación [2, 3 y 4]. El estudiante expone su solución, verbalizando lo que ha trabajado previamente [5] (*R-acción*). Uno de sus compañeros sigue sus ideas y las enlaza con la tarea para encontrar las igualdades de lados homólogos y usar el criterio *LLL* de congruencia lo que constituye una *B-acción* [6]. Finalmente son sus pares quienes muestran la *C-acción* al mencionar que han probado la congruencia de triángulos [7].

[1] Probar que son congruentes los triángulos. Yo lo hice considerando este lado [*RU* con medida] x y este [*RS* con medida] $2x$ y aplicando teorema de Pitágoras [para encontrar la medida de *SU*].

[2] Pero a ver. No creo. Tenemos que $2x$ es la hipotenusa, esto es igual a x más este cateto …

[3] No, la hipotenusa es al cuadrado y los catetos también.

[4] Tienen razón ya encontré mi error.

[5] Si seguimos con lo mío, llegamos a que la raíz cuadrada de x^2+$2x^2$ nos da raíz de tres x y ese es *SU*.

[6] Ahora vemos que *RS* es igual que *ST* iguales a $2x$ y *RU* es igual que *TU* iguales a x.

[7] y ya tenemos los tres lados de uno [triángulo *RSU*] coinciden con los [lados homólogos] del otro.

La siguiente parte del diálogo la omitimos porque no hay mayor diferencia entre la descripción verbal y la muestra escrita del trabajo realizado por los estudiantes.

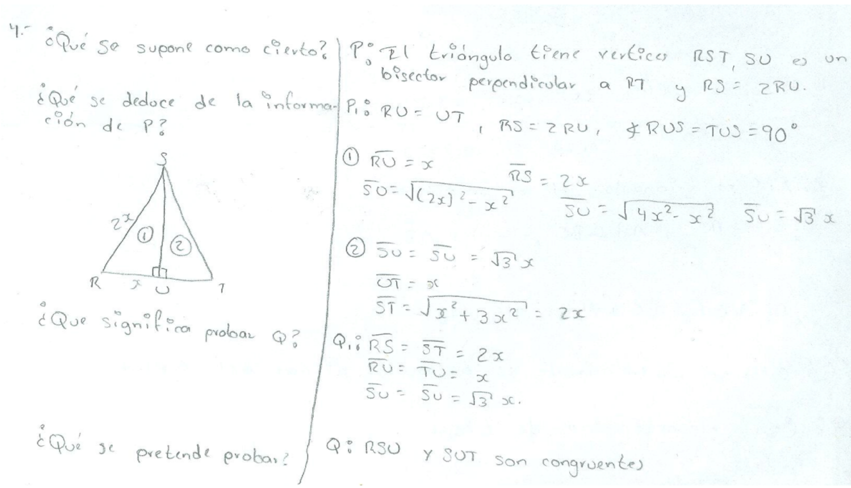


Figura 50. Desde la versión condensada los estudiantes presentan la versión detallada de P implica Q

La siguiente tarea, al igual que la anterior, fue trabajada de manera individual y la discuten en equipo al inicio de la siguiente sesión para entre todos ponerse de acuerdo en el registro escrito a entregar. La tarea consistía en que demostraran que si el triángulo del ejercicio 3 a) es equilátero y *SU* es un bisector perpendicular de *RT,* entonces el área del triángulo *RUS* es $\sqrt{3}(RS)^2/4$.

La interacción muestra el acuerdo tomado en el equipo. En este caso se dan cuenta que la proposición no es cierta, pero aunque desde un principio se dan cuenta de ello la revisan una y otra vez mediante *B-acciones* [23, 27 y 29]. Más que un rasgo de inseguridad en su trabajo, esto muestra mayor cuidado en revisar su manera de proceder. Con una *C-acción* se muestra que son conscientes de que han concluido la tarea y verbalizan el hecho demostrado [30].

[20 y 22] yo ahí llegué a que […] no es cierta la proposición, porque está pidiendo el área y eso sería base que es *RT*, por altura que es *SU*, sobre *2* y sería 2*x* por √3 por *x* entre *2* y queda √3 por x^2. Luego no llego porque el área de RUS sería la mitad y sería √3 por x^2 entre 2 y no es, la conclusión, no llegas.

[23] [Revisan cálculos] Esta es área de todo el triángulo grandote [*RST*], luego si la divides entre dos, por la congruencia, sería la del otro triángulo [*RUS*].

[24] Mira saca otra vez la del grande. Sería [cálculos en voz alta] sí, raíz de tres por *x* cuadrada.

[25] Ahora la del chico es eso entre 2 y lo que dice [conclusión] es que es √3 por RS al cuadrado que vendría siendo 2*RU*, pues 2*x*. Entonces es √3 por 4 x^2 y entre 4 se eliminan y nos queda √3 por x^2

[26] No. Está bien ahí. Les faltó dividir entre dos.

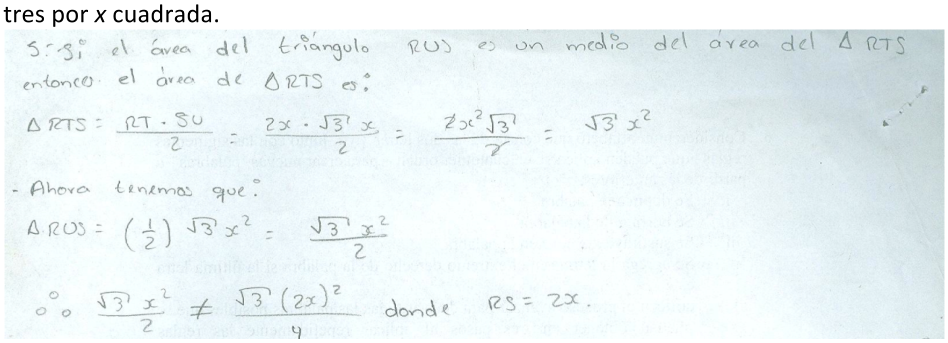
[27] No, pero revisen lo que tenemos.

[28] Pues el triángulo con las mismas condiciones que antes.

[29] [Revisan] No, sí faltó dividirlo entre 2

[30] Entonces demostramos que no es cierto.

Figura 51. Demuestran que es F la proposición.



La siguiente tarea tiene como propósito afianzar el método avance-retroceso como método directo para demostrar una proposición. Esta tarea a su vez se divide en 4 ítems a), b), c) y d). En ella se considera la existencia de un alfabeto que consta de las dos letras *s* y *t*, junto con las siguientes reglas –que pueden aplicarse en cualquier orden– para crear nuevas 'palabras' a partir de las anteriores.

i. Se duplica la palabra
ii. Se borra *tt* de la palabra
iii. Se sustituye *sss* por *t* en la palabra
iv. Se agrega la letra *t* en el extremo derecho de la palabra si la última letra es *s.*

La consigna del inciso a), se plantea para ver como se desempeñan en la parte correspondiente a avanzar en deducciones respetando las reglas del sistema. Aquí se solicita a los alumnos que utilicen el proceso avanzar para derivar todas las palabras posibles que se puedan obtener en tres pasos al aplicar repetidamente las reglas (i-iv) en cualquier orden a la palabra inicial *s*. La interacción en el equipo muestra comprensión de la tarea con un primer reconocimiento, *R-acción*, de los elementos o axiomas de partida [32], seguido de una *B-acción* para edificar los primeros ejemplos [33] y *R-acciones* para la interpretación adecuada de los axiomas, es decir, que las letras *s* y *t* también pueden considerarse como palabras [34 y 35]. Observamos que aplican las reglas con soltura para deducir nuevas palabras, lo que constituyen *B-acciones* [36 y 37], mostrando cuidado al leer las reglas las veces que sea necesario para despejar las dudas. Este manejo de las reglas y cuidado constituye una muestra de ***C***-*acciones* de consolidación del proceso *avanzar* como parte directa del método *avance-retroceso*. Sin embargo, aunque en 4 de los estudiantes se percibe tal consolidación, uno vuelve a mostrar el *error de la recíproca [P implica Q* visto como equivalente de *Q implica P]* [39], aunque es consciente de que comete este error [41 y 43], lo que se considera una *R-acc*ión. Con ayuda de sus compañeros logran superar su confusión mediante *R-acciones* [40 y 42] dándose cuenta del error cometido [39]. De esta forma se muestra disposición al trabajo en equipo y a la comunicación efectiva.

[32] Tenemos un alfabeto de dos letras y con esas condiciones podemos formar nuevas palabras.
[33] [Vuelven a leer el ejercicio y las reglas] Aquí vemos todas las opciones que tenemos si avanzamos. desde *s*. Por ejemplo si se duplica *s* tenemos *ss* y luego por la otra regla ahora se agrega *t* y tengo *sst*,
[34] En vez de, se duplica la palabra, se duplica s?
[35] Es que s es una letra, pero puede ser también una palabra inicial.
[36] Ahora si *s* por ejemplo le aplicamos otra regla sería agregar *t* y tener *st*.
[37] [Se detienen a leer iv] Ah sí, sí, ahora puedo duplicar y tenemos stst y otra vez duplicar [*stststst*]
[38] Qué más puedo hacer partiendo de *s.*
[39] Falta otra, en esa *s*, agrega *t*, duplica y sustituir esa por las tres *s*. A ver sería *s*, luego *st* [por *iv*], luego sería *stst* [regla *i*], y *stssss*,
[40] A ver tengo *s*, agrego *t*, tengo *st*, luego duplico, *stst* y luego en lugar de *t* sustituir *sss*, mh [duda]
[41] Entonces, ¿sí se podía al revés?
[42] No, no es lo mismo. La regla es: si tienes *sss* puedes sustituir por *t*, pero *t* no implica *sss* [error de la recíproca] [El alumno indica que es algo que todavía lo confunde].

Finalmente, cuando el profesor pregunta a los estudiantes sobre su solución, éstos enuncian de manera precisa las 6 opciones -*sssst, ssssssss, ts, st, sstsst, stststst*- obtenidas al avanzar tres pasos a partir de *s* y que han logrado mediante *B-acciones*. El profesor concluye puntualizando lo que los estudiantes han puesto previamente de manifiesto.

[71] Maestro. De alguna manera entonces partimos de un conjunto de reglas, que podemos llamar axiomas y luego a partir de eso podemos ir generando proposiciones, que es lo que hacemos nosotros [en el método *avance-retroceso*] por ejemplo *s* es *P*, y obtenemos P_1 al aplicar una regla, luego si aplicamos otra obtenemos P_2 y luego otra P_3, eso es lo que hicieron en el inciso *a).*

Con la intención de ganar confianza en el manejo del proceso *retroceder* se les pide en b) que apliquen el primer paso del proceso *retroceder* a la palabra *tst.* Específicamente, que realicen una lista de las palabras para las que la aplicación de una de las reglas anteriores da como resultado *tst.* Mediante *B-acciones* [46 y 49] los estudiantes encuentran sin problema las palabras, mostrando mejora en el proceso *retroceder* a partir de la conclusión. En este aspecto mostraron debilidad al hacer la primera tarea de la hoja de trabajo 7, donde pusieron de manifiesto que no distinguían aún la diferencia entre avanzar de algo conocido y retroceder de algo a lo que quieren llegar (asociado al error de la recíproca). Al igual que antes encontramos cuidado en el manejo de los elementos de la proposición y repetición de la lectura de la tarea para entender cuándo algo no funciona, o bien para asegurarse de que todos entienden lo mismo. En esta ocasión, en las acciones de consolidación para comunicar matemáticas, o bien para manejar correctamente el *registro matemático* (Forman, 1996), los estudiantes, en sus *C-acciones*, organizan sus ideas para explicarlas [53] y comunicarlas a otros [46, 49]. Estos rasgos no se encontraron en los diálogos de las primeras sesiones de esta ingeniería didáctica, donde su comunicación era más desordenada y no hacían explícito del todo su pensamiento. Forman (1996), al observar diferentes clases de matemáticas donde los estudiantes trabajan juntos, concluye que el discurso matemático que manejan en interacciones efectivas es de un tipo especializado que denomina *registro matemático.* Al igual que ella, observamos que después de varias sesiones de discusiones en equipos y gran grupo, los estudiantes participan del discurso matemático incrementando sustancialmente las formas (cuidando argumentaciones, lenguaje matemático, estructura, uso de las definiciones, de sus deducciones, de los símbolos y su función), lo que les conduce a la comprensión de normas, habilidades, valores e ideas que son compartidas por los matemáticos experimentados.

[45] [Leen el inciso b)] Una regla nada más ¿verdad? [vuelven a leer].
[46] Para que nos diera *tst* el *t* pudo haber sido *sss* [*sssst*] o al revés, *tssss* y las 3 ’s se convierten en *t*, ya con un solo paso ya van dos.
[47] Pero no dice que de regresar un solo paso, o ¿sí? [vuelven a leer *b)*].
[48] Pues ya esas, qué otras.
[49] Que fuera *ts* y como *s* es la última letra [aplicando la regla *iv*] se le agrega *t.*
[50] Bueno ya tenemos tres dejen escribo, sería partir de *4’ s* y una *t*, para el primero, luego de *tssss* para el segundo y para el otro.
[51] de *ts.*
[52] [Un estudiante vuelve a leer] No lo estoy entendiendo, me lo pueden explicar.
[53] Tenemos que dio como resultado *tst* y debemos ver un paso anterior, regresar para encontrar la palabra anterior de donde viene. Por ejemplo, si hubieramos tenido *sssst* aplicando la regla [*iii*] *sss* sería *t* y ya tenemos *tst*. El chiste es regresar un solo paso. También puede ser *tssss* y sustituyes por *t* las *sss*. También pudo venir de *ts*, y como termina en *s* se le agrega *t* y tienes *tst*. ¿sí? [muestra comprensión]

Cuando el profesor les pregunta sobre el resultado de esta tarea, muestran comprensión de la misma. Como posibles resultados de retroceder un paso o bien Q_1 señalan las 5 posibles opciones*: sssst, tssss, ts, tsttt, tttst*. En esta tarea muestran un mayor dominio del método de retroceso a diferencia de la primera tarea de la sesión, donde cometen el error de la recíproca.

[72] Profesor: [Lee b)] Ahora nos dan la *Q* [la conclusión o consecuente de la proposición], quién es *Q.*
[73] Alumnos: Es *tst*.
[74] P: Bien, ahora tenemos *tst*, ¿qué hacemos ahí para encontrar Q_1? ¿qué palabra podemos tener?
[75] As: *4’s* y *t* [*sssst*].
[76] P:¿cuántos posibles Q_1 hay?
[77] As: Serían 5, ¿no?

En el siguiente ítem c) se les pide que demuestren: *Si s, entonces tst*. Al inicio [56] muestran confianza al enfrentar este tipo de tareas de demostración y una comprensión de la misma reconociendo (*R-acción*) la hipótesis, la conclusión y su función [57], así como *B-acciones* donde se muestra el dominio de la deducción de hechos utilizando reglas establecidas [58-60]. Además de la consolidación del proceso directo de demostración (***C***-*acciones* vinculadas al método) mostrados por los estudiantes, intentan, mediante *B-acciones* (pensando en la tarea), otras maneras de hacerlo que los lleve a construir nuevas proposiciones o hechos generales [61-69]. Enuncian su conjetura [69]: si una palabra tiene *3k+1* eses se puede reducir dicha palabra a la forma *tst* utilizando las reglas establecidas. Esta parte no se desarrolla más al ser interrumpidos por el profesor para ver como van en las tareas realizadas hasta el momento.

[57] [Leen] No está tan díficil como pensaba. Demostrar que se obtiene *tst* partiendo de *s.*
[58] Por duplicación *ss*, duplicamos otra vez, *ssss.*
[59] Aquí no importan [el número] los pasos.
[60] No, *ssss* y luego ya sustituimos una *t*, nos queda *ts* y como termina en *s* agrego la *t* y ya está *tst.*
[61] Y no puede ser, duplicar, duplicar y así.
[62] Pero cuántas veces.
[63] Serían *6 ese*s, más *1*, 7 *eses*, no *6*.
[64] Pero para seguir así y generalizar tendrían que ser múltiplos de *7* y no creo que al duplicar vamos a tener *7* veces o múltiplos de *7.*
[65] No pero no sólo serían *2, 4, 8, 16, 32*,…
[66] Nunca vas a llegar a múltiplos de 7 [el estudiante muestra duda] De verdad, ¿nunca? 64,128, 256, …
[68] No, no da ninguna *7*.
[69] No pero de la forma *3* por algo, más *1* [número de eses presentes].

Al discutir en gran grupo con el profesor, los estudiantes además de mostrar dominio y comprensión de la tarea con una *R-acción* [79], muestran, en otra *R-acción*, su inquietud de revisar la conjetura antes hecha para continuar afinándola [84], pero el maestro no da pie para que se amplíe la idea y se trunca esa posibilidad. Los estudiantes están interesados e involucrados en el proceso mostrando su adquisición de las habilidades necesarias para la práctica profesional de un matemático es decir, una consolidación (***C***-*acción*) del *registro matemático*. Por medio de una *B-acción* se pone de manifiesto la conexión inmediata entre su demostración y el método *avance-retroceso* [86]. La cantidad y calidad de las conexiones realizadas con los conocimientos previos constituyen una medida de comprensión del proceso de demostrar. Este ejercicio resultó particularmente estimulante y ayudó a reforzar el método de demostración directo, presentado, en apariencia, como alejado del formato matemático.

[78] Profesor: Ahora el c) [lee] qué significará esto.
[79] Alumnos: Que partiendo de *s* podemos obtener *tst.*
[80] P: Sí, muy bien. Entonces a partir de definiciones y axiomas ya podemos demostrarlo.
[81] As:Simplemente con demostrarlo de una forma ya está bien, ya es suficiente ¿no? [confirman]
[83] As:Ya tenemos *s*, luego *ss*, luego otra vez duplicar *ssss* sustituir por *t*, luego *ts* y como termina en *s* agregar *t* y ya *tst.*
[84] As: Nos quedamos en la discusión de otro para hacerlo en general, pensamos doblar y doblar y doblar y así, luego ir reduciendo varias *s* con *t*, pero como ya no alcanzamos, bueno yo, [ya no exploraron pero se quedaron en que si tuvieran *3k+1 eses* podría ser. El profesor no pidió mayor explicación].
[85] P: A ver pensemos que tener *s* es *P* [la hipótesis], la *Q* [conclusión] es *tst* y de ahí vemos que posibilidades. Tenemos de avanzar a partir de *P* y de retroceder a partir de *Q*. Aquí de *tst* del ejercicio anterior podemos ver las posibles Q_1, entonces…
[86] As: Sí, por ejemplo podemos usar todas estas [*sssst, tssss, ts, tsttt, tttst*], ya está, sí es Q_1, *sssst*, entonces puedes empezar en *s* lo duplicas *ss* [es P_1], lo duplicas *ssss* [es P_2], de hecho sería este.

En el siguiente apartado deben demostrar que: *Si s, entonces ttst.* Esta demostración la realizan de manera directa con un reconocimiento, *R-acción* [88], seguida de *B-acciones* [89-92] con deducciones entrelazadas y una *C-acción* [93] con la que prueban la proposición.

[88] Sería partiendo de *s* para llegar a *ttst* [inciso d].
[89] Tenemos *s*, [por regla *i*] la duplicamos no?
[90] La volvemos a duplicar *ssss*, y otra vez [*ssssssss*].
[91] Aquí ya podemos poner *t* y van *ttss*, y si duplicamos *ttssttss.*
[92] Ya estas *t's* se pueden eliminar [las segundas aplicando la regla ii].
[93] *ttssss* y luego *ttst.*

Aunque en las interacciones se ha visto como enlazan el razonamiento para obtener las deducciones del *avance* y *retroceso*, podemos ver en su registro escrito que no organizan las demostraciones en versión condensada y formal. Esto podemos atribuirlo a la naturaleza de la tarea que no parece una proposición matemática aún cuando hicieron explícita la conexión con el método *avance-retroceso*.

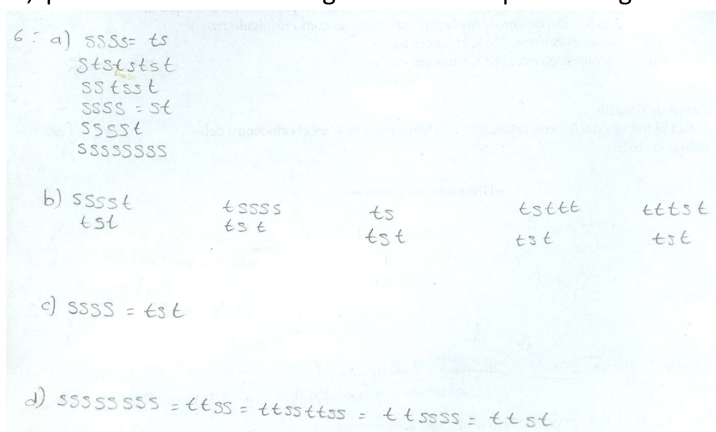


Figura 52. Producción escrita del equipo a la tarea del alfabeto.

Para concluir la sesión el profesor les propone un desafío: *Sea el triángulo ABC con ortocentro H. Demostrar que C es el ortocentro del triángulo ABH*. Luego se asegura de que recuerden el significado de ortocentro, preguntándoles acerca de la altura de un triángulo. Los alumnos tienen claros los conceptos y lo que implica probar la tarea. Al día siguiente entregan el escrito. Uno de los cuáles se muestra a continuación.

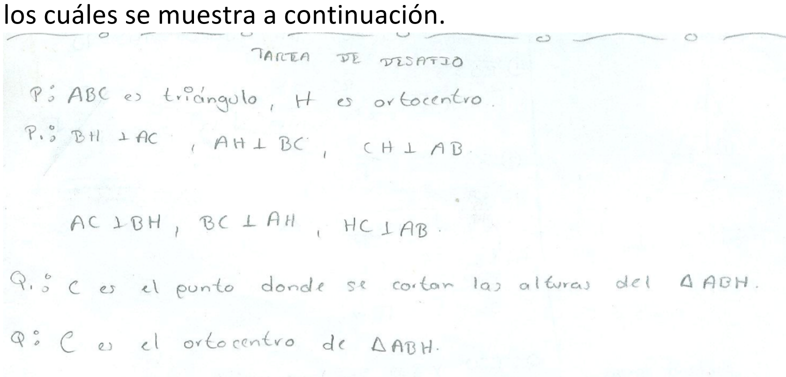


Figura 53. Demostración de P implica Q por el equipo.

4.6 Bloque IV. Métodos indirectos de demostración

En este bloque se analiza la forma de introducir los métodos de reducción al absurdo y de contrapositivo como métodos indirectos de prueba, así como, la respuesta de los estudiantes en cuanto a la comprensión del método y al uso del conocimiento y aplicación del método de avance y retroceso estudiando antes, además de la experiencia ganada en construir negaciones y poder llegar a las contradicciones requeridas.

4.6.1 Hoja de trabajo # 9: Reducción al absurdo

El desarrollo de esta hoja de trabajo se realizó el 1 de julio de 2009, y tuvo una duración de 1 hora 40 minutos. El objetivo era introducir el método de reducción al absurdo a partir del método avance-retroceso, estudiado dos días antes, para demostrar proposiciones de la forma *si P entonces Q*. Básicamente en este método **se supone P verdadero y NO Q verdadero**. Se procede con el proceso de avanzar utilizando la información anterior para llegar a una **contradicción** en un enunciado fuera de toda duda.

El profesor empieza explicando la técnica de reducción al absurdo ilustrándolo con el ejemplo: *Demostrar que los números primos nunca se acaban, siempre hay más.* Aunque en principio parece no tener la forma *si P entonces Q* a los alumnos se les hace ver que el enunciado puede transformarse en: *Demostrar que los hechos conocidos sobre los números primos implican que dichos números son infinitos.* Durante el diálogo el maestro utiliza la explicación y el cuestionamiento para construir la demostración y asegurarse que los alumnos van comprendiendo la lógica del método.

[1] Profesor: […] ¿Qué información se supone cierta? Tengo la proposición, ¿Qué cosas conocemos sobre primos? Básicamente la definición de número primo […], hablando de números positivos, es aquel que sus únicos divisores son 1 y el mismo. Ahora, aquí partimos de la definición de primo. Luego en reducción al absurdo yo tengo que proponer a todos los primos. Y si no, si hay otros, entonces tendría que serían infinitos. A ver, si yo digo que es finita la cantidad de primos entonces ¿qué se deduce?. Que puedo contarlos ¿no? Entonces tendría primo 1, primo 2, así hasta primo n. Tenemos todos ¿sí? ¿cómo construir una contradicción de esto? Si yo tengo un número finito, ¿cómo obtengo una contradicción?

[2] Alumnos: Contradicción de qué. De qué es finito el número [de primos].

[3] P: Sí, supón que yo tengo esta lista de primos y afirmo que es finita ¿cómo lo contradices?

[4] As:Pues sí encuentro uno que no esté en la lista

[5] P: Exacto, que no esté en la lista y sea primo. A ver, consideremos la idea de multiplicar todos los primos de la lista y sumarles 1. Por supuesto, este número es diferente a todos estos [números de la lista propuesta]. Luego pensemos por ejemplo si lo divido entre dos, ¿cuánto sería?

[6] As: Primero tendría un medio por todo eso.

[7] As: Me sobra *1*.

[8] P: Si lo divido entre *3*.

[9] As: Sobra *1* o *2* porque ahí también está *3* en el producto y más *1.*

[10] P: Este número lo divide entre tres y cuánto me sobra.

[11] As: Ah! pues *1*.

[12] P: Exacto! Ahora si lo divido entre *5*, qué pasa.

[13] As: También sobra 1.

[14] P: ¿Qué pasa? Este número no es divisible entre ninguno de esos primos. Este número que construimos … ¿Qué deducimos? N tiene dos opciones: ser primo o compuesto. Si lo primero ocurre entonces ya tenemos la contradicción que es lo que acabamos de platicar, pues *m* sería un primo mayor que todos los anteriores y que *n*. Si es compuesto entonces es múltiplo de uno de los primos de la lista. A este factor primo le podemos llamar *k* y entonces *m* sería de la forma *m=hk* y *hk* tendría que ser 2*3*5*… hasta *m+1*, como *k* es un primo de la lista pertenece a los dos lados de la igualdad así que uno es igual a *kh-* … bueno, ahí lo que hacen es dejar al 1 y luego ya dijimos que era de la forma. Pero este *k* que es primo es factor ahí y acá, así este por este es entero y luego la igualdad es imposible. ¿Qué pasa?

[15] As: Que encontré la contradicción.

[16] P: Sí, luego ¿qué se pretende probar?

[17] As: Qué los números primos son infinitos.

Ahora el profesor muestra la tabla 56 que aparece a continuación y que concentra la demostración.

Tabla 56. Demostración mostrada por el profesor de que los números primos son infinitos.

Preguntas clave	Organizando la demostración
¿Qué información se supone cierta?	P: Hechos conocidos sobre los números primos No Q: Los números primos son finitos
¿Qué deducimos de esta información?	Podemos ordenar los números primos en la lista *2,3,5,7,11,…,N*, donde *N* es el último primo. Formemos el número *M=2x3x5x7x11x…xN+1*
¿Cómo construir una contradicción?	*M* tiene dos opciones: ser número primo o compuesto. Si ocurre el primero tenemos la contradicción pues *M* sería un primo mayor que *N.*
¿Qué deducimos?	Si es compuesto entonces uno de sus factores es un número primo de la lista, a ese factor primo podemos llamarlo *K* y entonces *M=HK.* *HK=2x3x5x7x11x13x…xN+1,* como K es número primo de la lista pertenece a los dos lados de la igualdad, así que*1=K(H-2x3x5x11x13x…xP)* Pero la igualdad es **imposible**, ya que el número primo *K* no divide a *1*. Hemos encontrado la contradicción y por lo tanto,
¿Qué se pretende probar?	Q: los números primos son infinitos.

[18] Profesor: Esas preguntas de la izquierda son las preguntas claves que me indican cómo proceder en la técnica de reducción al absurdo: qué información es cierta, la negación de lo que queremos probar, cómo construir una contradicción, qué se deduce de la contradicción y luego llegamos a lo que se pretende probar. Aquí procedemos en línea vertical, derecho, en avance, ya no usamos retroceder. […]

El profesor propone a los alumnos trabajar sobre la demostración de la proposición √2 *es un número irracional.* Esto les lleva 13 minutos incluyendo el registro de resultados. En las proposiciones que no tienen la forma *Si P entonces Q* les cuesta trabajo identificar la hipótesis o información que debe suponerse cierta [27, 28, 34 y 35]. La interacción en el equipo da pie a que los estudiantes muestren acciones de reconocimiento (*R-acciones*) de este tipo de enunciados y ayuden a sus compañeros para darse cuenta de su estructura [29 y 36]. Otras *R-acciones* tienen que ver con la identificación de la conclusión que desea probarse y este reconocimiento los lleva a *B-acciones* que les permiten enunciar la negación necesaria para poder hacer uso de la técnica de reducción al absurdo [30, 31 y 38]. Mediante otras *B-acciones* [40 y 41] descubren a través de la negación de *Q* que √2 puede escribirse como cociente de dos enteros con denominador distinto de 0. Una *C-acción* se produce cuando son capaces de construir la contradicción necesaria para concluir la demostración [44].

[28][Leen] ¿Qué información se supone como cierta? [responden] Que √2 es irracional.

[29] No, qué es un número solamente [entiende que la condición de irracional debe probarse].

[30] Podemos decir que √2 es racional.

[31] Claro, pero eso sería NO Q, la negación.

[32] Sí, es la negación. Y de ahí partir para llegar a la contradicción y que es por tanto irracional.

[33] Bueno entonces es *NO Q*, pero *P.*

[34-35] Es lo que conocemos // Que es irracional.

[36] Pero no sabemos aún si *[√2*] lo es o no

[37] Bueno le ponemos que tenemos *√2*, es lo que sabemos.

[38] Luego, *NO Q* [silencio] y ya que √2 es racional.

[40] [Leen] Sigue que deducimos …[responden] En base a lo que pusimos que *√2=a/b* con *a* y *b* enteros.

[41] Y *b* diferente de cero.

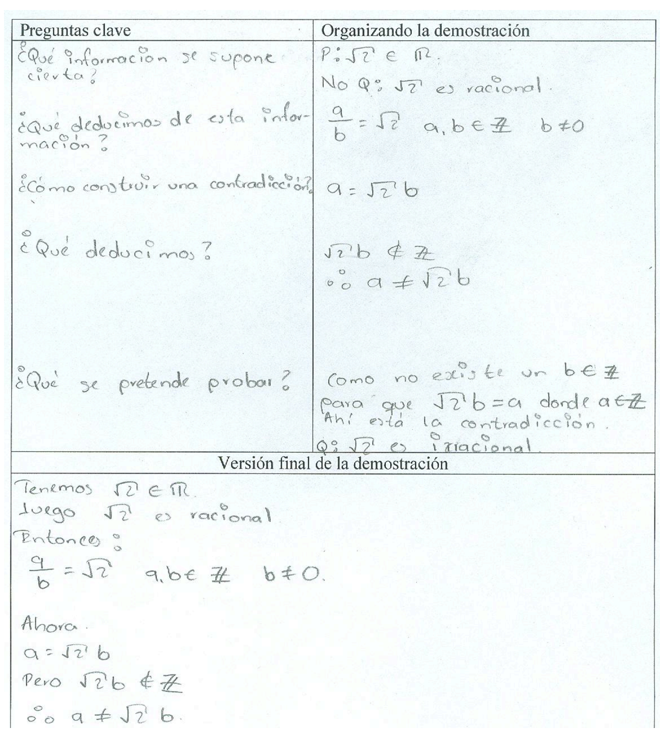
[42] Cómo construir la contradicción [silencio] Pues igual podemos poner … Ay no!

[44] Una de las reglas que puedo aplicar es que *b* lo puedo multiplicar por *√2* y como *√2* es *1.4142* y más decimales, luego pues es decimal y *b* entero, el resultado es decimal o fraccionario cualquiera que fuera *b* y entonces tienes que es igual a *a*, pero *a* es entero.

En la siguiente parte se cuestiona [45] la última *C-acción*, por considerar que al representar *√2* en forma decimal dan por hecho que es irracional y que esto es justo lo que desean probar (más adelante se verá como error al discutirlo con el profesor por ser una aproximación de √2). Para responder un alumno exhibe una *R-acción* al distinguir entre número decimal finito y irracional [46 y 47]. Un rasgo a destacar en la evolución de la interacción es que todos los alumnos participan y, en momentos de desacuerdo, recurren a sus compañeros para ahondar y contrastar diferentes ideas que les permitan tomar decisiones [47]. Varios alumnos expresan de diferentes formas la *C-acción* [49-59] anterior [44] aún cuando se utiliza una aproximación de √2 que hace que la demostración no sea válida.

[45] Pero ahí ya estamos dando pues por hecho que es irracional ¿no?, al decir que es *1* punto y algo.
[46] Pues que es decimal nada más. Yo digo que está bien porque como *a* es entero y no me queda entero ya queda la contradicción.
[47] Tú ¿qué dices de eso? [incluyendo otro compañero]. Es que yo pienso que aquí al decir que es fraccionario ya estamos dando por hecho que es irracional.
[48] [silencio] Es que bueno, no es lo mismo [irracional y fraccionario o decimal], mhh.
[49] Bueno ¿qué deducimos? Ahora sí que *√2* por *b* no está en los enteros y como es igual a *a* ya tampoco estaría en los enteros ¿no?
[50] No, más bien, por lo tanto *a* es diferente de *√2b* pues sí, como no podemos encontrar un entero *b* que cumpla con que *√2b* sea un entero, o sea *a*.
[54] Cómo no existe un entero *b* que al multiplicarlo por *√2.*
[55] Ah sí para que me siga dando un entero.
[56] No existe un *b* que multiplicado por *√2* para que dé *a.*
[57-58] Donde *a* sea entero //[otros estudiantes afirman] Esta es la contradicción.
[59] Sí, para que sea racional y por tanto es irracional.
[64] Entonces *a/b=√2* donde *a* está en los enteros y *b* diferente de cero, ahora *a* es igual a raíz *√2* por *b.*
[65] Pero *√2b* no está en los enteros por lo tanto, [escriben].

En el registro escrito, el grupo escribe la versión condensada de la demostración, cuidando el lenguaje simbólico y verbal, el manejo de las definiciones, la extracción de significado y los argumentos que justifican sus deducciones. Estos son indicadores de **<u>C</u>**-acciones del proceso de demostrar.



Preguntas clave	Organizando la demostración
¿Qué información se supone cierta?	P: $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$. No Q: $\sqrt{2}$ es racional.
¿Qué deducimos de esta información?	$\frac{a}{b} = \sqrt{2}$ $a, b \in \mathbb{Z}$ $b \neq 0$
¿Cómo construir una contradicción?	$a = \sqrt{2}\, b$
¿Qué deducimos?	$\sqrt{2}\, b \notin \mathbb{Z}$ $\therefore a \neq \sqrt{2}\, b$
¿Qué se pretende probar?	Como no existe un $b \in \mathbb{Z}$ para que $\sqrt{2}\, b = a$ donde $a \in \mathbb{Z}$ Ahí está la contradicción. Q: $\sqrt{2}$ es irracional.

Versión final de la demostración

Tenemos $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$.
Luego $\sqrt{2}$ es racional
Entonces:
$\frac{a}{b} = \sqrt{2}$ $a, b \in \mathbb{Z}$ $b \neq 0$.

Ahora.
$a = \sqrt{2}\, b$
Pero $\sqrt{2}\, b \notin \mathbb{Z}$
$\therefore a \neq \sqrt{2}\, b$.

Figura 54. Produción escrita de los estudiantes en versión explicativa y condensada de que la raíz de 2 es un número irracional con algunas inconsistencias.

En la siguiente sesión se retoma este ejercicio en gran grupo. En [230] los estudiantes al suponer que √2 es racional dan muestra del manejo de la definición de número racional (*B-acción*). No obstante, cuando el profesor cuestiona acerca de la construcción de la contradicción [232], a partir de su respuesta, se les hace notar que utilizaron una aproximación de √2 [235] y esto resta validez a su demostración. Propone entonces, abrir otro frente para continuar la demostración al elevar al cuadrado la expresión obtenida en [230]. Es importante destacar que el maestro, aún y cuando marca la pauta del camino a seguir, se integra en la discusión y asume un rol mediador apoyando la construcción de la demostración a través de preguntas que derivan *B-acciones* de los estudiantes [236, 238, 240, 242, 244 y 245]. Finalmente son ellos quienes contruyen, en la *C-acción* [247], la contradicción. Aquí podemos darnos cuenta que un rasgo importante de consolidación en el proceso de demostrar es que se muestra confianza al reconocer el momento en el cuál se da la contradicción.

[230] Alumnos: [Desde suponer que √2 es racional] Que *a/b=√2* con *a*, *b* enteros y *b* diferente de cero.
[231] Profesor: Cómo construimos la contradicción.
[232] As: Pues nosotros despejamos *a* y nos quedó que *a=√2b* pero ningún entero multiplicado. por *√2* nos da un entero [pide esplicación el maestro] A ver, cómo justificaron eso.
[234] As: Pues es que √2 es igual a 1.4142 y así jamás se acaba.
[235] P: Bueno *a* y *b* son enteros y *√2* es *1.41* y algo, sí, pero finalmente no sabemos hasta dónde llega *√2*, no podemos cortar porque sería una aproximación. De hecho podemos plantear una sucesión que converja a *√2*, pero bueno, la idea es que no puedo cortar, ya no sería *√2*. ¿Cuál es la idea? Lo conveniente es pensar en *a/b* como fracción irreducible. ¿Qué quiere decir? Que ya no tienen factores comunes *a* y *b*. Por ejemplo si fuera *2/4* queda ½ y ya es irreducible. Ahora, porque además yo debo probar con esos enteros. Acerca de *√2* no sé todavía nada. Si elevo al cuadrado [*a=√2b*] queda $a^2=2(b^2)$ o sea es igual a *2* por algo, eso ¿qué quiere decir?
[236] As: Que a^2 es par.
[237] P: Bien, entonces a^2 es par, qué significa, ¿*a* cómo es?
[238] As: Es par también porque si fuera impar no me daba a^2 par y antes lo hemos probado.
[239] P: Entonces *a* es de esta forma y si lo pongo aquí que me da.
[240] As: $4k^2 =2b^2$.
[241] P: Para empezar, aquí *a* es par, si divido entre dos.
[242] As: $2k^2=b^2$.
[243] P: Entonces, ¿cómo es *b?*
[244] As: *b* es par, porque b^2 es par.
[245] As: *a* y *b* tienen un factor común. 2 divide a *a* y divide a *b.*
[246] P: Pero dijimos que ...
[247] As: *a/b* era irreducible y ya llegamos [a la contradicción].

La siguiente tarea a la que se enfrentan los estudiantes es probar que *el conjunto de los números primos de la forma 4k+3 es infinito, siendo k un número natural*. Al inicio de la interacción se producen sus primeras *R-acciones* [67, 69 y 71] al identificar hipótesis y conclusión [70]. La negación de *Q* pasa a ser parte de la hipótesis lo que constituye una *B-acción* [72]. Al no poder extraer de manera directa las deducciones a partir de la información *P* y *NO Q* necesitan *R-acciones* [73-76] para representar de manera concreta el conjunto de los primos de la forma *4k+3*. Estas *R-acciones* nos permiten observar las *B-acciones* [77-80] que les permiten clarificar el tipo de conjunto. Estas *B-acciones* muestran que dando valores en la expresión *4k+3* obtienen números primos, pero todos los primos no tienen esa forma. Al tratar de ordenar esos números en sentido creciente se produce la *B-acción* [80 y 81] de identificación de cuál es el primer número primo de esa forma. Como *k* varía en los números naturales, considerando que el 0 no es natural [81-83] comienzan la lista con el 7. Están haciéndose una idea del conjunto que están manejando.

[67] Bueno, tenemos primero el conjunto de los primos sería *P* [la hipótesis]. A ver [Leer].
[69] También tenemos que *k* es un número natural.
[70] Lo que queremos probar es que [el conjunto de primos] los de la forma *4k+3* es infinito, ¿no?
[71] Nada más eso. Tenemos en *P*, el conjunto de primos de esa forma y *K* en naturales.
[72] También podemos poner *NO Q*, // que los
[77] No todos los primos se pueden formar de esta forma, pero algunos sí.
[78] O sea no formas todos los primos, pero sí algunos.
[79] Exacto, una parte. Pero hay que formar los primos que tienen esa forma, ver que es infinito.
[80] Por ejemplo si el 2 fuera de esta forma, lógicamente ya sabemos que no, pero supongamos que sí. Buscamos ahora el siguiente primo que tenga esta forma y seguimos y tenemos que probar que esa lista es infinita, que no se acaba que no tiene fin.

primos de la forma *4k+3* son [un conjunto] finito.
[73] ¿cómo que primos pueden ser?
[74] Sería el *3*, pero ese *4* me hace dudar, pero *k* es desconocido.
[75] Sería de *5* para adelante.
[76] Por ejemplo el *19* si *k* es *4.*
[81] Entonces los primos de esa forma, no podemos poner todos pero tenemos que sacar la lista, ordenar algunos, ¿en cuál empieza? [] En *7* ¿no?
[82] En *7* o ¿sí contamos el cero como [número] natural?
[83] Si queremos sí, pero no, no lo vamos a pensar como [número] natural.

Posteriormente buscan nuevos números que pertenezcan al conjunto [84-88] lo que constituyen *B-acciones*. Van organizando estos ejemplos con la intención de obtener *espacios de ejemplos* (Watson & Mason, 2005), distinguiendo entre los valores de *k*, que son pares, impares, primos. En este fragmento al sentir que no avanzan mucho retornan a una *R-acción* para recordar *NO Q* y su función en la técnica de *reducción al absurdo* [90-95]. También vuelven a retomar la idea de enumerarlos en una lista [96-99], lo que antes fue *B-acción* [80-81], ahora es una *R-acción* porque están recuperando las ideas importantes. Además se dan cuenta de un hecho importante [87], si *k=9* se forma el número 4(9)+3=39 y 39 no es primo, es decir, mientras antes tenían que los números de esta forma producían un subconjunto de números primos (no todos), ahora tienen un contraejemplo (*B-acción*) para *k=9*, esto complica la tarea. Por otro lado intentan ligar la demostración con el ejemplo mostrado por el maestro [100-101].

[84] *4* por *1* más *3* es *7*, con *2* [valor de *k*] es *11,*
[85] Bueno los primeros que saqué, de los pares ya no hay, sólo con *2* y *4* que salen *11* y con el *4*, *19* y de los impares sí salen.
[86] No, pero sí salen más de los pares ¿no?
[87] De impares sí, todos menos con *3*, con *1* son *7*, con *3* no, con *5* son *23*, sí es primo, con *7* es *31* y con *9* son *36* más *3*, *39*, ¡ah no! ya no es primo.
[88] A lo mejor ensayamos sólo con [valores de *k*] primos.
[89] Pues entonces llegamos a que es infinito [el conjunto].
[90] No, pero si llegamos a la contradicción, [NO Q] sería que es finito y por lo tanto sería infinito.
[91] Sí, partimos de finito y la conclusión de todo es que es infinito.
[92] Sería porque los primos son infinitos [pensando en la idea de 88].
[93] Pero cómo infinitos.
[94] Sí, porque aunque sólo tomamos algunos esa lista puede ser infinita también.
[95] Ah sí, aunque sólo tomemos algunos, ya, es que yo quería cortarlos, pero no.
[96] Entonces podemos listar los números empezando el *7, 11, 19, 23* y así puntos y que sigue hasta *n.*
[97] No mejor agrega uno en medio con *4k+3* para que se entienda que son de la forma.
[98] Pero si tienen un *n*.
[99] Pero es lo mismo que si en lugar de *n* ponemos de la forma *4k+3.*
[100] [2 minutos escriben y suspiros] No puede ser similar al otro [ejercicio previo]. Estaba tratando de verlo así, pero no [Silencio 1:30] Cuánto tenemos ya trabajando.

Aunque se han mostrado desesperados al final del fragmento anterior, persisten en la tarea. Eso muestra que están comprometidos e involucrados en la tarea, rasgo que caracteriza el quehacer matemático. Exhiben *R-acciones* al resumir lo que hasta ahora han obtenido para clarificar la tarea [103]: tratar de encontrar similitudes con el ejemplo que explica el profesor para enseñar la técnica [104], descartar los intentos que no prosperaron para integrar *espacios de ejemplos* [105], resumir las características del conjunto estudiado [107 y 109], la manera de proceder en reducción al absurdo [111] y retomar la escritura general de la lista [112 y 113].

[103] Queremos encontrar una contradicción. Necesitamos ver que esta lista, con números de esta forma no puede ser finita.
[110] A ver, *k* es natural [silencio reflexionan].
[111] Este [conjunto], queremos llegar a que es infinito, partiendo desde que es finito y

[104] [silencio] Por ejemplo, aquí te dice que los primos son infinitos y aquí los primos de esta forma *4k+3* es infinito [buscando similitud con el ejercicio anterior].
[105] Pues sí, si vemos con pares e impares no funciona. Ya vimos con algunos pares que no y con impares que tampoco, por ejemplo con *3* no.
[106] Pero con el *4* sí.
[107] No necesariamente se van a formar primos con todos los naturales [para *k*].
[109] Y no necesariamente todos los primos tienen esa forma.
[110] Tienen esa forma a fuerza, tenemos que
[111] Podemos suponer que son finitos y tratar de encontrar una contradicción.
[112] Podemos poner p_1, p_2, … y donde los de esa lista sean primos y además que sean de la forma *4k+3* con *k* en los naturales y el último de la lista sea p_n primo y con la misma forma *4k+3.*
[113] Si son finitos p_n es el último.
[114] Pero igual los [números] naturales no son finitos y *k* es [número] natural y que no cumpla para *k=3* no quiere decir que no cumpla para *k* igual a un millón y más [asienten].

En el siguiente fragmento observamos que una vez escrita la lista finita que se supone concentra todos los números primos de la forma requerida, en una *B-acción* [116-122], expresada de diferentes maneras, intentan "construir" o "buscar" un número que tenga la misma forma y sea primo y que no aparezca en la lista con la finalidad de obtener una contradicción (de manera similar al ejemplo que presenta el profesor al inicio de la clase). Un alumno, exhibe un error [125] al expresar que si se forma un número *n* multiplicando todos los primos de la lista (*B-acción*), ese número puede ser primo o compuesto sin darse cuenta, ni ser cuestionado por sus compañeros puesto que la propia construcción implica que es compuesto. Al resumir toda la información válida hasta el momento se presenta una *R-acción* [127].

[116] Luego podemos poner uno extra//.
[117] Pero si estás suponiendo finito, el *k* del *n* es finito. Es algún número.
[118] Podemos pensar un *m* que sea mayor que *n* y hay que ver que resulte un primo. Por ejemplo, si el último fue *4k+3*, el otro que sea *4(k+1)+3*, pero no sé cómo ponerlo.
[119] A ver, yo estaba pensando en poner una lista como esa, formamos los números de la lista y suponemos finito. Luego ponemos multiplicación de todos los de la lista y le llamamos *P* que sea un número formado por todos los anteriores multiplicados. Suponemos un número *m* mayor que el último.
[120] Supongamos que ya 100 sustituido y ya no me va a dar un primo más, 4 por 100 más 3, 403, no sé.
[121] Y si vemos un número muy grande.
[122] Si multiplico todos los primos y que sea *P*, pero si multiplico *k* por, me debe dar otro número y si tiene esa forma pues sería uno más.
[123] Pero si supones que es finito la contradicción ya nos lleva a que es infinito.
[124] Pensaba si se puede hacer en base a este ejercicio de los primos normales [ejercicio anterior].
[125] Bueno un *n* si multiplico todos tiene dos opciones primo o compuesto.
[126] Cómo modificamos en el anterior.
[127] [Vuelven a leer el enunciado] Los de *4k+3* me dan una parte de este número infinito de primos.

Al no tener éxito en la resolución de la tarea, nuevamente piensan en *B-acciones* encaminadas a explorar en la búsqueda de nuevos números de esa forma, pero ahora "más grandes" [129-133]. En estas acciones encontramos que para probar que 1919 es primo parece bastarles con probar que los primeros números no son divisores [134] y entre los cálculos se aventuran a conjeturar sobre otros hechos, que en ocasiones son refutados de inmediato [135]. En otras ocasiones sus conjeturas son *B-acciones* más involucradas con el curso de la resolución de la tarea, por ejemplo que *k* sea primo [137] pensando en construir *espacios de ejemplos,* pero la igual que con el resto son discutidos [138-145] y refutados [138 y 145] con contraejemplos. El uso de contraejemplos es un rasgo que encontramos en proceso de consolidación en los estudiantes.

[129] Qué tienes, …, *1919*.
[130] Sí [1 minuto de silencio].
[131] Me parece que *1919* es primo.
[137] Fíjense que por lo regular la mayoría que es de la forma *4k+3* para *k* en los naturales, son primos y los primos que te dan para *k* en los naturales también por lo regular si *k*

[132] *1919* entre *4* es *478* y sobran *3*, sí es de la forma.
[133] Sí, a ver entre *3* no, entre *5* no, entre *9* no [inaudible].
[134] *7* no, ya la hicimos [la división], pero además de eso, *7* por *1*, *7* por *2, 7* por *3* y así nunca me va a dar un *9* en el lugar de las unidades.
[135] Claro que sí, el *49* es *7* por *7* [asienten]
es primo te dan un primo.
[138] A ver el *1* [valor de *k*].
[139] No es primo y sí te da primo, *7.*
[140] Por lo regular.
[141] El *3* no, el *5* sí, el *4* sí y te da *19*, *24*, *27.*
[142] El *6* no, el *9* no.
[143] El *43* no es primo [otro estudiante contesta] Sí y es *4* por *10* más *3*.
[145] No, hay impares y pares no sólo primos, si pienso que es infinito pero *k* no tiene que ser primo.

Aunque no han avanzado mucho en la demostración, muestran persistencia y confianza personal y de grupo. Retoman nuevamente la información relevante en forma de *R-acciones* para descartar aquélla información que no ayuda [149]. Siguen construyendo su espacio de ejemplos [150] lo que constituye una nueva *B-acción* y aunque es una conjetura que pueden descartar con varios contraejemplos en el diálogo sólo exhiben a 2 [153] y probablemente [154] si *k=1*, el 9. Deciden dejar la tarea de momento para continuar con otro ejercicio.

[148] Sí es infinito, sí // Pero ¿cómo llegar?
[149] […] pensar en argumentar que es porque *k* es natural y los naturales son infinitos no ayuda.
[150] Todos los primos tienen una combinación de esta forma, como que pueden escribirse como *2k+1*, *3k+2*, *4k+3*, *5k+4* y así sucesivamente y si ponemos en un conjunto todos los primos que se puedan poner en esas formas.
[151] Son finitos.
[152] No, son infinitos, pero cada forma sería un número infinito, aunque algunos puedan representarse en más de una forma.
[153] El *2* no lo puedes hacer con ninguna de esas.
[154] A ver, por ejemplo, que *k* valga 1, [Si *k=1* el caso de *5k+1* es un contraejemplo].
[155] Pero no te va a dar todos los números.

Después de unos minutos (5-7) que dedican al siguiente ejercicio retoman la tarea donde la dejaron mediante *R-acciones* [185-186]. Enseguida muestran una nueva *B-acción* [187] encaminada a construir un *espacio de ejemplos* pensando en para qué valores de *k* se obtienen números primos y se dan cuenta que empezando en 1 y 2 se obtienen para los dos primeros valores de números primos, para el siguiente valor de *k* no se obtiene un número primero, para los siguientes dos valores se obtienen otros primos, para el siguiente no y así sucesivamente*.* Esta conjetura es refutada enseguida [188] lo que es una *B-acción* ya que modifica el curso de la acción y no se avanza en el camino equivocado aunque permite reorientar la estrategia. El profesor ha percibido una gran lucha y se acerca para cuestionarlos [189-191]. La interacción muestra *R-acciones* [191-198] que informan del avance en la demostración. En [202-205] podemos ver que el profesor sugiere un posible camino a sus alumnos, orientándolos a que se fijen en que los primos mayores que 2 son impares y por tanto en la división entre 4 adoptan dos posibles formas: *4k+1* o *4k+3*. Al cuestionar a los alumnos [206] éstos utilizan una *B-acción* [207] derivada de la sugerencia, tienen una lista finita de todos los primos de la forma *4k+3*, por lo que el resto de los primos tendrían la forma *4k+1* y esa información los ayudaría a construir la contradicción requerida.

[185] Alumnos: [Vuelven a leer] Los primos de la forma *4k+3* son infinitos. Supongamos que los números son *n* para que sea finito.
[186] As: Los números son primos y de la forma *4k+3* [silencio 3 minutos].
[187] As: Van siguiendo una secuencia con *1* para *k*, sí es primo [el *7*], con *2* sí, con *3* no, con *4* sí, con
[196] As: El *7, 11, 19, 23.*
[197] P: Por ejemplo es *4(1)+3, 4(2)+3, 4(4)+3, 4(5)+3*.
[198] As: Yo aquí tengo que $A_1, A_2, \dots, A_n$ y quiero ver que hay uno más grande que cumple.
[199] As: Y si lo vemos por inducción [el profesor pide que explique] ¿Cómo?
[201] As: Ver que hay un número más, [duda] pero

5 sí, con *6* no y así con *7* debe ser sí, siempre *2* valores de *k* sí y *1* no, *2* sí y *1* no.
[188] As: No es cierto. Con *8* ya falla, se rompe la secuencia *4* por *8* son *32* más *3*, *35* y no es primo.
[189] P: [se acerca el profesor] ¿Qué pasa?
[190] As: Estamos con el de los primos de la forma *4k+3* que el conjunto es finito.
[191] P: [Revisa] Ahí ya tienen que suponen que es finito el conjunto.
[192] As: Sí, suponemos luego que se pueden numerar.
[193] P: Sí, luego ven que se puede construir uno más grande y que sea primo de esa forma.
[194] As: Sí, pero no encontramos uno exactamente.
[195] P: A ver los podemos numerar $A_1, A_2, \ldots, A_n$ todos son primos y de la forma *4k+3*. Podemos ver primero que números se van generando.
no.
[202] P: A ver una sugerencia. Ustedes saben que el único primo par es el *2*, todos los demás son impares, es decir no son divisibles entre 2 y por tanto no son divisibles entre *4*. Cuándo divido un número entre *4* cuánto me puede sobrar.
[203] As: *0,1,2,3.*
[204] P: Por supuesto que en este caso *4k+0* sería par y no puede ser primo, y *4k+2* también sería par. Así que si tengo un primo o es de la forma *4k+1* o es de la forma *4k+3* sólo tiene esas dos opciones.
[205] As: Sí//.
[206] P: saben además que los primos son infinitos. Entonces hasta aquí son de esta forma, el conjunto que suponemos finito, de la forma *4k+3*. De ahí en adelante ¿cómo tendrían que ser los demás primos?
[207] As: De la forma *4k+1.*
[208] P: A ver, jueguen con esas ideas.

Un alumno repite e integra la aportación del profesor a la tarea [209] y busca su aprobación, lo que constituye una *B-acción*. El profesor les aclara que los números primos tienen una de las dos formas sugeridas, pero no necesariamente un número de esa forma es primo [210]. A diferencia de las primeras sesiones se percibe un cambio sustancial en la interacción del profesor con los estudiantes [212-219], los estudiantes hacen mayores aportaciones a la discusión y producen *R-acciones* que les permiten concentrarse en la información relevante. Este cambio en los alumnos lo podemos atribuir a la confianza que les da el trabajo previo de exploración en la resolución de la tarea y la experiencia obtenida gracias al trabajo sobre la argumentación y la comunicación de ideas con sus pares.

[209] Alumnos: Ahí podemos poner que los primos de la lista son [de la forma] *4k+3*, pero todos los primos pueden ser además de la forma *4k+1* o *4k+3.*
[210] Profesor: No quiere decir que todos los de esta forma [*4k+3*] son primos por ejemplo si *k* es *3, 4* por *3* más *3* es *15* y no es primo. Y tampoco todos los de la forma *4k+1* son primos, por ejemplo si *k* es *5, 4* por *5* más *1* es *21* y no es primo.
[211] As: Más bien los primos caben en estas formas, en una o en otra.
[212] P: Exacto, los números después del *2* que son primos son de una u otra forma, *4k+1* o *4k+3* por ser impares. Ustedes suponen que hay un número finito de *4k+3.*
[213] As: Y los que seguirían tendrían que ser de la forma *4k+1.*
[214] P: Hay que checar que no puede ser.
[215] As: Que están intercalados.
[216] P: No sé si están intercalados, me explico.
[217] As: Por ejemplo, si yo encontrara otro primo de la forma *4k+3*. No estaría trasladando ahora mi problema a encontrar otro primo más grande que ese, para ver que este no fuera el límite superior.
[218] P: Si tu puedes ordenarlos de menor a mayor $A_1, A_2, \ldots, A_n$ y si tu encuentras un primo más grande que sea de la forma *4k+3* ya terminas. Ya tienes la contradicción.
[219] As: Con el supuesto se supone que no hay uno mayor a A_n que sea primo y de la forma *4K+3*, pero entonces todos los que siguen primos serían de la forma *4k+1.*

En este orden de ideas los estudiantes sugieren una *B-acción* en [220] poco transparente, dado que aunque querían extender esta idea [222] el profesor suspendió la interacción. Después de una hora los alumnos buscaron al profesor y le entregaron la tarea resuelta en forma escrita. Estaban tan concentrados en la resolución de la tarea que no pudieron abandonarla, dejándola a un lado.

[220] Alumnos: Sí sumamos 2 al producto de los números que se puedan escribir de la forma *4k+3.*

[221] Profesor: Pero hay que probar que es primo, si sumas 2 y te da de la forma *4k+3* tendrías que verificar que es primo.

[222] As: Por ejemplo…

[223] P: Bueno, ya lo pueden trabajar solos, nos llevó mucho tiempo y ya me tengo que ir […]

Si vinculamos el registro escrito con lo expresado anteriormente [220] podemos comprobar que trabajaron en esa idea y la depuraron. Consideraron que el producto $M=p_1p_2..p_n$ de la lista de números primos de la forma *4k+3*, tenía dos opciones: 1) que *n* fuera par y 2) que *n* fuera impar. En el primer caso el producto *M* sería de la forma *4k+1* y en el segundo de la forma *4k+3*. En el caso 1) se construye *r=M+2* donde *r* tiene la forma *4q+3* dado que *M* tiene la forma *4k+1* y se han agregado 2 unidades. Se procede de la misma forma para el caso 2 y esta información es utilizada por los alumnos para construir la contradicción requerida. Cuando entregan al maestro el registro escrito, discuten su solución y él les recomienda mejorar la presentación escrita. Esta discusión no la tenemos grabada, al igual que no tenemos la última parte que trabajaron los alumnos y es difícil continuar con un análisis más allá de una posible interpretación del escrito que se muestra abajo.

Preguntas clave	Organizando la demostración
¿Qué información se supone cierta?	P: Conjunto de números primos tienen la forma 4n+1 o 4n+3 No Q: Los primos de la forma 4n+3 son finitos
¿Qué deducimos de esta información?	$p_1, p_2, \ldots, p_n$ de la forma 4n+3 $m = p_1, p_2, \ldots, p_n$ 4q+1 para n par $m = p_1, p_2, \ldots, p_n$ 4k+3 " " impar
¿Cómo construir una contradicción?	r = m+2 n par r = 4q+3 r = m+4 n impar r = ~~4q~~+3 ∃ p = 4k+3 tal q p|r r es impar ∴ p es impar si todos los p divisores de r son de la forma 4k+1 entonces r también lo sera y esto contradice. ∴ ∃ p = 4k+3 tal que p_j $1 \leq j \leq n$ → $p_j\|r$ y $p_j\|m$ $p_j\|r-m$ $p_j\|2$ o $p_j\|4$ y esto contradice

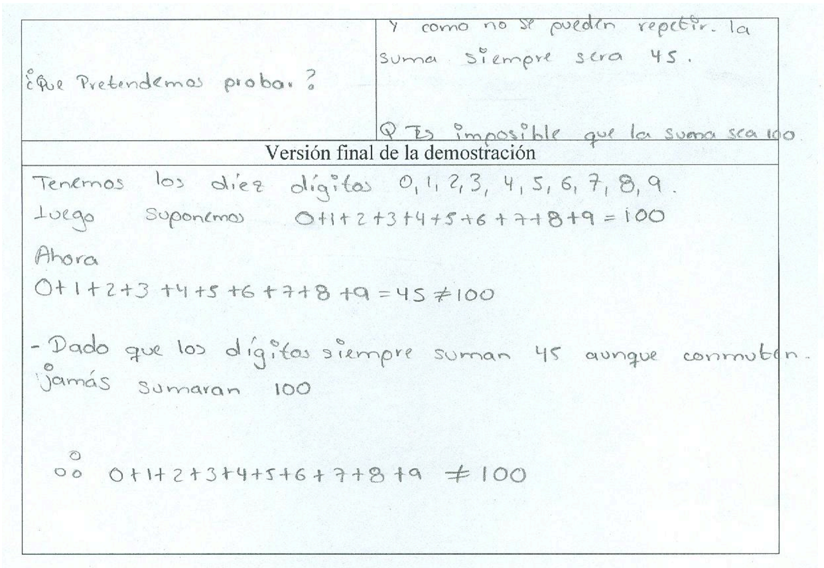
Versión final de la demostración
Suponemos un número finito de primos de la forma 4n+3, la multiplicación de los primos más 2 para un número de primos par es igual a 4k+3, y la multiplicación de los primos mas cuatro para un número de primos impar es igual a 4k+3, Existe un primo (p) que divide a r, si todos los primos tienen la forma 4k+1 entonces r también la tendría y esto no es cierto ∴ p tiene la forma 4k+3, y este no puede estar dentro de $p_1, p_2, \ldots, p_n$ pues tendría que dividir a 2 y a cuatro ∴ tendría que ser el dos ~~..~~ y este no tiene la forma 4k mas tres ∴ los primos de la forma 4k+3 son infinitos.

Figura 55. Demostración de los estudiantes por reducción al absurdo de que los primos de la forma 4k+3 son infinitos.

En el momento que suspenden su trabajo, a mitad de solución (20 minutos de trabajo) de la tarea anterior por considerar que no están avanzando, pasan a la tarea de desafío, que se plantea como un recurso para que los estudiantes que terminan antes de lo esperado puedan realizar una tarea opcional más. Esta tarea les lleva entre 5 y 7 minutos dado que es una tarea mucho más sencilla que las anteriores al involucrar conjuntos finitos de números [184]. La proposición a demostrar es: *Es imposible escribir números, utilizando cada uno de los diez dígitos una sola vez y de modo que su suma sea 100.*

Las primeras *R-acciones* sirven para reconocer la hipótesis o información disponible [157, 159], la conclusión [156 y 176] y la extracción de significado de la información [160, 161]. Como veremos más adelante, los estudiantes han interpretado de manera errónea la información. Están considerando números de 10 cifras (todas las posibles combinaciones) en los cuales aparecen los dígitos del 0 al 9 una sóla vez. A partir de este reconocimiento erróneo, se producen algunas *B-acciones* sobre sus deducciones [162-164 y 169] en las que se aplica la propiedad conmutativa. Muestran flexibilidad de pensamiento [165] mediante una *B-acción* vinculada al proceso retroceder «la única forma de darte 100 sería …» y como consecuencia [167 y 168] *B-acciones* para extender la comprensión de sus compañeros. Otra *B-acción* identificada se produce cuando formulan la negación de *Q* [180]. Por último [181 y 182] encuentran la contradicción y eso les da paso a concluir que con eso es suficiente para la demostración demandada lo que constituye la *C-acción* final. Es importante destacar que el enunciado de la proposición no aparece en la forma convencional *Si P entonces Q*, y en este caso no se dan cuenta que los números pueden ser de cualquier número de cifras, siempre y cuando entre todos ellos sólo aparezca una vez cada dígito del 0 al 9. Esto los lleva a probar una proposición distinta de la solicitada.

[156] Ahí tenemos que ver que para cada uno [de los números con las condiciones dadas] es imposible.
[157] Tenemos que usar cada uno de los *10* dígitos.
[158] Sí es imposible.
[159] En *P* [la hipótesis] ponemos que son *10* dígitos.
[160] Podemos poner que se forman un total de no sé cuántos números pero que siempre aparecen los dígitos del *0* al *9*.
[161] Es que vas a hacer todas las combinaciones por ejemplo uno sería *1234567890.*
[162] […]la suma siempre va a ser la misma porque los dígitos cambian de lugar pero no de valor.
[163] Bueno *P* es eso, luego P_1 [la primera deducción] que no cambia la suma.
[164] Luego por la propiedad de la suma *0+1+2+..+9.*
[165]La única forma de darte *100* es que los *10* lugares de los dígitos fueran *10* y eso no es posible.
[166] No entiendo.
[167] Es que la suma de todos los dígitos debe dar *100*.
[168] Vas a tener un número pero grande de *10* dígitos el que quieras sin repetirlos pero su suma no te va a dar *100*.
[169] [Leen nuevamente] Bueno la suma siempre será igual por la propiedad conmutativa.
[170] Pero no distinta, siempre igual.
[171] A ver dice que es imposible.
[172] Cómo construir una contradicción.
[173] Pongo los dígitos en alguna posición, dado que los dígitos siempre serán los mismos sin que importe su posición.
[174] Ahora justifica con la propiedad conmutativa de la suma y como no se pueden repetir los dígitos.
[175] Ahora sí, que se pretende probar.
[176] Es imposible que la suma sea *100*, eso es *Q*
[177] Aquí falta algo, la suma siempre será *45.*
[178] Esta era más fácil, a ver la [versión] condensada.
[180] Primero sean *0,1,…,9,* luego suponer que su suma es *100*.
[181] Ahora hago la suma *0+1+..+9* y me da *45* distinto de *100*.
[182] Dado que los dígitos siempre suman *45* aunque se conmuten, ya jamás puede ser, y por lo tanto *Q*. que es imposible que la suma sea *100.*
[184] Este es fácil porque es de números finitos, pero el otro.



¿Que Pretendemos probar?	Y como no se pueden repetir. la suma siempre sera 45. Q Es imposible que la suma sea 100.

Versión final de la demostración

Tenemos los diez dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
Luego Suponemos $0+1+2+3+4+5+6+7+8+9=100$
Ahora
$0+1+2+3+4+5+6+7+8+9=45\neq 100$
- Dado que los dígitos siempre suman 45 aunque conmuten. Jamás sumaran 100

$\therefore\ 0+1+2+3+4+5+6+7+8+9 \neq 100$

En la figura 56 que aparece abajo se presenta la producción escrita de los estudiantes desglosada por pasos y en su versión codensada, bien organizada y con claridad al comunicar sus ideas, aún cuando no han interpretado bien la proposición.

Figura 56. Producción de los estudiantes intentando probar desde la interpretación errónea de la proposición.

En la siguiente clase el profesor retoma la demostración que presentan en forma escrita para analizarla en grupo. En este primer fragmento de la interacción se aclara el malentendido en la proposición. Dado que los alumnos habían presupuesto que tenían que considerar un solo número con 10 cifras y con los dígitos del 0 al 9 una sola vez, en [250] el profesor presenta un ejemplo que involucra dos números, [253]. Los alumnos muestran acciones de reconocimiento de las diferencias en la interpretación de la tarea, dándose cuenta que ni aún con la nueva interpretación la suma resulta 100 y que también es posible escribir más de un número. El maestro [253] replantea la situación y los alumnos en *R-acciones* [254 y 255] identifican hipótesis, negación de la conclusión [255] y de manera implícita la conclusión misma. Reconocen [257] que deben avanzar desde la hipótesis y *NO Q* para construir la contradicción. El maestro considera importante verificar que la interpretación de la tarea es adecuada y para ello les solicita ejemplos [258]. Ellos muestran *B-acciones* [259-264] para construir ejemplos encaminadas a comprender la naturaleza de los números y a la negación de la conclusión.

[250] Profesor: […] parece que hay una confusión […] Por supuesto que si yo escribo un número con los dígitos del *0* al *9* escritos una sola vez, su suma no me da *100.* Pero a ver el ejercicio es: la suma de números escritos con los dígitos una sola vez [escribe dos números] cuál es la suma.

[251] Alumnos: Tampoco da [*100* su suma].

[252] As: Entonces, sí podemos escribir así.

[253] P: Pueden escribirlos así [2 números] pero que los dígitos aparezcan una sola vez. A ver, cuál sería la forma de replantear esta situación? Qué conocemos.

[254] As: Conjunto de dígitos *0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9*.

[255] As: Que la suma de ellos es igual a *100*, eso sería la negación [*NO Q*].

[256] P: Cómo construir la contradicción.

[257] As: Pensar en varios números y su suma que sea igual a *100*.

[258] P: Tengo varios números, no sé cuántos que su suma sea igual a *100* y además que entre todos contengan nada más a un dígito una sola vez. A ver qué números pondría.

[259] As: O sea que $a_1a_2\ldots a_k$ solamente debe tener un dígito una sola vez.

[260] P: O sea puede tener *1* o *2* o más números, pero sí lo tienes el dígito aquí en un número ya no puedes ponerlo en otro número.

[261] As: Sí, […] si tienes *13* ya no puedes poner por ejemplo el *34* en otro número [sumando].

[262] P: A ver $a_1a_2\ldots a_k$.

[263] As: Pero si es así, sí se puede que la suma sea más de *100*.

[264] As: Sí, mayor puede, pero hemos supuesto que es igual a *100* [debemos probar que es imposible que su suma sea *100* y entonces su negación es que su suma sea *100*].

En el siguiente fragmento se realizan deducciones a partir de la hipótesis, (e.g. 1245, 736 y 89), y la información derivada de la negación de la conclusión. Para la primera deducción el profesor pide a los alumnos que analicen las cifras de las unidades y piensen en qué se requiere en esta posición para que la suma sea 100. Ellos deducen con *B-acciones* [266] que la suma de los dígitos de las unidades debería darles múltiplos de 10 o 20. Proponen ejemplos de dígitos que pudieran aparecer en la posición de las unidades [269-272] lo que constituye una *B-acción*. Al explorar con *B-acciones* en uno de los casos descubren que no es posible tener números de 3 cifras [274-277] y consideran números de dos dígitos [278] con lo que se da otra *B-acción* al abordar las posibilidades de la suma de las cifras de las decenas [280]. También dan un ejemplo extremo del único posible caso de más de dos cifras, un número con todos los dígitos y su suma sería él mismo [283 *B-acción*] y mayor que 100.

[265] Profesor: Sí, que sea *100* [la suma], ¿qué implicará? Por ejemplo fijémonos en las cifras de las unidades, ¿qué necesitaría para que fuera *100?*
[266] Alumnos: Que las unidades me den un múltiplo de *10* [otro estudiante comenta] Más bien *10* o *20.*
[268] P: ¿Cuál sería por ejemplo?
[269-272] As: *1* y *9*, *8* y *2//*. El *5*, *2* y *3//*. El *7*, *2* y *1//*. El *1*, *4*, *2* y *3*.
[273] P: Por ejemplo, un caso, el *9* y *1*, ¿qué pasa? Los demás tendrían posibilidades. Si fueran *2* números, me faltaría acomodar 8 dígitos. También si fueran 3 dígitos la última cifra del tercero sería 0.
[274] As: Y me faltarían 7 dígitos de acomodar [2,3,4,5,6,7,8].
[275] P: Entonces al menos en uno de esos tres números habría 3 lugares para acomodar dígitos
[276] As: Sí.
[277] P: Y ya la suma es mayor que *100* y entonces eso pasa con los de más de tres cifras.
[278] As: Con el que se puede hacer eso es que todos fueran de dos cifras, no sé cómo explicarlo. Bueno, por ejemplo *5* números, poner 0, 1, 2, 3, 4.
[279] P: ¿En las cifras de las unidades?
[280] As: Sí, y luego ya nada más faltaría acomodar del *5, 6, 7, 8, 9.* Luego en las decenas necesitamos tener *9* [al sumar las unidades fueron *10*, por lo tanto se acumula *1* en las decenas] y ya no
[281] P: Sí, bien. A ver. Sí, lo mejor es tener números de dos dígitos, porque ya sabemos que si uno es de tres cifras ya tronó. Bueno ya lo pueden trabajar. Lo que me importa es que entiendan que la idea básica de reducción al absurdo es suponer que la suma es *100* acompañado de la hipótesis. Si exploro las posibilidades y llegamos a una contradicción entonces ya probamos la proposición.
[283] As: Bueno si pensamos en un número de todos los dígitos no sería su suma *100,* ya sería más
[284] As: Ahora si fueran números de dos dígitos.
[285] P: Bueno, ya se entiende la idea de reducción al absurdo y pueden seguir ya ustedes.

Finalmente el maestro detiene el curso de la discusión para pasar a la siguiente hoja de trabajo, expresando que lo importante es que comprendan el método y sigan trabajando después en la demostración de la proposición. Como ya estaban en los últimos 2 días de clase no pudimos recuperar evidencia del trabajo de los estudiantes sobre esto.

4.6.2 Hoja de trabajo # 10: Contrapositivo

En esta hoja de trabajo el profesor decide conducir la sesión y no dar lugar a la interacción en equipo, dado que dedicó mucho tiempo a la revisión de las debilidades encontradas en la sesión anterior en la que se trabajó el método de reducción al absurdo. Esta revisión la consideró importante por la relación con el método del contrapositivo de esta hoja de trabajo.
El objetivo era introducir el método del contrapositivo a partir del método directo de avance retroceso y el de reducción al absurdo. Además de establecer la conexión con su correspondiente tabla de verdad para comprender la equivalencia lógica de *NO Q entonces NO P* con *si P entonces Q* y utilizar este hecho para demostrar proposiciones de la forma *si P entonces Q*. Finalmente se esperaba tener tiempo para comparar los tres métodos vistos hasta el momento y distinguir las

diferencias entre ellos. Esto es complicado, dado que el método del **contrapositivo** es similar al de reducción al absurdo; se empieza suponiendo que *P* y *NO Q* son verdaderos, pero a diferencia del método de reducción al absurdo, únicamente se aplica el proceso de avance a *NO Q*. El objetivo aquí es llegar a que P es falso (es decir a *NO P*).

El método puede verse como de contradicción pasiva, en el sentido de que suponer *P* verdadero proporciona pasivamente la contradicción. Una ventaja del método del contrapositivo a diferencia del de reducción al absurdo es que ya sabemos de antemano a qué contradicción llegar (*P* y *NO P*).

El profesor explica el método del contrapositivo utilizando como ejemplo la proposición: *Sean a y b enteros con a≠0. Si a no divide a b, entonces* $ax^2+bx+b-a$ *no tiene una raíz entera positiva.*

Primero les hace preguntas para que reconozcan (*R-acciones*) los elementos principales de la proposición y los que intervienen en el método de contrapositivo. Primero reconocen [2] la equivalencia de *P implica Q* con *NO Q implica NO P*, y mediante *B-acciones* construyen *NO Q* [4] y *NO P* [6]. Finalmente el maestro explica las deducciones y termina la demostración, sin que participen los estudiantes.

[1] Profesor: Pasamos a la hoja *10*, el método del contrapositivo. Ya habíamos hablado en una sesión anterior, sobre proposiciones y tablas de verdad, que ésta [*P implica Q*] es equivalente a *NO Q …*

[2] Alumnos: Implica *NO P.*

[3] P: Bueno, por ejemplo [lee]. Sean *a* y *b* enteros con *a≠0*. Si *a* no divide a *b,* entonces $ax^2+bx+b-a$ no tiene una raíz entera positiva. Para probarla, empezamos con *NO Q* y queremos llegar a *NO P*. Entonces *NO Q* es…

[4] As: Que $ax^2+bx+b-a$ tiene una raíz entera positiva.

[5] P: Bien, queremos llegar a NO P. A dónde …

[6] As: Que *a* divide a *b.*

[7] P: Sí, entonces que deducimos de NO Q. Que si resolvemos esa ecuación con la fórmula de ecuaciones de segundo grado llegamos a que *x=1-b/a* y x se supone que es positivo, porque tiene una raíz entera positiva. Descartamos a *-1*, que es negativo y x es una raíz entera positiva y *entonces b=(1-x)a*, este es un entero, entonces *[1-x]* esto es un entero y b es producto de enteros, entonces ya a divide a b. Y ya, partimos de *NO Q* y *P* y llegamos a *NO P* entonces *P* implica *Q*.

Luego les entrega la hoja de trabajo que ya trae la explicación de la tabla 57.

Tabla 57. Demostración de: *Sean a y b enteros con a≠0. Si a no divide a b, entonces* $ax^2+bx+b-a$ ***no tiene una raíz entera positiva***

Preguntas clave	Organizando la demostración
¿Qué información se supone cierta?	***P:*** ***No Q***: Suponemos que *x>0* es un entero que cumple con $ax^2+bx+b-a$
¿Qué deducimos de *NO Q*?	Si aplicamos a la ecuación la fórmula general para resolver ecuaciones de segundo grado, se tiene que $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ab + 4a)}}{2a}$ y simplificando obtenemos *x=[-b±(b-2a)]/2a* y las soluciones son *x=-1* y *x=1-b/a*
¿Cómo ligamos el avance y retroceso?	Como *x>0,* descartamos a *-1* y debe tenerse que *x=1-b/a*
¿Cómo encontrar el número *c*?	Luego *b=(1-x)a*
¿Cómo se prueba que un número divide a otro?	Un número *a* divide a *b* si existe un número *c* tal que *b=ca*
¿ A dónde se desea llegar?	***No P***: *a* divide a *b (a│b).*
¿Qué se demostró?	Como no es posible *P* y *No P* entonces $ax^2+bx+b-a$ no tiene una raíz entera positiva. O bien como se verifica que *si No Q, entonces No P*, se verifica también que *si P entonces Q.*

También pueden ver la versión condensada de la demostración:

Supongamos que $x>0$ es un entero con $ax^2+bx+b-a=0$. Luego se tiene que $x=[-b\pm(b-2a)]/2a$ y como $x>0$, debe tenerse que $x=1-b/a$, así $b=(1-x)a$ y por lo tanto a divide a b .

A continuación se les plantea a los alumnos la siguiente proposición a demostrar utilizando el método del contrapositivo: *Sea n un número entero. Demostrar que si n^3 es par, entonces n es par*. En [9 y 10] se aprecian *R-acciones* de la negación de la conclusión y de la negación de la hipótesis que es a donde se pretende llegar (para obtener la contradicción *P* y *NO P*). El profesor toma el rol de mediador para recuperar las *B-acciones* de los estudiantes en forma de deducciones [12] y [16]. Al no dar tiempo a que los estudiantes lo visualicen y dejar que sean ellos quienes verbalicen, el profesor es quien concreta la *C-acción* de construcción en [17]. Entre los alumnos se genera confusión [18] y es otro estudiante quien aclara.

[8] Profesor: […] ¿Cuál es *NO Q*?
[9] Alumnos: Ah ya! Sería: *n* es impar.
[10] As: Y llegar a que n^3 es impar [*NO P*].
[11] P: Si *n* es impar, qué forma tiene.
[12] As: *n* es *2k+1.*
[13] P: Y que quiero probar [contestan un estudiante] Que *2k+1*, al cubo es impar.
[15] P: Entonces esto [*2k+1*] al cubo es lo mismo que [realiza cálculos en el pizarrón y llega a $(2k+1)^3= 2(4k^3+6k^2+2k)+1]$.
Pero esto que me queda es dos por algo entero más *1*, qué sucede ¬.
[16] As: Es impar.
[17] P: Entonces si n^3 es par y *n* es impar [*NO Q*] llegamos a que n^3 es impar [*NO P*] y por tanto se cumple que si n^3 es par entonces *n* es par.
[18] As: … pero entonces, sí llegamos a que era impar.
[19] As: Sí es que se construye una contradicción [*P* y *NO P*] y finalmente lo cierto es *Q*, que *n* es par sí se cumple *P* que n^3 es par.

Da unos cuantos minutos para que los alumnos escriban su registro escrito en el que se pueden observar algunas inconsistencias: mezcla de diferentes métodos (inducción y contrapositivo), deducciones erróneas, hechos mal argumentados, falta de claridad acerca de lo que se probó así como de la contradicción encontrada. Esto es un ejemplo de la importancia que tiene el tiempo dedicado por los alumnos a la interacción entre ellos ya que les permite exhibir los hechos que no entienden, construir ejemplos, exponer explicaciones y presentar argumentos para convencer a sus compañeros. También creemos que son ellos quienes deben reconocer en qué momento han llegado a la *C-acción* de construcción y ser capaces de verbalizarlo. En apariencia la interacción entre el maestro y los estudiantes deja ver que son capaces de realizar deducciones (*B-acciones*) pero que no han tenido suficientemente tiempo para trabajar por sí mismos sobre la tarea en cuestión y poder aplicar e interiorizar el método del contrapositivo.

Tabla 58. Registro de respuesta del equipo participante: *Sea n un número entero. Demostrar que si n^3 es par, entonces n es par*.

Preguntas clave	Organizando la demostración
¿Qué información se supone cierta?	***P**: $n\in Z$ n^3 es par*
	No Q: entonces n es impar
*¿Qué deducimos de **No Q**?*	$n^3=n.n.n$
	La multiplicación de impares es igual a un impar.
	Demostración por inducción matemática
	n=1; 1.1=1
	Supongamos que $n=k\Rightarrow k.k$=impar; k^2=impar
	n=k+2
	$(k+2)(k+2)=k^2+4k+4$=impar porque k^2 impar y 4k+4 par
¿A dónde se desea llegar?	*$\therefore$ n.n.n=impar; n^3=impar*
¿Qué se demostró?	*$\therefore$ si n^3 es par n tiene que ser par.*
Versión final de la demostración	

n^3=*n.n.n* donde n^3 es par y *n* es impar. Ahora *n.n.n=impar* entonces *n.n.n* no es par $\therefore n^3$ no es par. Lo que nos lleva a que n^3 es par si y sólo sí *n* es par.

En la siguiente tarea, se les pide: *Demostrar que, de acuerdo a las reglas del ajedrez un peón se mueve, a lo más, 6 veces.*

En la interacción en grupo, encontramos menos intervenciones del profesor y esto da mayor oportunidad de interacción estudiante-estudiante y de ellos con la tarea. La naturaleza de la tarea además es más cercana a algo que puedan imaginar. Eso se refleja en su forma de organizar las ideas de forma escrita. Algunas *R-acciones* son inducidas por el maestro como la comprensión de la hipótesis, *x* es peón [21], la verbalización del conocimiento de la posición en que deben estar los peones y [27] su tipo de movimiento, el reconocimiento de quién es *Q* [23], *NO Q* [25] y que deben probar es que *x* no es peón [*NO P*] [26].

Al mismo tiempo se suceden *B-acciones* [27] anticipando un ejemplo, lo que les lleva a deducir que no se movería hacia adelante como peón, y deducen que tendría que moverse hacia los lados o retroceder [28]. Revisan el significado de *NO Q*, es decir no es seis veces, sino más de 6 veces [29]. Deciden mover su peón a la primera fila [30] y explorar ese caso, pero un estudiante considera que es independiente de su posición [31], que lo relevante es que más de seis movimientos implican violar la regla de movimientos permitidos y el profesor sugieren que si estuviera en la primera fila no sería peón [32].

Como acciones de construcción (*C-acciones*) [33 y 34] son los estudiantes quienes verbalizan que para cumplir con *NO Q* se tienen que realizar movimientos que el peón no puede hacer y por lo tanto han llegado a *NO P*.

[20] Profesor: […] A ver, dibujamos un tablero ¿Cuál sería *NO Q*? ¿Dónde están los peones?

[21] Alumnos: En la segunda fila.

[22] P: Quién es *P*: *x* es peón, y ¿*Q*?

[23] As: *x* se mueve a lo más seis veces.

[24] P: Qué más. Con el método de la contrapositiva.

[25] As: *NO Q*: *x* se mueve más de seis veces.

[26] As: Y buscamos llegar a que *x* no es peón [*NO P*].

[27] As: Por ejemplo, si ponemos a *x* en la segunda fila y lo movemos más de seis veces, entonces no se mueve recto [hacia delante] como peón.

[28] As: Tiene que retroceder o moverse hacia los lados y ya no sería peón.

[29] As: Pero ah! Sería más de *6* veces [como lo piensan sobre la 2da fila y de avance son 6 más].

[30] As: Entonces que *x* esté en la primera fila.

[31] As: Creo que es independiente de la posición en la que se encuentre más bien si se mueve más de seis veces quiere decir que tuvo que retroceder o avanzar hacia los lados.

[32] P: O pudo haber avanzado 2 o si avanzó en línea recta tenía que estar en la primera fila. Si nunca retrocedía ni se movía a los lados tuvo que estar en la primera fila, pero en la primera fila no hay peones. Si se movió más de seis veces pero no fue en línea recta tuvo que haber estado …

[33] As: … en cualquier fila menos en la primera, pero tuvo que moverse a los lados y retroceder.

[34] As: Y la única pieza que no hace eso es el peón.

La tabla 59 muestra que se acercan más que en la tarea anterior a la comprensión del método.

Tabla 59. Respuesta a demostrar que, de acuerdo a las reglas del ajedrez un peón se mueve, a lo más, 6 veces.

Preguntas clave	Organizando la demostración
¿Qué información se supone cierta? *¿Qué deducimos de* ***No Q****?* *¿A dónde llegamos?*	***P:*** ***No Q****: Un peón puede moverse más de 6 veces.* *-Un tablero está formado por 8 filas y el peón se encuentra en la 2ª fila y sólo tiene 6 filas para moverse. Para que se mueva más de 6 veces el peón tiene que retroceder o moverse a los lados.*

¿Qué se demostró?	*-Lo anterior está en contra de las reglas del ajedrez.* *∴ El peón sólo se puede mover hasta 6 veces.*
Versión final de la demostración	
Si un peón se mueve más de 6 veces tendría que retroceder o moverse a los lados, pero como un peón sólo puede avanzar hacia el frente entonces lo anterior no es válido ∴ un peón puede moverse como máximo 6 veces.	

La última tarea es la de desafío, en la cual se pide: *Demostrar que si c es un número impar, la ecuación* $n^2+n-c=0$ *no tiene solución entera*.

El desarrollo de la demostración de esta proposición lo guía el profesor. Empieza solicitando *R-acciones* para extraer a partir del enunciado de la proposición cuáles son la hipótesis [37] y la conclusión [38]. Mediante *B-acciones* los estudiantes forman las negaciones [40 y 41] tanto de *Q* como de *P*. El profesor les guía para que se fijen en que la solución *n* puede ser par o impar y con ello los alumnos emprenden *B-acciones* [43 y 44] para deducir y argumentar que en cualquiera de los casos $n^2+n=c$ es par, es decir, han llegado a *NO P* y concluyen mediante una *C-acción* que la proposición se ha probado [46] .

[36] Profesor: [lee la proposición] La *P* viene siendo.
[37] Alumnos: *c* es impar.
[38] As: *Q* es: la ecuación $n^2+n-c=0$ no tiene solución entera.
[39] P: *NO Q*.
[40] As: Tiene solución entera.
[41] As: *NO P*: *c* es par.
[42] P: Si tiene solución entera quiere decir *n* es entero. Tiene dos posibilidades ser par o impar y si sustituimos aquí.
[43] As: [Siguen y anticipan al profesor] Par al cuadrado, par, más par, par.
[44] As: Impar al cuadrado impar, más impar, par.
[45] P: En ambos casos *c* siempre es par.
[46] As: Y luego decimos como *c* es impar entonces la ecuación $n^2+n-c=0$ no tiene solución entera.
[46] P: A veces es más fácil el método de la contrapositiva. Cuando directamente no puedan probar, cambian a ver si es más fácil con método de contrapositiva o bien con reducción al absurdo.

El profesor solicita a los estudiantes que realicen un registro escrito de la demostración organizándola primero desglosada y después en versión condensada. A pesar de la interacción anterior se perciben ciertos errores como que *NO Q* lo expresan como *P* implica *NO Q*; que se desea llegar a que *c* es impar, es decir a *P* y en realidad se desea llegar a *NO P* (*c* par y de hecho llegan a esto en un paso previo). Esto nos confirma que necesitan más tiempo para interactuar primero entre ellos, para verbalizar las ideas y que al tratar de explicarlas y argumentarlas con sus compañeros se vayan depurando.

Tabla 60. Registro escrito de los estudiantes a: *Demostrar que si c es un número impar, la ecuación $n^2+n-c=0$ no tiene solución entera*.

Preguntas clave	Organizando la demostración
¿Qué información se supone cierta?	*No Q: c es impar entonces $n^2+n-c=0$ tiene solución entera.*
¿Qué deducimos de No Q?	*$n=2k \Rightarrow 4k^2+2k-c=0$ o $n=2k+1 \Rightarrow 4k^2+6k+2=c$;* *$4k^2+2k$ par ∴ c es par; $4k^2+6k+2$ par ∴c es par*
¿A dónde se desea llegar?	*c es impar*
¿Qué se demostró?	*c impar no tiene solución entera.*
Versión final de la demostración	
Si n es par entonces $c=4k^2+2k$ y si n es impar entonces $c=4k^2+6k+2$ y en ambos casos c es par, para que la solución sea entera. Pero c tiene que ser impar, entonces lo anterior no es cierto. ∴ $n^2+n-c=0$ no tiene solución entera para c impar.	

Capítulo 5. Confrontación y conclusiones

En este capítulo, siguiendo la Ingeniería Didáctica (ID) como metodología de investigación, presentaremos la confrontación del análisis a priori de las secuencias didácticas con el análisis de la puesta en práctica (análisis a posteriori) de la propia ingeniería como diseño derivado de las necesidades detectadas en el estudio exploratorio. También, se presentarán aspectos longitudinales que consideramos han sido cruciales en esta ingeniería para desarrollar competencias demostrativas en los estudiantes.
Se concluye este capítulo y este trabajo, presentando una valoración y reflexión finales acerca de la investigación realizada. Se hace un balance sobre el grado de alcance de los objetivos propuestos, remarcando algunos de nuestros resultados. Posteriormente, se realiza una evaluación global sobre nuestra propuesta de enseñanza y la viabilidad de su implementación en la enseñanza inicial Universitaria en carreras de matemáticas y áreas afines. Sigue una clasificación de las dificultades, obstáculos y errores que se han identificado en el análisis de datos, mostrando la resistencia de algunos de éstos. Finaliza el capítulo con algunas cuestiones que nuestra investigación plantea y que se pueden constituir en líneas de investigación futuras.

5.1 Confrontación del análisis a priori y a posteriori

En el estudio exploratorio hemos encontrado que durante el programa de estudios de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas de la UJED, no se han establecido momentos específicos en los que se aborde la demostración matemática como objeto principal de estudio y elemento clave para el estudio de la matemática. Más aún, en los niveles de formación previos tampoco se aborda el aparato lógico y lingüístico necesario para dotar a los estudiantes de los conocimientos necesarios para iniciarse en la demostración. En el mismo estudio, se detectaron dificultades que fueron tomadas como directrices para el diseño de la ID propuesta en este trabajo (ver capítulo II), con el propósito de impulsar el desarrollo de competencias demostrativas que respondieran a las exigencias del contexto y a la construcción del conocimiento base necesario. Posteriormente, el diseño resultante fue probado y siguiendo la ID como metodología de investigación, se presenta una confrontación del análisis *a priori* y del análisis *a posteriori* y, es en esta confrontación, que se fundamenta en esencia la validación de las hipótesis formuladas en esta investigación. Dicha validación se retoma, complementa y da sustento a las conclusiones vertidas en este capítulo.

Para la confrontación, revisaremos si se cumplieron los objetivos, si fueron adecuadas y respetadas las dimensiones matemática y didáctica y la mediación en cada bloque y sus sesiones. Finalmente, se presentarán ejemplos concretos para documentar la trayectoria seguida y el avance logrado o las limitaciones encontradas.

5.1.1 Confrontación del Bloque I. Definiciones como objeto de estudio

En el primer bloque se pretendía establecer las diferencias de trabajo en el manejo de los objetos matemáticos, mientras que en matemáticas elementales, los objetos se describen; en matemáticas avanzadas, los objetos se definen. Para ello, se implementaron dos sesiones diseñadas, respetando en la primera parte de cada sesión el trabajo en equipos mediado por las hojas de trabajo y en la segunda parte la socialización y discusión de producciones en grupo mediados por el profesor. Veamos enseguida la confrontación a priori y a posteriori por sesión.

5.1.1.1 Sesión 1

Esta sesión, en el diseño de la Ingeniería fue considerada como sesión 1, aunque fueron invertidas las sesiones 1 y 2 dado que, para el profesor la sesión 1 era "demasiado simple" para estudiantes de nuevo ingreso a una licenciatura. No obstante, después de implementar la primera parte de la sesión 2, se convenció de que la definición es crucial en la construcción de conocimiento matemático y que los estudiantes no tienen un manejo apropiado de ellas. En esta sesión, a partir de un objeto o concepto conocido, los estudiantes discuten en equipos para negociar una definición aceptada por ellos y posteriormente la comparten en gran grupo.

A priori

En esta parte, se esperaba conducir a los estudiantes a la reflexión sobre objetos o conceptos matemáticos conocidos tales como: número par, impar, primo, subconjunto, cuadrilátero, triángulo isósceles, ortocentro con la intención de reconstruir una definición negociada y posteriormente desde una definición dada (de número feliz) que los estudiantes en el equipo exhibieran ejemplos de objetos que correspondieran con tal definición. Los estudiantes en la primera parte, generarían definiciones compartidas por el equipo logradas a partir de sus conocimientos y experiencias previas; y, en la segunda, diferentes ejemplos compartidos por el equipo, que correspondieran con la definición formal dada. Posteriormente, el conocimiento compartido generado (definiciones y ejemplos), sería extendido, refinado y formalizado en gran grupo guiados por el profesor.

A posteriori

Basados en el análisis de la sesión (ver p. 131 sección 4.3.1 Análisis de la Hoja de trabajo #1: Definiciones), podemos decir que para la tarea de reconstruir definiciones, los estudiantes recordaron y compartieron en sus equipos algunos ejemplos específicos del objeto o concepto matemático, al igual que procedimientos o situaciones en los cuales fue utilizado durante su trayectoria escolar. Aunque eran objetos y conceptos en su mayoría conocidos, se percibió un manejo parcial de las definiciones. Más aún, encontramos que exhibieron "definiciones" negociadas y aceptadas dentro de su equipo, caracterizadas por:

a) Contener una lista parcial de propiedades o características del objeto o concepto (*e.g. Un número a divide a un número b cuando (equipo D): a es diferente de 0; Círculo (equipo H): Una serie de puntos alrededor de otro punto céntrico donde la distancia del punto céntrico a cualquier punto de la serie es la misma*).

b) Ser construidas desde algunos ejemplos concretos (*e.g. Diálogo del equipo C: Entonces, un número par es aquel que se puede dividir entre él; … y otros; Sí, porque por ejemplo el 10 se puede dividir entre él, entre 5, entre 2*).

c) Presentar ambigüedades (*e.g. Número par (equipo I): es aquel que se puede dividir entre sí mismo y entre 2; Cuadrilátero (equipo B): Figura geométrica con 4 lados; Dos triángulos son semejantes cuando (equipo A): sus ángulos interiores y exteriores son iguales*).

d) Excluir elementos o considerar un subconjunto del dominio de definición (*e.g. Números pares (equipo D excluye a los pares negativos): Son los que van ascendiendo de 2 en 2 a partir del 0; Un* *número es primo (equipos G e I, válida sólo en el dominio de los enteros positivos): sólo si es divisible entre el mismo y el 1; Triángulo isósceles (equipo F excluye al triángulo equilátero): Polígono de tres lados con dos lados iguales y uno distinto; Cuadrilátero (equipo C): Figura geométrica de 4 lados rectos que son paralelos)*

e) Producir definiciones incoherentes o equivocadas (e.g. *Dos triángulos son semejantes cuando (equipo C): alguno de sus ángulos o de sus lados pueden ser iguales; Ortocentro de un triángulo (equipo A): Es el punto centro de un círculo que toca los tres vértices de un triángulo; Número impar (equipo C): es aquel número que se puede dividir entre el mismo y entre 1; Un número a divide a un número b cuando (equipo G e I): b=ka*)

f) Exhibir definiciones correctas pero no económicas (*e.g. Dos triángulos son semejantes cuando (equipo I): todos sus lados son proporcionales y sus ángulos iguales y además se cumple a/d=c/e=b/f*)

g) Lograr pocas definiciones correctas, es decir, aceptadas por la comunidad matemática (*e.g. Un número a divide a un número b cuando (equipo E): se cumple que xa=b para algún x entero; Un número impar (equipos A, F, G, I) es el que puede escribirse de la forma: 2n+1 para* $n\in Z$, $\{2n+1 | n\in Z\}$*; Se dice que A es subconjunto de B si (equipo E e I):* $x\in A \Rightarrow x\in B\ \forall x\in A$).

Las características a), b), c), d) y e) de las producciones de los equipos causaron sorpresa al profesor que condujo la sesión y evidenciaron que los estudiantes trabajan los objetos y conceptos de manera elemental. Esto lo convenció de que la aproximación estructural a los objetos y conceptos matemáticos, utilizada por la mayoría de los profesores del medio en el que se desarrolló la ID, no resulta adecuada y puede ser el origen de las dificultades que enfrentan los estudiantes los primeros años de formación en matemáticas avanzadas, ya que, manipulan definiciones formales cuando no han desarrollado la habilidad para construirlas. Por su parte, la característica f) nos da información suficiente para afirmar que los estudiantes que ya tienen mayor cuidado de las propiedades, lenguaje y algunas sutilezas, presentan en esta primera parte (trabajo en equipos) inmadurez en el pensamiento deductivo, dado que no perciben que ciertas características pueden derivarse de otras.

Por otro lado, se lograron pocas definiciones formales correctas como las mostradas en g), que son las aceptadas en la comunidad matemática. Pero hemos visto que se ha luchado, discutiendo en los equipos, para poder obtenerlas y dentro de esas discusiones lograron salvarse algunos desacuerdos con sustento en buenos argumentos (e.g. Diálogo en el equipo A acerca de la duda sobre si el 0 es o no par: *[7] No, el cero no es par ni impar…* Después de escuchar otras producciones el equipo regresa nuevamente al punto y presenta los argumentos: *[287] 0 entre 2 es igual a 0… [289] sí, en estas definiciones si sería par [el cero]…[291] Creo que si consideramos al cero como un número entero sí sería par*).

Finalmente esas siete características son datos valiosos, dado que, por la naturaleza de su organización, están centradas completamente en el pensamiento de los estudiantes que, al estar entre pares, sienten confianza de expresarse libremente, reduciendo notablemente el miedo al error y salvando inconsistencias mediante argumentos convincentes.

El primer paso en la construcción de demostraciones requiere de una comprensión y manejo de los conceptos involucrados en el enunciado de una proposición matemática. Para lograr que los estudiantes desarrollen la habilidad de desenvolver definiciones, además de apoyarlos con tareas de reconstrucción de definiciones, se requieren tareas inversas. En ese sentido, en la primera sesión también se les presentó una actividad en la que, dada una definición no conocida por ellos (número feliz y número primo feliz) se les pedía que construyeran diferentes ejemplos que cumplieran con tal definición. En esta sesión anticipamos que, en los pequeños grupos aportarían algunos ejemplos apegados a la definición y suspenderían la tarea. Sin embargo, durante el trabajo en pequeños grupos, los estudiantes se mostraron muy concentrados y motivados buscando ejemplos genéricos y construyendo espacios de ejemplos (conjuntos de ejemplos que compartían características), al igual que espacios de no ejemplos para descartar y no incluirlos en los candidatos a ejemplos.

Durante el trabajo en pequeños grupos se logran producciones negociadas entre los integrantes, este momento, como lo hemos podido documentar ampliamente en el capítulo anterior, permite una relación entre interacción y aprendizaje que de manera simultánea proporciona avances y limitaciones. Tales limitaciones son superadas durante el momento de la discusión y socialización en gran grupo acompañados por el profesor. Además, hemos podido seguir, cómo los estudiantes transitan desde un proceso de "describir" a un proceso de "definir" gracias a los detalles entresacados de la interacción estudiantes-estudiantes-profesor. Durante esta dinámica, hemos encontrado las siguientes fortalezas:

i) Los estudiantes proponen definiciones negociadas con sus compañeros. Esto deja ver su pensamiento y permite al profesor llevarlos a comprender sus definiciones y extenderlas desde confrontar con las producciones de otros, demandar argumentos, ejemplos y explicaciones.
ii) Todas las definiciones producidas por los estudiantes en los pequeños grupos son compartidas.
iii) Decidir cómo secuenciar y entrelazar las producciones de los estudiantes en la discusión en gran grupo ha sido elemento clave para lograr discusiones académicamente productivas (e.g. en la definición de número par inicia con *«son los números que van ascendiendo de 2 en 2 a partir del cero»* y en grupo se va afinando el lenguaje (Fragmento [2-9] p. 138), continuando con *«son los números que se pueden dividir entre sí mismos y entre el 2»* (Fragmento [10-13] p.139) revisan en grupo ambigüedades o significados locales ("se puede dividir"), se depuran y se identifican características exclusivas de los pares. Luego se discute la definición de otro *equipo «los números pares son aquellos que tienen la forma 2n donde n es un entero»* (Fragmento [28-42] p. 140).
iii) La activación y demanda de ejemplos (tanto por el profesor como por los estudiantes) resultan mediadores eficaces para construir las definiciones y ampliar su significado. Más aún los encontramos en casi todos los casos.
iv) Integrar las ideas principales para cerrar con una definición aceptada por todo el grupo.

Conclusiones de la sesión 1

Finalmente en esta sesión anticipamos que los estudiantes desarrollarían habilidades tanto sociales como cognitivas para negociar las definiciones, construcción y uso de ejemplos y no ejemplos y encontrar propiedades que los apoyaran como organizadores genéricos para construir espacios de ejemplos. También esperábamos que la organización en pequeños grupos ayudara a crear un ambiente propicio y de confianza para que se exhibieran las dificultades de los estudiantes y se detectaran errores que pudieran corregirse en gran grupo y sobre todo, que la discusión tuviera como referente siempre el pensamiento del estudiante y no el del profesor. Consideramos que en esta sesión, efectivamente se han desarrollado habilidades sociales y cognitivas para la transición de describir objetos, nociones y conceptos matemáticos, a definirlos. también consideramos que los estudiantes ya están preparados para dar el primer paso en la construcción de demostraciones: desenvolver las definiciones presentes en el enunciado de la proposición.

También, particularmente en la actividad de encontrar números felices a partir de la definición, pudimos ver que ponen en juego habilidades necesarias para el matemático profesional: se centran en propiedades invariantes (e.g. conmutar cifras), construyen conjeturas (e.g. encuentran ciclos en el proceso de verificar y construyen conjeturas), se fijan en similitudes de ciertos números felices o no felices, construyen argumentos y cada vez, consiguen enlazar más hechos para conseguir un mayor número de ejemplos y no ejemplos. En el trabajo de los equipos hemos observado cómo la discusión ha permitido que la construcción y exploración de ejemplos se vaya ampliando, encontrando algún patrón que conlleve la integración de los mismos en ciertas agrupaciones. De acuerdo con Watson & Mason (2005, p 51) los ejemplos no suelen ser aislados, se perciben como elementos de espacios estructurados. Son percibidos como casos de una clase potencial de ejemplos, así constituyen lo que ellos llaman un *espacio de ejemplos*.

En los diálogos de los equipos se aprecia cómo encuentran en esta tarea, en cierto grado, un desafío y se aventuran cada vez más en la búsqueda de ejemplos más complejos y estructurados que les permite construir algunas conjeturas (*B-acciones*), para obtener (*C-acciones*) espacios de ejemplos cada vez más generales. También observamos que cuando construyen conjeturas basándose en las similitudes de los ejemplos de números felices encontrados (e.g. que aparezca algún dígito igual) basados en los procesos (e.g. como cuando se buscan combinaciones de cuadrados perfectos que sumen 10) no logran generar espacios de ejemplos.

En relación a la organización y dinámica a seguir, pudimos observar que el profesor, al no estar habituado a que el pensamiento del estudiante, marcó la trayectoria de la discusión. En repetidas ocasiones no espera el tiempo suficiente para que ellos sean quienes concreten alguna acción y es él quien la propone.

5.1.1.2 Sesión 2

Análisis a priori

La parábola, elipse e hipérbola son ejemplos de conceptos matemáticos que los estudiantes identifican como la gráfica de una función, más que como formas geométricas independientes. Por esta razón, consideramos relevante tratar con dichas formas. Se presentó la construcción de la parábola como un objeto complejo, en el sentido de que su construcción requiere de diferentes objetos (punto, recta, mediatriz de una recta) y conceptos que se relacionan (distancia de un punto a una recta, distancia entre puntos, lugar geométrico, etc). Se pretendía primero que; a partir de la construcción e identificación de objetos y relaciones entre ellos, los estudiantes pudieran construir la definición de parábola como lugar geométrico. En esta parte, anticipamos que los estudiantes llegarían a reconocer que tenían una recta fija y un punto fijo y que cada punto en el plano que estuviera a la misma distancia de la recta fija y del punto fijo pertenecía a la forma geométrica trazada y además la identificaran con la gráfica de determinadas funciones cuadráticas (ya conocidas por ellos). Finalmente que pudieran reconocerla como parábola en ambos casos.

Más adelante, se proponía la tarea inversa, es decir, se daba la definición de elipse e hipérbola como lugar geométrico y se pedía que ellos realizaran la construcción. En este caso se esperaba que pudieran realizar la construcción en Cabri a partir de la definición como lugares geométricos y la experiencia previa de la parábola. La organización como antes, se planeó para trabajo en pequeños grupos y posteriormente socialización en gran grupo.

Análisis a posteriori

A partir de la observación y documentación de la sesión podemos decir que; durante el trabajo en pequeños grupos los estudiantes sentían la libertad de discutir, compartir sus ideas y escuchar las de sus compañeros, exhibiendo algunas debilidades que se superaban a medida que usaban los conceptos u objetos, los manipulaban en una construcción dinámica y discutían. Algunas características que encontramos en esta sesión fueron:

a) Las imprecisiones en el lenguaje provocaron que sus ideas no fueran entendidas de igual manera por todos, eso hizo que cada vez se afinara el lenguaje tomando acuerdos en como denominar a los objetos. (e.g. Fragmento 2-33 pp. 185-186 , cuando utilizan segmento, recta y línea de manera indistinta). También, recordar otros conceptos, objetos y procedimientos donde han sido utilizados, ayudó a librar confusiones (e.g. confusión entre bisectriz y mediatriz [ver p. 186])
b) los métodos utilizados por los estudiantes fueron de tanteo o ensayo y error. En este sentido, consideramos que el uso del software dinámico Cabri permitió que estos métodos de naturaleza intuitiva ayudaran en la exploración de diferentes situaciones y en consecuencia en la construcción de los objetos, conceptos y definiciones operables, al transitar del ensayo y error a métodos transformacionales (e.g. Fragmento 48-61 p. 183 para la noción de mediatriz de un segmento desde un conjunto infinito de triángulos isósceles que como base comparten el segmento dado).
c) los estudiantes guiados, siguieron la construcción dinámica de la mediatriz y la parábola, aunque en un principio sólo las concebían como representaciones visuales o *herramientas de amplificación,* poco a poco van identificando los objetos dependientes e independientes y en consecuencia "posiciones especiales" que los llevan a reconocer propiedades invariantes (e.g. Fragmento 237-252, pp. 191-192 y pueden extraer información de la mediatriz para definir la parábola como lugar geométrico), es decir la construcción es ahora tomada como *herramienta de reconceptualización cognitiva*. Para Berger (1998), el proceso de amplificación puede verse como la metáfora de la lupa, a través de la lente podemos ampliar para ver mejor, sin cambiar la estructura. Por otro lado, el proceso de reconceptualización es comparable con el microscopio, éste permite observar lo que no es visible a primera vista y dar entrada a un nuevo plano de la realidad del objeto de estudio y eso ayuda a que surja nuevo conocimiento.
d) en las discusiones en pequeño grupo se establecieron asociaciones erróneas por utilizar parte de las palabras involucradas con algunos conceptos estudiados. Tales errores se fueron corrigiendo con el curso de la discusión (e.g. fragmento 125-141, pp. 193-194, al buscar la relación del foco F y la directriz l con respecto al punto P sobre la parábola, confunden "relación" con "relación de equivalencia" y se alejan de la situación al buscar las propiedades de la relación de equivalencia: reflexiva, transitiva, simétrica).
e) en relación a la hoja de trabajo en esta sesión fue incluida información adicional que confundió a los estudiantes, aún cuando ya habían mencionado los elementos y propiedades necesarios para definir parábola (e.g. fragmentos 142-256, p. 194-195, donde podemos ver que en los estudiantes se genera la confusión entre definir y nombrar).
f) Tres de los cuatro equipos lograron descubrir relaciones y propiedades importantes de los elementos de la parábola y dos lograron tres representaciones de las cónicas: la gráfica, la

mecánica (o dinámica) y la verbal. Con la construcción de dichas representaciones, extendieron su comprensión acerca de las cónicas y superaron imágenes erróneas o limitadas.

Durante la socialización en gran grupo, encontramos algunos rasgos relevantes:
1) Aunque en repetidas ocasiones el profesor deja que los alumnos expongan su ideas y argumenten. También, se tienen momentos en los que no pide argumentos y descarta aportaciones valiosas sin mayor exploración en espera de la aportación que él tiene en mente (e.g. Fragmento 40-45, p. 195-196) al cuestionar sobre cómo medir distancia de un punto a una recta).
2) El profesor cuestiona y va enlazando los argumentos de los estudiantes, sin embargo, en ocasiones, es él quien finalmente concreta la acción de construcción del conocimiento (e.g. Fragmento 46-64, p. 196, el profesor termina por definir la parábola). No obstante, en conjunto, estudiantes y profesor logran una explicación académicamente productiva y ésta probablemente no puede ser construida de manera individual. Podemos aquí ver la importancia de la participación de profesor y estudiantes en la construcción compartida del conocimiento (al igual que sucede en la práctica profesional del matemático) y esto aporta elementos de validación para la hipótesis 2 de este trabajo.

Conclusiones de la sesión 2

Las tareas de esta sesión resultaron de suma importancia para lograr distinguir los atributos de una buena definición: concisa, precisa, consistente con otras definiciones, libre de ambigüedades, comprensible dentro del nivel de conocimientos ganados en la interacción en gran grupo. En particular, fue posible que los estudiantes definieran a partir de la construcción de un objeto y viceversa, identificaran objetos de la construcción, su representación y las relaciones entre ellos, logrando con ello identificar invariantes y validar conjeturas a partir de ellos. En relación al lenguaje, cada vez lo refinaron y utilizaron de manera más adecuada para lograr el manejo grupal de las ideas.
La organización de las diferentes tareas permitió documentar las diferentes etapas de la Abstracción en Contexto, como marco teórico utilizado para el análisis. Esto se apreció, tanto al construir la definición de parábola a partir de una construcción guiada, como al construir la representación gráfica de la elipse y la hipérbola a partir de la definición como lugar geométrico (representación verbal). Esto lo observamos, por ejemplo, cuando después de realizar la construcción guiada de la parábola en Cabri, surgió la necesidad para este constructo. Es decir, cuando movieron el punto independiente y dejaron la traza del punto dependiente, obtuvieron una forma que se "parecía" a la que conocen desde el contexto de las funciones cuadráticas. Luego, surgieron cuestionamientos en el pequeño grupo, ¿es la parábola qué conocemos? ¿Qué características tiene? ¿Cómo se define? Esto fue una expresión de la necesidad de una definición acordada por el grupo, que posteriormente se construyó enlazando diferentes acciones de reconocimiento de elementos y constructos previos (propiedad de la mediatriz, lugar geométrico, elementos fijos, elementos dependientes etc), edificación o ensamblaje de los mismos.
La sesión fue realizada de acuerdo a la planificación; se utilizó la hoja de trabajo diseñada. Respecto a la organización y a las interacciones, se trabajó, primero discutiendo las tareas en pequeños grupos y, posteriormente, se compartieron en gran grupo guiados por el profesor. Aunque, el profesor no siempre respetó el acuerdo de dejar que ellos concretaran las acciones e intervenir lo menos posible, sí creemos que ha sido importante que apoyara la construcción de conocimiento compartido, dado que no siempre pueden llegar solos los alumnos.

5.1.2 Confrontación del Bloque II. Aproximación a la actitud y rigor matemático

Este bloque fue diseñado para que surgiera la necesidad de construir una definición de proposición matemática desde las imágenes de los estudiantes acerca de este concepto. Para ello, deben reconocer sus componentes y los elementos que les permiten identificarlas en diferentes contextos matemáticos.
En la práctica de los matemáticos, el manejo de proposiciones es central y gran parte de sus tareas están encaminadas a determinar y justificar su valor de verdad. En el estudio exploratorio, realizado previamente al diseño de la ID, hemos encontrado que los estudiantes que se inician en la disciplina presentan dificultades para enfrentar tales tareas. Una causa de fondo, es que fallan al identificar hipótesis y conclusión en implicaciones, y más aún no comprenden el papel de la hipótesis en el proceso de demostración. Por otro lado, los conectivos lógicos y cuantificadores aparecen dentro de la estructura de las proposiciones y los estudiantes no han tenido experiencias matemáticas previas con su manejo; su experiencia se limita al manejo en el contexto cotidiano y éste difiere en gran medida del contexto matemático. El estudiante al iniciarse en el terreno de la matemática formal, en la mayoría de los casos, no distingue la diferencia entre verificar y demostrar. Por ello, consideramos importante iniciarlo en la construcción de ejemplos, no ejemplos y/o contraejemplos que le permitan comprender la estructura de la proposición, tener casos en los que se verifican, o en los que no, o bien un caso que prueba que no se cumple siempre y en consecuencia a intuir la manera de aproximarse a la demostración. En las sesiones diseñadas para este bloque, se presentaron oportunidades, que anticipamos ayudarían a enfrentar y superar tales conflictos. En relación a la dimensión didáctica y social, se continuaría con trabajo en equipos apoyados por una hoja de trabajo y posteriormente en gran grupo para discutir y confrontar producciones apoyados por el profesor.

5.1.2.1 Sesión 3. Proposiciones

Los estudiantes que participaron en la sesión, durante el semestre trabajaron en clases organizadas con presentación de definiciones, enunciados de proposiciones y teoremas, algunos acompañados de su demostración, junto con ejercicios donde se aplican los conocimientos adquiridos. Sin embargo, no hay evidencia en sus apuntes que muestre alguna explicación sobre lo qué es una proposición, como identificarla y menos cómo demostrarla. Más bien, a lo largo del camino, después de haber visto diferentes enunciados y demostraciones poco a poco se van formando su imagen de las proposiciones. Partiendo de este hecho veamos a continuación la confrontación de lo esperado con lo ocurrido. Esta sesión, la hemos dividido por tareas para una mejor comprensión.

5.1.2.1.1 Definir proposiciones matemáticas e identificarlas

Análisis a priori

En esta primera parte el objetivo era reconocer una proposición matemática y sus componentes, destacando que lo característico y fundamental es su valor de verdad. La consigna era comentar en pequeños grupos *qué es una proposición matemática* y luego poder discutir en gran grupo sus aportaciones. También en esta tarea se les proporcionaron seis enunciados para decidir cuáles eran proposiciones matemáticas, justificar sus respuestas y posteriormente compartirlas en grupo.

Análisis a posteriori

En el análisis en pequeño grupo encontramos que la imagen de proposición matemática de los estudiantes está relacionada con ecuaciones, oraciones *falsas* o *verdaderas*, afirmaciones o negaciones y propiedades afirmativas o negativas (fragmento 3-57 pp. 206-207 4.4.1.1 Análisis de definir proposiciones matemáticas). El intercambio de ideas e interacción los lleva a depurar el lenguaje y llegar a definirla como: «enunciado cuyas propiedades son afirmativas o negativas» y en el caso en que las proposiciones sean verdad se maneja una relación entre dos oraciones o elementos. Esta definición ha sido negociada y construida a partir de ejemplos específicos. En cuanto al lenguaje, "afirmativas o negativas" se entiende en el sentido excluyente y como *verdad* o *falso*. Para ellos es importante contar con una relación (e.g. =,≠,>,<) en el enunciado.
Otra definición de proposición, construida en equipo es, la de «enunciado que se considera *verdad* o *falso*, más sin embargo necesita de una demostración». En esta definición encontramos los rasgos esenciales de una proposición, es decir, que puede ser *verdad* o *falso* (sentido excluyente) y que para sustentar su valor es necesaria una demostración.

A continuación para reconocer proposiciones matemáticas (fragmento 33-38, p. 208), usan la definición antes negociada (enunciado cuyas propiedades pueden ser afirmativas o negativas) y así identifican entre seis enunciados proporcionados, cuáles son proposiciones matemáticas.
Para el primer ítem (decidir si $ax^2+bx+c=0$ es proposición), los estudiantes reconocen que el hecho de tener una "propiedad", por ejemplo, la igualdad a cero, les permite decidir si es *falsa* o *verdad*, aunque no se fijan que no es suficiente, ya que los parámetros *a*, *b* y *c* de la ecuación no tienen valores numéricos y no se puede decidir el valor de verdad.

De la misma manera (ver fragmento 39-50, p. 208-209) para decidir si $-b+\sqrt{(b^2-4ac)}]/2a$ y $3+n+n^2$ (ítems 2 y 4) son proposiciones matemáticas, argumentan que no se puede decidir su valor de verdad ya que carecen de signo de igualdad y de otra expresión o número para "comparar".

En relación al lenguaje, observamos que el sentido de las palabras afirmativo y negativo lo usan para indicar *verdad* o *falso*. Sin embargo, esto no necesariamente tiene el mismo significado. También encontramos que de manera progresiva mejora la precisión del lenguaje utilizado por los estudiantes a lo largo del proceso de construcción. De acuerdo con Kildron (2008) y de Gilboa, Dreyfus & Kildron (2011) el hecho de que mejore paulatinamente la precisión en el lenguaje es una característica del proceso de construcción del concepto por sí mismo y no sólo de una etapa de consolidación.

Para el tercer ítem, decidir si el enunciado, *los triángulos XYZ y RST son semejantes,* era una proposición matemática, los estudiantes deciden que sí lo es, porque tienen la propiedad de semejanza y los triángulos, así que pueden decidir sobre su valor de verdad (ver fragmento 42-50, p. 209). Este es un componente importante para la emergencia del nuevo constructo, aunque todavía se perciba frágil, ya que, se reconoce que el enunciado es una proposición.

Para el quinto ítem, $sen\ \pi/2 < sen\ \pi/4$, están de acuerdo en que es proposición matemática al tener en cuenta que la relación, "<" les permite decidir si es *falso* o *verdad* el enunciado. El proceso de construcción, hasta el momento les permite reconocer que para que haya una proposición matemática se necesita la presencia de una relación (fragmento 52-60, p. 209).

Finalmente para el sexto ítem, decidir si el enunciado, *para todo ángulo t*, $sen^2\ t+cos^2\ t=1$, es proposición, consideran que hay una propiedad y una relación de igualdad y reconocen el enunciado como proposición.

En la interacción en gran grupo (ver p. 209) se muestra que los alumnos identificaron los aspectos en la definición de proposición que permitieron su construcción. Al compartir las respuestas, durante la socialización, el profesor concentra todas las participaciones de los estudiantes y les da forma para llegar a construir juntos que una proposición matemática «tiene que ser una afirmación o un enunciado y que nosotros tenemos que determinar si es *falso* o *verdad*. Cuando no podemos determinar si es *falso* o *verdad* no es una proposición matemática».

Los estudiantes, inducidos por el profesor (Fragmento 71-96 pp. 209-210) y por el trabajo previo, reconocen la importancia de poder decidir el valor de verdad del enunciado para decidir si es o no proposición. Encontramos que: utilizan el criterio de manera completa y adecuada desde el trabajo en pequeño grupo, aunque en ese momento dependía de ejemplos específicos.
Para fortalecer el criterio anterior, el profesor reestructura la pregunta para ver si es proposición matemática, por ¿pueden determinar si es *falso* o *verdad*? Esta pregunta es generadora de participaciones focalizadas y razonadas entre los alumnos y deriva en la respuesta correcta. Deciden que los ítems 1, 2, 4 no son proposiciones por no tener valores y alguna relación que les permita decidir sobre su valor de verdad. En el tercer ítem deciden que sólo en caso de tener los triángulos trazados o bien sus medidas sería proposición. Finalmente concluyen que 5 y 6 son proposiciones y particularmente, en 6, deciden que es *V* y el profesor aprovecha para distinguir entre ecuación e identidad.

5.1.2.1.2 Justificar el valor de verdad de proposiciones matemáticas

Análisis a priori

La tarea propuesta fue identificar y justificar de una lista de cinco proposiciones matemáticas cuáles eran *verdad* y cuáles no. Se esperaba que este ejercicio, además de iniciar la consolidación del concepto de proposición, proceso a largo plazo, diera lugar a un nuevo constructo: cómo decidir su valor de verdad.

Análisis a posteriori

Organizados en pequeños grupos discutieron sobre las cinco proposiciones para decidir y justificar su valor de verdad.

Para decidir el valor de verdad de la proposición: la raíz cúbica de cualquier entero es un número real (ver Ítem 1, Fragmento 258-287, pp. 212-213), en la interacción en el equipo, trataron de encontrar un contraejemplo pensando en un número negativo, que funcionaría para refutar la proposición en el caso de la raíz cuadrada. De entrada les pareció difícil probar que era *verdad*, intentaron ver si era *falsa* y reconocieron el papel de los contraejemplos. Se percibe cuidado al

trabajar con los números reales, definiéndolos y explorando ejemplos específicos positivos, negativos, fracciones.
Observamos que no tuvieron cuidado con la hipótesis. Esto lo atribuimos probablemente a que no es explícito el *si … entonces*. No obstante, por momentos hicieron énfasis en su papel condicional. También es destacable que los estudiantes estuvieron involucrados con la tarea y buscaron argumentos, para decidir con mayor cuidado, aunque no concluyeron la tarea porque el profesor inició la socialización en gran grupo.

Por su parte, en el otro equipo justificaron que: «cualquier entero ya sea negativo o positivo tiene una raíz cúbica [real]», después de verificar con algunos números y darse cuenta que no ocurre lo mismo que con las raíces cuadradas, es decir, dos números negativos al multiplicarlos no te pueden dar un número negativo y eso implica que un número negativo no tenga raíz cuadrada real, mientras que, multiplicando tres negativos sí es posible obtener un negativo.

Durante la interacción en gran grupo, se discute que las raíces cuadradas de un número negativo son números complejos y este hecho se utiliza para decidir sobre la *verdad* de la proposición, dado que las raíces cúbicas de un número negativo son reales. Aún cuando se da la respuesta correcta, el profesor demanda mayor participación para que expliquen y amplíen su razonamiento propiciando que surja la idea de que en las raíces cúbicas de los números negativos no ocurre lo mismo que con las raíces cuadradas.

Para decidir el valor de verdad de la proposición: $x^2+y^2>1$, donde x e y son números reales (ver ítem 2, Fragmento 101-104 y 238-254, pp. 213-214). Dada la formulación un tanto confusa, los alumnos enfrentaron algunos problemas, pero resultó interesante la aplicación de lo realizado en el ítem siguiente.
Siguiendo la interacción en equipo, iniciaron considerando que es *verdad* dado que los cuadrados son positivos, sin embargo el argumento es válido sólo para el dominio $\mathbb{Z}$-{0}. Luego, refutaron la afirmación con un contraejemplo *x=y=0,* aclaran que *0* es real y se percibe la necesidad de tener en cuenta la hipótesis (*x* e *y* son reales).
Con el afán de que todos queden convencidos de que la proposición es *F*, siguen buscando contraejemplos. Se percibe que no es suficiente exhibir uno como demostración. En esa búsqueda, los conectivos (o/y) representan un conflicto para la comunicación. Buscando mejorar la comprensión, dan importancia del uso adecuado de los conectivos para continuar con la construcción de los contraejemplos. Finalmente se aprecia en los contraejemplos encontrados (*x=y=0; x=1,y=0;* y*, x=0, y=1)* que respaldaron la falsedad de la proposición tomando en cuenta los constructos previos específicos, uso de conectivos e hipótesis. En la actividad participaron dos equipos y uno de ellos no presentó gran avance en este ítem.

Durante la discusión en grupo (Fragmento 288-302 pp. 214-215) primero se consideró que el enunciado es ambigüo ya que la palabra "donde" se presta a más de una interpretación. Para resolver la cuestión, argumentaron que es *falso* respaldados en los contraejemplos antes mencionados. El profesor invitó a reflexionar a los alumnos sobre los contraejemplos expuestos y a revisar la forma del enunciado. Apoyados por el profesor llegan a que: en caso de que se hubiera incluido el cuantificador "*para todo número real x e y*" funcionarían los contraejemplos dados y la proposición sería *falsa*. Sin embargo, la palabra "donde" es interpretada como "sin valores definidos". Se exhiben los ejemplos: si *x=2* y *y=3* (verdadera) y si *x=2* y *y=3* (falsa).

El profesor insiste en la demanda argumentos para que se concluya la tarea y como respuesta los estudiantes llegan a que, al no tener valores definidos (cuantificados) entonces no es posible decidir su valor de verdad y por tanto no es proposición matemática.
No encontramos una intervención del profesor en la que se aclare "la ambigüedad", aunque tampoco se siente un desconcierto por parte de los estudiantes y el acuerdo final parece convenido por el grupo. También creemos que el cuidado que se observa en el lenguaje muestra avance en la comprensión del papel de la precisión en el lenguaje matemático y por tanto en el desarrollo de actitud de rigor y precisión (Gómez-Chacón, 2009, p. 18).

Para determinar si es *F* o *V* que, Si $x>0$, entonces $\log_7 x>0$, donde x es un número real. (Ver Ítem 3, fragmentos 184-234, pp. 215-216 y 303-332, pp. 216-217) En el equipo no recordaban el significado de logaritmo, preguntaron a otros compañeros y al profesor, e iniciaron dos procesos de construcción que interactúaban de manera paralela: construir el concepto de logaritmo como inverso de la exponencial y decidir si es *V* o *F* la proposición. Primero verbalizan lo que se requiere, $\log_7 x$ significa « a qué numero tendría que elevar el *7* para que me dé [x] mayor que *0* ». Pensaron en algunos números y propusieron como contraejemplo $x=1$, $a=0$ y erróneamente piensan que es único. Aquí concibieron de manera adecuada el lenguaje de los exponentes, aunque con problemas con el concepto, necesitan verbalizar sucesivas veces lo que entendieron hasta lograr su construcción definitiva. La dificultad radica en que, por un lado tienen una definición de logaritmo poco operativa a partir de exponentes, puesto que han de manejar dos variables (x y a) inversas una de la otra y, a veces, sin ser conscientes, las intercambian. Además, no entienden todavía el papel del contraejemplo para decidir el valor de verdad. Es decir, al buscar un contraejemplo, han de probar que, para algún valor que verifique la hipótesis, no se verifica la conclusión, pero esto no lo tienen totalmente asumido.
Para resolver la tarea la retomaron desde el principio realizando de forma paralela tres procesos: 1) la edificación del significado de contraejemplo, 2) un proceso de consolidación del concepto recién construido, buscando afianzarlo con herramientas algebraicas primarias que les aclare el papel del exponente, con diferentes ejemplos y cambiando de notación y 3) edificando sobre el papel de la hipótesis en una implicación. Luego de una lucha con los tres procesos mencionados, concluyeron la discusión y decidiendo que, «$7^p=x$, $7^0=1$, $x>0$ pero $\log_7 1=0$ y no cumple la proposición» por lo tanto la la proposición es *F* mostrando comprensión del papel de los contraejemplos.

En el otro equipo no se dio una discusión rica en la interacción y rápidamente, expresaron en forma errónea que es *V* que, si $x>0$, entonces $\log_7 x>0$ (donde x es un número real), dado que «Al elevar 7 a cualquier número mayor que 0 siempre será mayor que *0*». Su argumento muestra que no hay una comprensión del significado del logaritmo.

En la discusión en gran grupo, encontramos que se reconoce la función del contraejemplo como relevante y se muestra confianza en la comprensión del concepto recién construido de logaritmo como "exponente". Esta confianza, es evidencia de la consolidación que encontramos explícita en diferentes formas de enunciar su contraejemplo.
También vemos aquí influencia del ejercicio anterior, dado que en ambos aparece la palabra "donde" que antes se prestaba a diferentes interpretaciones, vemos que para un alumno la precisión de lenguaje aún es frágil y depende del contexto. Se reconoce que para algunos valores la proposición es *V* y para otros no. Esto es claro cuando responde que no es posible decidir si es *F* o *V* y no sería proposición como en el caso anterior ($x^2+y^2>1$, *donde x e y son reales*) en el que se acordó que faltaba el cuantificador en lugar de la palabra "donde".

Sin embargo, se muestra cierto crecimiento en la comprensión de la noción de proposición que se manifiesta, primero en el reconocimiento al uso distinto de la palabra "donde" en ambos enunciados, luego, se explicita la forma de la implicación (como caso particular de proposiciones), el papel condicional de la hipótesis en la misma y el papel de los contraejemplos para probar que una proposición es *F*, «Sí, porque independientemente del valor que nos dé de *x*, hay un valor que no cumple [$log_7 1 = 0$ y por tanto no es positivo]»

Aprovechando que se mencionó a las implicaciones, como caso particular de las proposiciones, se inició una exploración sobre cuándo es *verdad* una implicación y construyeron su tabla de verdad.

Para encontrar el valor de verdad de la proposición, para todo ángulo t, $\sec^2 t - \tan^2 t = 1$ (ver Ítem 4). En ambos equipos de inmediato se mencionó que es verdad dado que se cumple para cualquier valor de *t*, esto indica que se reconoce la proposición como la identidad trigonométrica $sec^2 t = 1 + tan^2 t$. De igual manera en gran grupo exhiben confianza con el manejo de identidades.

Para decidir si la proposición, "sean a y b enteros con a≠0, si a no divide a b, entonces $ax^2+bx+b-a$ no tiene una raíz entera positiva", es verdad (ver Ítem 5, fragmento 120-176, p. 218-219). En equipo, reconocieron que la fórmula general para resolver ecuaciones de segundo grado era relevante para ver si la proposición se cumple, al igual que tener en cuenta la hipótesis. Esto último muestra ya el cuidado que se tiene del papel condicional de la misma. También mostraron cuidado en el uso adecuado de la definición de divisibilidad construida previamente (p. 142) y, a su vez, el reconocer que es relevante tenerla en cuenta para esta nueva tarea.

En el proceso para decidir si es *verdad* la proposición en juego, utilizaron la fórmula general para resolver ecuaciones de segundo grado, realizaron cálculos verificando una y otra vez. Luego obtuvieron las raíces $x_1=-1$ y $x_2 = (1-b/a)$. Tomaron en cuenta la hipótesis vinculándola con la raíz x_2 (descartaron x_1 por ser raíz entera negativa) y se dieron cuenta que x_2 es siempre una fracción por la hipótesis, luego llegaron a que la proposición era *V*, es decir, que la ecuación no tiene raíz entera positiva si *a* no divide a *b* y a≠0.

Finalmente, revisaron información relevante y ordenaron sus cálculos. Un alumno pidió tener mayor cuidado en la decisión y pensar que pasaría con la solución encontrada ($1-b/a$) si *a* o *b* fueran negativos. Otro alumno mostró confianza y seguridad en su decisión al validar que en cualquiera de los casos x_2 es una fracción y x_1 es negativa siempre. Finalmente la observación de cierre que hicieron en su aportación escrita después de presentar los cálculos de sustituir $c=b-a$ en la fórmula general para resolver ecuaciones de segundo grado y obtener $x=[-b\pm(b-2a)]/2ª$: «La *raíz (+)* $= -2a/2a$ es entero negativo; la *raíz (-)*$=-2b/2a+2a/2a$ como *a* no divide a *b* entonces $-2b/2a$ es una fracción». Por su parte, el otro equipo en su registro escrito señaló que «ya que *a* no divide a *b*, al igualar la ecuación $ax^2+bx+b-a$; a un entero positivo y realizando algunos cálculos nos dimos cuenta que la proposición es verdad».

En gran grupo se percibió inmediatez y confianza en el manejo de la definición de divisibilidad, incluida en una hoja de trabajo previa sobre construcción de definiciones donde sí se exhibieron dificultades con esta definición (p. 142). Aunque durante la interacción no se explicitaron las ideas de cada alumno, revisando la interacción en pequeños grupos y sus producciones escritas se puede ver la utilidad de la fórmula general para resolver ecuaciones de segundo grado y la definición de divisibilidad.

5.1.2.1.3 Confrontación de comprender hipótesis y conclusión en una implicación

Análisis a priori

En esta parte esperábamos que identificaran la forma "si,…, entonces" de una implicación, las variantes de esta forma y sus componentes (hipótesis y conclusión). Primero se exploraría en pequeño grupo sobre lo que entendían por hipótesis y por conclusión en el contexto de las implicaciones. Posteriormente, se les proporcionaría una lista de siete implicaciones con diferentes formas para que identificaran sus componentes. Finalmente se procedería a la socialización en gran grupo.

Análisis a posteriori

En un equipo (Fragmento 372-391, p. 220), para tratar de explicar qué entendían por hipótesis y conclusión en una implicación, primero percibieron que la conclusión se deriva de la hipótesis una vez que ésta se verifica, explicitando que la hipótesis es la parte que se debe suponer *verdad*. Sin embargo, en un intento por profundizar, pensaron en la hipótesis como "propiedad" y esto lo justificaron con el ejemplo, «*sea x un entero… es una hipótesis, una propiedad*», después de considerarlo como una propiedad, pasan a considerarlo "evento" y lo vinculan con el hecho de que, de ella se extrae la conclusión para considerar la hipótesis como evento independiente. Tras esta consideración y dado que si "ocurre" la hipótesis entonces "ocurre" la conclusión, la conclusión sería un evento que está en función de ella.

Observamos en esta interacción, que tienden a buscar similitudes usando términos no matemáticos para expresar conceptos de forma poco ajustada. Por ejemplo, en matemáticas, en una hipótesis se establece o controla las "propiedades o características" que se deben tener, mientras que en un evento no puedes determinar su ocurrencia.

En las respuestas escritas de los equipos, en cuanto a definir *hipótesis* en el contexto de la demostración se observa que ambos entendieron su papel condicional. En uno mencionaron que «es un enunciado ya sea *falso* o *verdad* el cual consideramos para saber si alguna proposición es *falso* o *verdad*», sin tomar en cuenta que en el contexto de la demostración la hipótesis se supone *verdad*, y en caso contrario, si se supone *falso*, de lo falso se deriva cualquier cosa. En el otro equipo que es un «evento independiente que enuncia ciertas propiedades».

En el escrito definieron *conclusión*, como lo que se deriva de la hipótesis. En un equipo, «es a lo que se llega mediante la hipótesis la cual puede ser *falso* o *verdad*» y en el otro, «un evento que está en función de la hipótesis», mostrando las mismas debilidades que en hipótesis.

Para la discusión en gran grupo (fragmento 430-455, pp. 221-222), el profesor al darse cuenta de las respuestas generadas, cambió la intención de la tarea en la socialización y preguntó «qué función tiene la hipótesis», esto hace que se deriven respuestas encaminadas hacia considerar que la hipótesis es la información necesaria que se debe tener en cuenta para demostrar. Para afianzar esta idea, a partir de ejemplos cercanos logró que reflexionaran acerca de lo que sugiere la noción de hipótesis.

En relación a las debilidades mostradas en gran grupo. Un alumno confundió los valores que se asignan a las premisas (*F o V*) para establecer la tabla de verdad de una implicación con los valores que pueda tener un enunciado concreto. El profesor aclara que «si se da en ambos [si supones la hipótesis *falsa* y *verdad* y la conclusión es *verdad]* quiere decir que a lo que llegas no depende de lo que supones, entonces es *verdad»,* aunque más adelante siguió insistiendo en la idea de que la

hipótesis puede ser *falsa* o *verdad*; las tablas de verdad que ya ha visto se impusieron sobre la construcción que se hizo de la implicación. Por otro lado, una alumna mostró confusión en relación a suponer la hipótesis *falsa*, probar por contradicción y usar contraejemplo. Para esto último, el profesor retomó la proposición trabajada en la tarea anterior sobre el logaritmo, dando lugar a la construcción del significado de la hipótesis de acuerdo a su función en la demostración. Sin embargo, en este proceso "colectivo" de construcción, el efecto no fue el mismo sobre todos los participantes e intervinieron conceptos que aún no se diferencian y utilizaron la palabra "contradicción" ligada al sentido de "falsedad".
Finalmente, encontramos cierta resistencia; no todos los estudiantes son conscientes del significado del proceso de demostrar y el profesor insiste en recordar el papel de la hipótesis y en la forma de proceder para demostrar implicación. Aunque se percibió la necesidad de una relación entre la tabla de verdad y el proceso de demostración, en esta sesión se estableció la función de la hipótesis en el proceso de demostrar y quedó claro que ésta debe suponerse *V*.

5.1.2.1.4 Confrontación de identificar los componentes de una implicación

Análisis a priori

En esta tarea se pretendía que identificaran hipótesis y conclusión en una proposición condicional, cuando aparecen palabras clave como "si… entonces", cuando no aparecen e incluso cuando aparece antes la conclusión que la hipótesis. Se pretende que sepan distinguir el papel que cumplen cada una de ellas en una proposición condicional para que cuando se llegue a la realización de demostraciones sepan distinguir de dónde deben partir y a dónde deben llegar. Para ello, se les presentaron siete proposiciones en las cuales no todas tenían la forma explícita *si P entonces Q*.

Análisis a posteriori

En la parte 1 (Fragmentos 394-396, p.222 y 456-458, p.223). Al tratar con las proposiciones: 1) *El triángulo rectángulo XYZ con catetos de longitud x e y e hipotenusa de longitud z tiene área* $z^2/4$*, entonces el triángulo XYZ es isósceles,* y *en 2) n es un entero par* $\mapsto$ n^2 es un entero par. No se mostraron dificultades durante el trabajo en pequeño grupo, ni en gran grupo, en ambos casos la respuesta fue inmediata. No fue un problema que no apareciera de manera explícita la palabra *si* y reconocieron que el símbolo "$\mapsto$" significa lo mismo que "entonces" o "implica".

Para la parte 2 (Fragmentos 397-408, p. 223 y 459-476, pp. 223-224), las implicaciones que aparecen aquí tienen la característica de presentar primero la conclusión y después la hipótesis: 3) *es posible resolver las dos ecuaciones lineales ax+by=e y cx+dy=f para x e y cuando a, b, c, d y f son números reales con ad-bc≠0,* y 5*) r es un número racional si r es real y satisface* $r^2=2$. Los alumnos no tuvieron conflicto con el orden y fueron capaces de identificar que "si" y "cuando" tienen la función de condicionar la conclusión. Tal inmediatez da muestra de la fase de consolidación para el reconocimiento de los componentes de la implicación.

Al resolver la parte 3 (Fragmentos 399-406 y 463-472, p. 224), trataron de identificar la hipótesis y la conclusión en la proposición: *La suma de los n primeros enteros positivos es n(n+1)/2*. Uno de los equipos no respondió la tarea y en el otro, identificaron que el enunciado no presenta la forma habitual de una implicación, no se mencionó ninguna de las dos palabras que la identifican (si y entonces) y tampoco algún sinónimo como en los casos previos. Primero trataron de formular la implicación en la estructura *si … entonces* para identificar sus componentes. Lograron la construcción del significado cuando encontraron el sentido de la implicación, apuntando que la hipótesis era "[si consideramos] los *n* primeros enteros positivos" y la conclusión, la fórmula para la suma. No obstante, en su escrito se especificó lo contrario de lo señalado en el diálogo. Esto puede atribuirse a la forma en que se enunció, «todo esto es la suma [$n(n+1)/2$] en consecuencia de tener los primeros enteros positivos» y el estudiante que registró el acuerdo invirtió el orden, ya que en el escrito apareció como hipótesis, «$n(n+1)/2$» y como conclusión, «la suma de los *n* primeros enteros positivos».

En la discusión grupal, para determinar la hipótesis y la conclusión de la proposición dado que, el *si* y el *entonces* no aparecen de manera explícita en alguna de sus formas, los estudiantes mostraron algunas discrepancias. Ante esta situación, se sugirió revisar el papel de la hipótesis, se puso en duda que la fórmula actuara como hipótesis, ya que la fórmula funciona con números que no sean enteros positivos. Finalmente reescribieron el enunciado identificando correctamente sus componentes.

Respecto a la parte 4 (Fragmento 414-417, p. 225), en la proposición: *si p y q son números reales positivos con* $\sqrt{pq} \neq (p+q)/2$ *entonces* $p \neq q$, dada la forma habitual de la proposición, los alumnos identificaron el si y el entonces y a partir de ello encontraron la hipótesis y conclusión.
No obstante, una alumna puso en consideración del equipo el intercambio de los papeles de la hipótesis y la conclusión mostrando que aún no reconocía su función. Pero, como respuesta, otro estudiante presentó argumentos que dan muestra de actitud de precisión y rigor al utilizar un ejemplo con el que intenta mostrar la incoherencia puesta en juego. Otro estudiante intervino para volver a la tarea que consistía sólo en identificar hipótesis y conclusión de la implicación tal como aparece en el enunciado propuesto. Esto da muestra de la importancia de la interacción para librar inconsistencias.
En el registro escrito ambos equipos determinaron hipótesis y conclusión de forma correcta y en la interacción en gran grupo no se discutió esta proposición por considerarla trivial.

En la parte 5 (Fragmentos 418-427 y 478-481, pp. 225-226) trabajaron para identificar hipótesis y conclusión de: *cuando x es un número real, el valor mínimo de x(x-1) es al menos -1/4.*
Aquí percibieron la necesidad del *si* y del *entonces* y modificaron la palabra *cuando* por el *si*. Por otro lado, encontramos que la misma alumna mencionada anteriormente, intentó cambiar el orden sin mostrar comprensión de la función de las palabras utilizadas para establecer la condición. Ella misma se dio cuenta de que no puede cambiar el orden, mostrando así la influencia que tuvo el argumento utilizado antes para persuadirla de invertir el orden en la implicación. Para convencerla en forma definitiva, se enunció la proposición de tal manera que se comprendiera la función de la hipótesis. Sin embargo, percibimos que es ese cambio (correcto) en la manera de enunciar la proposición, combinado con la no comprensión del papel condicional de la hipótesis lo que la llevó a pensar que puede cambiar el orden de manera "arbitraria". Esto se confirma con la reacción mostrada al sugerir que el cambio que propuso es posible. Las siguientes aportaciones se encaminaron a que se diera cuenta de la función de la hipótesis y la conclusión, más que a pensar si de la conclusión puede llegar a la hipótesis para justificar su intercambio. Esto se consiguió finalmente cuando ella mostró comprensión en esta dirección. En el escrito ambos equipos contestaron de forma correcta.

En la socialización en gran grupo se aprecia un cierre que concentró los elementos importantes y los constructos obtenidos a lo largo de esta actividad, así como la necesidad y su utilidad para demostrar. También se retoman actividades previas, rescatando las ideas clave y estableciendo la conexión correspondiente.

5.1.2.1.5 Conclusiones de la sesión 3

En la sesión 3, consideramos que durante el trabajo en pequeños grupos se dio oportunidad para que los estudiantes exhibieran las debilidades en la imagen del concepto, discutieran entre ellos, confrontando sus imágenes y, finalmente fueran capaces de reconocer que determinar el valor de verdad de un enunciado, es un elemento esencial para construir la definición de proposición matemática. Esta idea se afinó en gran grupo permitiendo la construcción de la definición del concepto.
La definición recién construida se puso a prueba en los pequeños grupos al lograr distinguir, de una lista de seis enunciados, dos que eran proposiciones matemáticas y dos que eran sólo enunciados. Los otros dos enunciados fueron considerados de manera errónea proposiciones matemáticas al no darse cuenta de los elementos faltantes para ello (la falta de valores de los parámetros, la falta de las imágenes o de las características de los objetos en cuestión). Estos errores fueron exhibidos durante la socialización en gran grupo y al revisar con cuidado la definición, se dieron cuenta de la imposibilidad de decidir su valor de verdad al faltar los elementos mencionados.

También encontramos que en pequeño grupo lograron construir argumentos relevantes para justificar el valor de verdad de cinco proposiciones propuestas. Construyeron ejemplos, buscaron contraejemplos (a veces pensando que es suficiente uno, a veces buscando más de uno), compararon una misma situación en diferentes casos (e.g. extraer raíces cuadradas y raíces cúbicas), revisaron definiciones tratando de construir y comprender aquellas que no dominan (e.g. logaritmo), mostraron soltura y confianza en definiciones construidas por ellos en sesiones previas (e.g. definición de divisibilidad, p. 142), libraron una lucha con el uso adecuado de los conectivos, avanzaron cada vez más en cuanto a la precisión del lenguaje para lograr comprensión del grupo, identificaron identidades trigonométricas como proposiciones verdaderas, cuidaron cada vez más el papel condicional de la hipótesis, buscaron y aplicaron herramientas conocidas que los apoyaran (e.g. la fórmula general para ecuaciones de segundo grado) y finalmente empezaron a construir deducciones para demostrar proposiciones.

Nos hemos dado cuenta que durante la sesión, los ejercicios y la organización han permitido que los estudiantes construyan el significado de la hipótesis y la conclusión y que sean capaces de reconocerlas aún en casos en los que no aparece la implicación en la forma tradicional si … entonces. Aunque para el significado de hipótesis y conclusión al principio consideran que son propiedades o eventos, lograron distinguir que la conclusión está en función de la hipótesis. Una definición apropiada fue construida en gran grupo con intervención del profesor, estableciendo la función de la hipótesis en el proceso de demostrar y que siempre debe suponerse *verdadera*.

También, en la última tarea, de una lista de siete implicaciones con diferentes formas de presentación para identificar sus componentes, lograron identificar en los equipos correctamente seis de ellas y en gran grupo se salvaron inconsistencias para lograr afianzar esta parte.

En la socialización en gran grupo se aprecia un cierre que concentró los elementos importantes y los constructos obtenidos a lo largo de las diferentes tareas de esta sesión, así como la necesidad y su utilidad para el proceso de demostración. También se retomaron las actividades previas, rescatando las ideas clave y estableciendo la conexión correspondiente.

Con lo anterior, se justifica que la sesión, tanto en el diseño de las tareas como en la organización, fue congruente con lo planeado y además fue adecuada para lograr que en pequeños grupos construyeran la definición de proposición matemática, que identificaran una proposición matemática y fueran capaces de justificar su valor de verdad, así como definir y reconocer hipótesis y conclusión en implicaciones. Como observamos, lo anterior se cumple de manera parcial durante el trabajo en equipos, ya que se muestran diferentes inconsistencias y concepciones erróneas. No obstante, esto lo encontramos muy valioso y es justo tal exhibición lo que permite detectar y posteriormente en grupo salvar inconsistencias y concepciones erróneas.

5.1.2.2 Confrontación de la Sesión 4: Conectivos lógicos

Análisis a priori

El objetivo de la sesión era destacar la importancia de los conectivos lógicos para obtener nuevas proposiciones compuestas de otras simples. La organización de la sesión fue planeada para trabajar en pequeños grupos y resolver las tareas planteadas en la hoja de trabajo 4 (Anexo A) diseñada para la sesión. Posteriormente, se planeaba abrir la sesión en gran grupo conducida por el profesor para socializar las respuestas y llegar a un conocimiento compartido.

Análisis a posteriori

Inicialmente se planeó para una sola sesión y al no ser suficiente se extendió a dos sesiones. Enseguida veamos lo ocurrido en cada una de ellas.

5.1.2.2.1 Sesión 4 a

Tarea 1: Comprender la negación (Fragmento 48-90, pp. 228-229). Se les pidió discutir en equipos ocho enunciados, y para cada uno acordar el enunciado cuyo significado fuera el opuesto.

Para el enunciado, *(1) a Sofía le gustan mucho las fresas,* en uno de los equipos se omitió el cuantificador "mucho" y en otro se realizó de manera correcta, en la interacción en gran grupo se discute acerca de la necesidad de utilizarlos y el profesor explicó con ejemplos.
Para las negaciones de los enunciados *(2) a Óscar no le gusta la mayonesa* y *(3) hoy es un día lluvioso*, no se presentó ningún problema.
En las proposiciones, *(4) cada aula tiene una silla que no está rota*, (*5) todos los estudiantes son buenos*, y *(6) al menos uno de mis compañeros está casado,* aparecen cuantificadores y los estudiantes, al no tomarlos en cuenta, construyeron las negaciones de manera errónea. El patrón de negación de un equipo en los tres enunciados fue: agregar sólo la palabra "no". En el caso del otro equipo, el patrón de negación fue cambiar los cuantificadores "cada" por "todo", "todo" y "al menos uno" por "ninguno".

En la socialización en gran grupo, a fuerza de repetir y enfatizar cuál era el cuantificador en cada caso, el profesor consiguió que construyeran la negación de estos enunciados.

Para el enunciado, *(7) Sofía es alta y delgada,* en un equipo en forma correcta llegaron a la negación, *Sofía no es alta o no es delgada,* mientras que en el otro equipo negar era equivalente a sólo agregar "no" y erróneamente acordaron que *Sofía no es alta ni delgada*. En gran grupo se discutió y llegaron a la forma correcta de negar haciendo explícito que la "disyunción" niega la "conjunción. Para el enunciado (8) $1\leq x\leq 3$, que tienen el conectivo de la conjunción, en un equipo sólo cambiaron el sentido de la desigualdad ($1>x>3$), mientras que en otro, además asociaron "significado opuesto" de la desigualdad con "opuesto" de un número y es por eso que se insiste en anteponer el signo "menos" a los números de la desigualdad ($-3\leq x\leq -1$). En gran grupo el profesor escribió por separado las desigualdades, explicitó la conjunción y relacionó con un diagrama de intervalos. Esto ayudó a que surgiera la desigualdad que niega la anterior ($1>x$ o $x>3$) y que se interpretara como complemento del intervalo.

Tarea 2 (Fragmentos 23-25 y 90-96, p. 229): Construir la tabla de verdad de la conjunción. En esta tarea se les dan dos enunciados para que después de analizar su significado al agregar el conectivo "y" puedan construir la tabla de verdad de la conjunción. Los enunciados fueron: (*P) hoy está lloviendo* y *(Q) hoy hace frío.*

En los equipos, para llenar la tabla de verdad no hay discusión y análisis, fue una tarea que encontraron fácil y directa. No obstante, fallaron al construir la opción, si *P* es *F* y *Q* es *F*, aquí convienen que *P y Q* son *V*. En gran grupo no se exhibió el error cometido por los equipos, ya que no se presenta problema alguno y corrigen. El profesor puntualiza aspectos importantes.

Tarea 3 (Fragmentos 26-38 y 97-105, pp. 230-231): Construir la tabla de verdad de la disyunción no excluyente. La tarea era que construyeran las tablas de verdad de la disyunción para el caso no excluyente (o bien *P* o bien *Q* o ambas), derivando información desde el enunciado: «Nuestros clientes en posición de la credencial de estudiante o empleado de la universidad tendrán derecho al 15% de descuento». Esta tarea fue realizada en forma correcta por ambos equipos. En la interacción, reconocieron el símbolo utilizado para la disyunción y lo asociaron con la unión. Se exhibieron ejemplos para que se entendiera la diferencia entre el sentido excluyente y el no excluyente, pero no fue entendido por todos, dado que para construir la tabla de verdad, se produjeron desacuerdos aunque se obtuvo de forma correcta. Socializar las respuestas en gran grupo transcurre sin problemas.

Tarea 4 (Fragmento 107-113, p. 23): Construcción de la tabla de verdad de la disyunción excluyente. Para construir la tabla de verdad de la disyunción excluyente (o bien *P* o bien *Q* no ambas) la situación dada fue: *Una niña se empeña en que su padre la lleve el domingo por la mañana al parque y por la tarde al cine de su barrio. El padre le dice: «No. Saldremos por la tarde e iremos al cine o al parque».* En las interacciones en equipo se dieron respuestas rápidas sin mostrar dudas. Un equipo lo hizo en forma correcta y otro falló en dos opciones; cuando *P* y *Q* son *V*, registraron que *P* o *Q* es *V* y cuando *P* es *F* y *Q* es *V* fallaron al considerar que *P* o *Q* es *F*, estos errores fueron discutidos en gran grupo apoyados por el profesor.

5.1.2.2.2 Sesión 4b: Conectivos lógicos

En esta sesión continúan para concluir la hoja de trabajo 4. Al igual que antes, debían construir tablas de verdad a partir del análisis de algunas proposiciones pero ahora se ocuparían de la implicación y de la equivalencia. En esta sesión se presentaron inconvenientes para la grabación, dado que se olvidaron los dispositivos necesarios y únicamente se realizó un análisis basado en registros escritos y en notas de las observaciones.

Tarea 5: Construcción de la tabla de verdad de la implicación

Para construir la tabla de verdad de la implicación consideraron las proposiciones, *P: hoy está lloviendo,* y *Q: Sofía y Oscar esta tarde verán una película,* una explicación breve de la implicación como conectivo entre enunciados, los símbolos utilizados (→, ","), la forma y su significado. Luego se les pidió que escribieran el significado de la implicación y su recíproca a partir de los enunciados dados y que explicaran sus diferencias.
El trabajo de uno de los equipos mostró que entendían la implicación en el sentido de dependencia de la hipótesis. Mientras que el otro equipo, omitió "esta tarde" al construir la implicación y su recíproca. En la socialización se destacó que las proposiciones están limitadas a condiciones de temporalidad y en matemáticas es importante respetar las condicionantes.

En cuanto a las diferencias entre la implicación y su recíproca, exploraron otras proposiciones del contexto cotidiano y concluyeron que la principal diferencia es que el valor de verdad no siempre es el mismo. Esto es importante ya que en el estudio exploratorio se encontró como error recurrente el de la recíproca [ver sección 3.2.3 Estudio de un caso del grupo A, p. 79].
Enseguida se comenta que existen formas equivalentes a este enunciado, se les mostraron ejemplos y se les pidió que intentaran completar con otras. En sus producciones encontramos enunciados equivalentes tales como: *Sofía y Óscar verán una película en la tarde sólo si hoy está lloviendo; Si Sofía y Óscar no ven una película en la tarde, tampoco estará lloviendo hoy*. No obstante, en otras formas se omitió la temporalidad (en la tarde) y también presentaron la implicación interpretándola vinculada a la "ocurrencia": *Si ocurre P entonces ocurre Q*. Antes, en la sesión 3 [4.4.1 Proposiciones matemáticas, p. 205], vimos que el contexto cotidiano es frecuente vincular "ocurre" con *verdad* y esto propicia que vean las proposiciones como "eventos".
A continuación completaron la tabla de verdad de la implicación y su recíproca a partir de enunciados trabajados. Se insistió en que para ello interesaba saber, por ejemplo, ¿cuándo es *falso* el enunciado *P implica Q*? Se sugirió que en los cuatro casos conviene preguntarse cuándo el enunciado es *falso* y que no pierdan de vista que es un enunciado condicional.
En un equipo se presentó la tabla de verdad correcta. En el otro equipo, cuando *P* es *falso* y *Q* es *verdad* consideran que la implicación es *falso*. Esto condujo a que en la socialización se explorara el papel condicional de la hipótesis y se estableciera una relación entre la tabla de verdad y el proceso de demostración, en virtud de que se insistía en que la hipótesis podía ser *falsa* o *verdadera*. Para explorar y comprender esto, se consideraron las posibilidades de la implicación: 1) *P* (*V*), *Q (V)*; 2) *P (V)*, *Q (F)*; 3) *P (F)*, *Q (F)*; y 4) *P (F)*, *Q (V)*. Luego, el profesor los cuestionó y condujo la discusión para que reconocieran que las situaciones relevantes en la demostración serían 1) y 2); la primera para probar que *P* implica *Q* y la segunda para probar que *P* no implica *Q*. Luego, la discusión se enfocó en las opciones 3) y 4) donde la hipótesis es *falsa* y se concluyó que no importa el valor de verdad de la conclusión para determinar que la implicación es *verdad*, dado que de lo *falso* se deriva cualquier cosa y se abordaron ejemplos que derivan en cuestiones *verdaderas.*

Para la tabla de verdad de la recíproca (*Q* implica *P*) persistió el error mencionado antes y en la socialización se insistió en que la hipótesis debe suponerse *verdadera* y en que de una hipótesis *falsa* se deriva cualquier cosa y por lo tanto en la recíproca si *Q* es *falsa* y *P* es *verdad*, *Q* implica *P* sería *verdad*.

Finalmente se les propuso el ejemplo; *Eduardo dijo: «voy al banco y si está abierto traeré mil pesos»*. Usando esto se les pide que realicen una deducción si se sabe que «viene con los mil pesos». En ambos equipos la respuesta fue adecuada, «entonces el banco está abierto».

Tarea 6: Construcción de la tabla de verdad de la bicondicional. En esta tarea se dio una breve introducción al conectivo $\leftrightarrow$, y a su uso en matemáticas para indicar que se dan de manera simultánea los casos $P\rightarrow Q$ y $Q\rightarrow P$. También se indicó que se lee: *P si y sólo si Q* o bien *P es necesario y suficiente para Q*. Los alumnos con ayuda de las tablas anteriores debían completar la tabla de valores de verdad de la bicondicional.
Los dos equipos realizaron de forma correcta la tabla. No obstante, vienen arrastrando el error derivado de la tabla de la implicación y la recíproca, que al final fue atendido en gran grupo y al socializar los resultados fueron los alumnos mismos, quienes corrigieron su error mostrando comprensión. Además cuando revisaron la tarea de llenar un concentrado de los *conectivos lógicos* para indicar según el conectivo cuándo se tiene una tautología, ellos mismos detectaron y corrigieron los errores cometidos sin ayuda del profesor.

Tarea 7: Retos sobre leyes lógicas. Esta tarea fue posterior a la socialización de las tareas anteriores. Para empezar se les dio la definición de una *ley lógica* como una proposición que es *verdad* cualquiera que sea el valor de verdad o falsedad de sus componentes. Enseguida se les proporcionó el ejemplo de la ***ley de no-contradicción*** (*no-(A y no-A))* plasmada en su tabla de verdad como tautología.
Finalmente en la tarea de desafío que se les pidió que comprobaran que las siguientes 5 proposiciones son leyes lógicas

1. *Ley del tercero excluido*: *A o no-A*
2. *Ley del método de demostración por contraposición: (A implica B) equivale a (no-B implica no-A)*
3. *No-(A o B) equivale a (no-A) y (no-B)*
4. *(o bien A o bien B) equivale a [(A y no B) o (no-A y B)]*
5. *Ley método reducción al absurdo: (A implica B) equivale [(A y no-B) implica (P y no-P)*

Uno de los equipos mostró justificaciones rápidas y poco cuidadas y se limitaron a interpretaciones vagas de las leyes lógicas. En contraste, en el otro equipo, construyeron de manera correcta tablas de verdad y mostraron buen manejo en todos los casos.

5.1.2.2.3 Conclusiones de las sesiones 4 a y 4 b

En conclusión, para estas sesiones se diseñó una hoja de trabajo con el propósito de que comprendieran el significado de los conectivos lógicos, las tablas de verdad asociadas y que esto se vinculara al proceso de demostración. Aunque en uno de los equipos (**B**) mostraron un buen desempeño, encontramos por otra parte, errores en el otro equipo (**A**) (e.g. en la tarea de construir la tablas de condicional y bicondicional) que son tratados en la socialización y que se puso especial énfasis en la importancia que tienen las tablas de verdad en el proceso de demostración y los estudiantes mostraron comprensión. Sin embargo, podemos ver que cuando los estudiantes realizaron la tarea de desafío para construir sus argumentaciones, en el mismo equipo que mostró mayores errores y menor cuidado no tuvieron en cuenta los valores de verdad para justificar que son leyes lógicas aún y cuando debían probar que son *V* en todos los casos. En el caso de este equipo se limitaron a "interpretar" en función del significado de los conectivos empleados, al contrario que el cuidado que mostró el otro equipo en la construcción de tablas de verdad para probar las leyes lógicas.

5.1.2.3 Sesión 5. Uso de ejemplos y contraejemplos

Análisis a priori

Con esta sesión se pretendía familiarizar a los estudiantes con el uso de ejemplos y contraejemplos en el contexto de la demostración matemática. Se esperaba que entendieran que para probar la falsedad de una proposición es suficiente exhibir un ejemplo en el que no se cumpla (contraejemplo), mientras que para probar la verdad de la proposición no es suficiente mencionar algunos casos, de manera que es necesario buscar estrategias para agotar todos los casos. Para lograr lo anterior, se organizó la actividad en cinco tareas que se trabajaron en pequeños grupos y posteriormente se socializaron en gran grupo.

Análisis a posteriori

La hoja de trabajo 5 se tenía prevista para una sesión, no obstante se realizó en dos sesiones. Que a continuación revisaremos.

5.1.2.3.1 Sesión 5 a

Tarea 1. Se involucra un número finito de casos. En esta tarea, a partir de la afirmación, *en este salón todos tienen menos de 19 años,* los alumnos describieron algún camino para averiguar si el enunciado era *falso* o *verdadero*. Las respuesta en ambos equipos nos dejó ver que; para confirmar que la afirmación es *falsa* basta con exhibir un ejemplo para el que no se cumpla. Y ambos equipos también sugirieron que para probar que es *verdad*, todos los posibles ejemplos deben confirmar la afirmación. A pesar de ello, ninguno de los equipos consideró el caso en que un estudiante tenga 19 años, para ellos lo contrario de menor era mayor y no mayor o igual. En grupo tampoco se profundizó el caso de un alumno de 19 años, pero se cumplió con el propósito.

Tarea 2 (Fragmentos 7-30, p. 237 y 214-220, p. 238): Cómo probar verdadero o falso. En esta actividad se les pedía que mencionaran qué se necesita para probar que un enunciado es *falso* y qué para probar que es *verdad*. En un equipo, para probar que un enunciado es *falso* se reconoció la necesidad de encontrar un ejemplo que cumpliera con la hipótesis y que «contradiga el enunciado», o bien la conclusión sea *falsa*. Ellos pretendían probar que es *falso* el enunciado, la palabra "contradiga" los llevó a enfatizar que el ejemplo debe ser *verdad*. Por otra parte, consideraron que «no encontrar ningún ejemplo que haga *falso* el enunciado» constituye una prueba de que es *verdad*, no obstante "no encontrar" no constituye una garantía de no existencia. Al igual que en Lehrer & Romberg (1999), encontramos que la dificultad para encontrar un contraejemplo es tomada por los estudiantes como una verificación de la proposición. En el grupo no todos entendieron ejemplo y contraejemplo de la misma manera. Por otro lado, el otro equipo, acordó que «*para probar que el enunciado es F con al menos una de las condiciones del enunciado* *que no se cumpla»* y «verdadero *que todas las condiciones establecidas por el enunciado las cumpla»* En esta respuesta se tomó en cuenta que todas las condiciones establecidas se cumplían para que fuera *verdad* y si una de ellas no se cumpliera sería *falso*.

En gran grupo no se exhibe el conflicto de la discusión en equipos, encontrar un ejemplo *verdadero* que contradiga el enunciado, es decir un contraejemplo. Aquí para probar que un enunciado es *falso* fue suficiente encontrar un ejemplo que hiciera *falso* el enunciado. Aunque esto último no se hizo explícito ni se insistió en ello como en los equipos. Para que fuera *verdad* el enunciado, se reconoció la necesidad de ver que todos los ejemplos lo cumplieran y para que fuera *falso* era suficiente uno que no cumpliera. Finalmente el profesor rescató elementos centrales y mencionó como técnica de demostración el método exhaustivo. Sin embargo, algo que tampoco se discutió fue que la dificultad para encontrar el contraejemplo (si no han sido exploradas todas las posibilidades) no basta para que el enunciado sea tomado como *verdad*.

Tarea 3 (Fragmentos 33-57 y 221-234, pp. 238-239): Probar falsedad o refutar. En la tarea había que refutar que: 1) Para todo número real x, $x^2>x$, que 2) Todo número primo es par, y por último que 3) para todo p primo, existe un entero k tal que $p=2k+1$.
Para el desarrollo del primer ítem, en uno de los equipos exhibieron como contraejemplo el 1, justificaron y llegaron a un acuerdo general que constituye una prueba de que la proposición es *F*. Por su parte, en el otro equipo el contraejemplo encontrado fue $x=1/2$ y justificaron diciendo que, $x^2=¼$ y $¼<1/2$. Los contraejemplos de ambos equipos se discutieron y aceptaron.
Para refutar la proposición 2, en un equipo utilizaron las definiciones de primo y par producidas previamente. A partir de ahí, exhibieron como contraejemplos el 3 y el 5. Además, se dieron cuenta que los primos tienen la forma $2k+1$ y que sólo 2 es un ejemplo *verdadero* y los demás son contraejemplos. Mientras que en el otro equipo mostraron al 7 como contraejemplo justificando que «7 es número primo y no par». En el grupo se aceptó lo producido en equipos.
Para el tercer ítem, en uno de los equipos no tuvieron en cuenta que mientras en el anterior sólo un ejemplo hacia *verdad* la proposición y cualquier otro primo era un contraejemplo, ahora sucedía lo contrario, únicamente el 2 era un contraejemplo y cualquier otro primo hacía *V* la proposición. Probablemente esto hizo que algunos se concentraran en buscar cómo hacer que el 2 tuviera la forma $2k+1$ y otros trataban de convencerlos que era contraejemplo y por tanto la proposición era *falsa*. En este equipo se percibió poco cuidado en el uso de cuantificadores y del dominio de k puesto que escribieron «*para* $p=2$, $2k+1\neq 2$». Por otra parte, el otro equipo registró que «cuando $k=4 \Rightarrow 2(4)+1=9$. El número 9 no es primo». Este equipo no tomó en cuenta que éste no es un contraejemplo, dado que la proposición especifica que es *para todo primo p* y justamente el 9 no es primo. Esto se recuperó en la discusión en grupo, sin embargo el profesor sólo mencionó que no es contraejemplo sin ofrecer argumentos para convencerlos y tampoco provocó que reflexionaran por qué no lo es. En esta parte no hay reconocimiento del papel de la hipótesis.

Tarea 4 (Fragmentos 68-211, pp. 240-242): Verdad o falsedad. Se les presentó la proposición «Para todo número [natural] n, se tiene que n^2+n+41 es primo», con una tabla para ensayar con diferentes números naturales, registrar los resultados de la evaluación y decidir si este era primo. Luego se les pidió que indicaran cómo demostrar la *verdad* o *falsedad*.

En un equipo se analizó la transcripción, percibiendo que se siguen tres líneas discursivas y que insistentemente se saltan de una a otra. Las líneas son: 1) ensayar con diferentes números, 2) considerar la paridad de n y 3) probar por inducción matemática manipulando expresiones algebraicas de manera errónea en el afán de acomodar los cálculos para que resulte *V* .

<u>Línea 1: Ensayar con diferentes números</u>. Primero los estudiantes asumieron que el dominio era el de los enteros, dado que en el enunciado faltó especificarlo y más adelante el profesor aclaró que *n* debía ser número natural. Ensayaron evaluando la expresión para algunos valores (3, 4, 5, 7) y obtuvieron como resultado un número primo. Primero atribuyeron este hecho a que probaron con los primos (3, 5) y luego evaluaron con un número que no es primo y obtuvieron el mismo resultado. Intentaron encontrar un patrón basados en los ejemplos o resultados (ver p. 26 en este trabajo) y dedujeron que el 1 (unidad en 41) los volvía impares, ya que en el paso previo a sumar el 41 tienen un número par y verificaron algunos de sus ejemplos. Hasta entonces consideraban que era *verdad* el enunciado, aunque buscaban un contraejemplo, mostrando comprensión de que la dificultad para exhibir un contraejemplo no garantiza la no existencia. No obstante para tal búsqueda ensayaron con números cada vez más grandes dejando ver su creencia de que la búsqueda del contraejemplo está vinculada con el tamaño del número. Ensayaron con el 144 obteniendo 20921, el cual es primo, pero sustentaron al revisar que no era divisible entre algunos números (*7, 3, 5, 6, 11, 13)* y en consecuencia no era divisible entre sus múltiplos.

<u>Línea 2: Consideraron la paridad de n</u>. En esta parte la discusión descansó en argumentos basados en los resultados de los ejemplos. Los estudiantes insistieron en generalizar a partir de la búsqueda de un patrón basados en resultados de los ejemplos (RPG ver p. 26 y Harel 2001, p. 191). Esto fue visible cuando expresan que el número obtenido de n^2+n es siempre par y al sumarle *41* resultaba impar. Este patrón lo basaron en ejemplos encontrados y no en su estructura. Aunque esta conjetura es cierta y es sencillo probarla, no lo hicieron. Ensayaron también sobre la paridad vinculando con fuerza la definición de número primo asociada a impar. Esto lo vimos cuando piensan en el *2* como no primo y número primo lo entienden como impar, aunque al final acordaron que no todos los impares son primos. Por otro lado, buscando otra manera de averiguar el valor de verdad de la proposición, intentaron transformar la expresión n^2+n+41 en $4k^2+6k+43$ al considerar a *n* de la forma *2k+1* y se plantearon igualar la expresión $4k^2+6k+43$ a un primo *p*, realizaron manipulación algebraica y obtuvieron diferentes valores de verdad en cada parte de la igualdad para llegar con ello a una contradicción. Esto deja ver que intuían que era *F* la proposición y pensaron en la demostración por reducción al absurdo. No obstante, abandonan este camino.

<u>Línea 3: Intentaron probar por inducción matemática manipulando expresiones algebraicas de manera errónea en el afán de acomodar los cálculos para que resultara V.</u> En el equipo intentaron generalizar y probar por inducción matemática. Se encaminaron a probar que se cumplía para *k+1,* aunque no hicieron explícito que *F(1)* cumple con ser primo, ni exhibieron el supuesto de que *F(k)* sea primo. Al tratar de probar que *F(k+1*) era primo obtuvieron de n^2+n+41 la expresión $(k+1)^2+k+1+41$. Al manipular la expresión de manera separada intentaron resolver la expresión como ecuación, tomando primero $(k+1)^2=0$ y encontrando la raíz $k=-1$. Luego esa raíz, cometiendo otro error, la sustituyeron en toda la expresión $(k+1)^2+k+1+41$ sin tener cuidado de los signos y eso los condujo a encontrar el 47. Se percibió confusión en la relación entre *n* y *k* mezclando ideas y procedimientos algebraicos erróneos en un intento por generalizar y acomodar las expresiones para que funcionara. Esto confirma la creencia de que en ocasiones interpretan que al realizar cálculos o demostrar los maestros "acomodan" los cálculos o recurren a artificios que no resultan transparentes para ellos.

Finalmente mostraron un gran número de ejemplos de valores para *n* en los que n^2+n+41 les dio como resultado un número primo, con ello determinaron que era *verdad*, dado que los diferentes intentos por probar que era *falso* no prosperaron.

En gran grupo, aunque antes habían considerado que la proposición era *verdad*, un estudiante se mostró consciente de que no era suficiente el número de casos verificados para que fuera *verdad*. De acuerdo con esto, para Weber (2001) muchos estudiantes creen que mostrar que un teorema general es válido con un ejemplo específico, o quizás con varios ejemplos, es suficiente como demostración. También en los estudios que realizó Wason (1966), observó que los sujetos mostraban el sesgo de la confirmación, es decir, el principal error que tienen los estudiantes es que intentan encontrar evidencia que confirme la regla en lugar de buscar una evidencia que la falsee. Por otra parte, en los estudios realizados por Lehrer & Romberg (1999), la dificultad para encontrar un contraejemplo es tomada por los alumnos como una verificación de la proposición.
También, aún cuando un alumno afirmó que se demostró por inducción matemática, eso no se discutió para verificar los pasos seguidos y encontrar el error. El profesor más bien afirmó que la proposición era *F* y exhibió como contraejemplo el $n=41$.

Tarea 5 (Fragmento 255-344, pp. 244-245): Un acertijo de números primos felices. En esta tarea se les proyectó un video[35] donde aparece un acertijo, que es necesario contestar para conocer el número que les daría apertura a una puerta de seguridad. El acertijo es: ¿qué número sigue en la serie 313, 331, 367? Se le pidió al profesor que no realizara sugerencias y los dejara trabajar interviniendo sólo en caso necesario y a manera de cuestionamiento. No obstante, sugirió a los alumnos que los números de la serie eran números felices, sin recordarles la definición (trabajada en la sesión 1) y sin aclararles que además eran números primos.
Los estudiantes buscaron regularidades. La primera regularidad encontrada fue que las dos últimas cifras de la serie, al conmutarlas los lleva al siguiente número y sugirieron que el que seguía era el 376 (número feliz). Un estudiante observó que los números de la serie eran primos y a partir de esto combinaron esta observación con la de hacer desaparecer la cifra de la centena de los números de la serie. Esto puede atribuirse a que al quitar el 3 siguen siendo felices. Esto fue utilizado para concretar un argumento que permitiera descartar al 376 como candidato a siguiente número en la serie, dado que se observó que entre el 13 y el 31 existían más números felices, así que debían tener otra característica: 13 y 31 son primos. Aquí fueron trabajando en la construcción de una respuesta correcta sentada sobre argumentos no válidos, es decir, los números de la serie 313, 331, 367, son felices y primos y 13, 31, 67 también lo son, pero por ejemplo el 49 no es primo y el 349 sí lo es. Si los estudiantes continuaran en esta línea podrían llegar a completar la serie de los primos de dos dígitos a partir de 67 (71, 73, 79) y luego descartarían los que no son felices (71 y 73) para concluir que 79 es el siguiente primo feliz. Pero 371 y 373 son primos y no son felices y 379 es primo y feliz.
Continuaron verificando otros números como el 373, pensando que si el 73 es primo entonces 373 también lo era. Descubrieron que no era número feliz a partir de la conjetura planteada en la primera sesión de la ingeniería en la que se indicaba que si en el proceso de verificación de número feliz, aparecía un 5, este se volvía ciclíco y se concluía que no era número feliz.

Luego, la fuerte asociación de números primos con impares los condujo a comprobar si el 385 es feliz a pesar de no ser primo. Insistieron en la equivalencia de los números de la serie con los

[35] disponible en http://www.youtube.com/watch?v=ee2If8jSxUo

números al prescindir de la primera cifra. A partir de bases erróneas, obtuvieron la respuesta correcta; el 379 es el siguiente primo feliz.

Del trabajo en pequeño grupo llegaron a que la característica era que los números de la serie eran felices y aportaron las respuestas: i) «*376 es el siguiente porque en la serie son números felices consecutivos aparte en los 2 primeros números sus 2 últimos dígitos se intercambian 313⇒331»*; ii) «*379 es primo y feliz, es el que sigue»*; iii) que «*están entre 300 y 400, están en orden ascendente, los dos primeros sus dos últimas cifras conmutan. Que son felices».* Y que el número que sigue es «*376 por las razones anteriores*».

En gran grupo compartieron respuestas generadas y revisaron nuevamente el video hasta el momento en que se planteó que el siguiente número de la serie debía ser primo y feliz (sin mencionar el número). Recordaron la definición de número primo feliz (construidas en la sesión 1) y convinieron que: «son los números que sólo son divisibles entre ellos mismos y el *1* y aparte la suma reiterada del cuadrado de sus dígitos es *1*». Luego intentaron probar que *313, 331* y *367* eran números primos felices. En sus respuestas observamos que no tuvieron ningún problema para entender la definición de número feliz, realizaron adecuadamente la comprobación de suma reiterada del cuadrado de los dígitos, aunque persistió el error de utilizar el signo "=" para indicar la ejecución de una tarea y para vincular las iteraciones al igual que en la sesión 1. En esta parte resultó provechoso el uso de ejemplos y no ejemplos de la primera sesión de esta ingeniería, como estrategia para la comprensión de la representación verbal de la definición (p. 172). En el caso de los primos verificaron que unos cuántos primos no son divisores del número y eso era suficiente para decidir que es primo. En esta sesión tenían calculadoras y acceso a software como *Scientific Work Place,* conocían la instrucción para verificar si un número es primo, aunque no fue utilizada.

Finalmente vuelven a la serie 313, 331, 367,… y ambos equipos respondieron que el número siguiente era 379. Retomar el video ayudó a quienes no habían llegado antes a la respuesta, dado que antes sólo consideraban que los números de la serie eran felices y que además los dos primeros conmutaban sus dos últimas cifras, así que los siguientes dos para ellos debían seguir ese patrón y por tanto su respuesta previa fue 376. En la discusión se concluyó que estos criterios no eran suficientes si quisieran encontrar el quinto número en la serie.

Tarea 6 (Fragmento 362-471 p. 246-249): Construcción de un programa para determinar si un número es o no feliz. Para esta última tarea, el profesor pidió que utilizaran la calculadora TI Voyage, Excel o cualquier otro software para realizar un programa que les permitiera verificar si un número es o no feliz, es decir, que construyeran una *función* que les devolviera la suma de los cuadrados de los dígitos. El profesor cuestionó cómo podrían hacerlo y los estudiantes mencionaron que podían utilizar la representación de un número considerando la posición de cada una de sus cifras. También que podían averiguar cocientes y residuos al dividir entre 10 o 100. La construcción de la definición de divisibilidad realizada anteriormente, centrada básicamente en ejemplos, no ejemplos y el paso a formas genéricas permitió realizar la tarea, ya que la programación es tarea de mayor complejidad y requiere la comprensión de los conceptos y procesos de generalización.

Los estudiantes, para resolver la tarea planteada, decidieron utilizar como apoyo el software Excel. Al principio se percibieron acciones simples de reconocimiento de los conocimientos a emplear: intentaron dividir entre 10 el número y elevarlo al cuadrado y recordaron detalles sobre el uso del software. Luego se provocó la reflexión en el equipo sobre el hecho de que justamente les

interesaba aislar los dígitos y de la división entre *10* necesitaban o bien calcular el residuo o el cociente (parte entera de la división).
A continuación, se cuestionaron que el número que tenían en la celda *A3* era *221* y al dividirlo entre *10* y tomar su parte entera no se tendría un *2* sino un *22.* Esto los llevó a utilizar el residuo y además decidir tomar el residuo de la división entre *100* y a eso restarle el residuo de la división del número entre *10*, llegando así a construir una fórmula que en general les permitía aislar el dígito de las centenas. Volvieron a explicar pasando de la expresión general al ejemplo particular (*221*) para convencer a quien aún mostraba duda y luego elevaron al cuadrado. Aún cuando lograron la expresión general buscaban verificar con ejemplos.
Encontramos un hecho antes observado (e.g recostrucción de la definición de número racional): la fuerte asociación de "raíz" con la "división" y aquí de manera insistente se utilizó el término raíz para referirse al residuo.
Trataron de encontrar una expresión para obtener el dígito de las centenas al cuadrado y para ello intentaron con el residuo de la división entre *100*. El trabajo previo les permitió pensar en la división entre *1000* y que el residuo sería el mismo número por ser de *3* cifras y a eso tendrían que restarle el residuo de la división del número entre *100*, es decir, los dos últimos dígitos. Esto los condujo a dividir entre 100 para obtener el dígito de las centenas en un número de *3* cifras y decidieron elevarlo al cuadrado.
Obtuvieron la expresión para encontrar el dígito de las unidades al cuadrado, y sumando las expresiones parciales que los regresa a la tarea inicial: una fórmula que les devuelva la suma de los cuadrados de los dígitos de un número. Hasta el momento, únicamente se tenía la primera suma del cuadrado de los dígitos y tenían que hacerla de manera reiterada para poder determinar si el número era feliz. Los alumnos usaron características de Excel para que a partir del resultado obtenido se repitiera el proceso cuantas veces fuera necesario. Decidieron que 30 iteraciones serían suficientes para verificar que un número fuera feliz. Después de cumplir con la tarea se percibió en los alumnos gran satisfacción al haber encontrado su propia fórmula y la ensayaron con diferentes números mostrando entusiasmo cuando lograban dar con un número feliz.
Finalmente realizaron su escrito y mostraron al profesor ejemplos para convencerlo de que su programa funcionaba para saber si un número es o no feliz.

Para demostrar la verdad o falsedad de una proposición o enunciado matemático. ¿Cuándo es suficiente exhibir un caso y cuándo no lo es?
Las respuestas de los equipos mostraron comprensión de qué para probar que es falso es suficiente dar un ejemplo que no satisfaga la proposición y para probar que es verdad no es suficiente mostrar que se cumple para algunos casos es necesaria una revisión exhaustiva.

5.1.2.3.3 Conclusiones de la sesión

Resulta conveniente destacar que el profesor al paso de los días se mostró muy satisfecho con esta hoja de trabajo. Primero porque la tarea trascendió al aula en el sentido de que los siguientes días continuaron mostrándole que tenían nuevas expresiones o fórmulas que funcionaban utilizando otros conceptos. Por ejemplo, que funcionaba también si lo hacían con la parte entera (cociente) de la división y la expresión dada era:

(entero(número/100))^2+(entero((número-(100*entero(número/100)))/10))^2+(número-(entero(número/10)*10))^2

También realizaron rutinas en la calculadora y programas en otros lenguajes y, al trabajar con dichos programas obtuvieron conjeturas que se fortalecían al probar con números de más cifras (e.g. encontrar un 5 en el proceso implica que el número no es feliz ver figura 43). Esto sorprendió gratamente al profesor que no esperaba que este tipo de actividades estimularan a los estudiantes para seguir indagando, pero menciona que lamentablemente los tiempos y compromisos escolares no permiten continuar con esta exploración. Además tanto estudiantes como maestros no están habituados a este tipo de dinámicas, ya que en el nivel universitario se privilegian las prácticas formales, el énfasis está puesto en la demostración formal y no se le da importancia al contenido estrechamente ligado con esta tarea: como es el desarrollo intuitivo de ideas, la visualización, la organización de la información en tablas, las prácticas para que los estudiantes exploren y encuentren patrones que les permitan producir conjeturas o crear sus "propias fórmulas" como en este caso. En este sentido, diferentes investigadores han probado que las representaciones tabulares pueden ayudar a los estudiantes para ver relaciones generales, obtener patrones y representaciones algebraicas. Por ejemplo, Rojano & Butto (2004) reportaron que las grandes dificultades que tuvieron algunos alumnos para trabajar secuencias geométricas en distintos contextos, fueron superadas sólo cuando se les presentó una tabla donde tuvieron la oportunidad de comparar valores numéricos. Como conclusión se considera que: 1) La generalización es fundamental para el pensamiento matemático y algebraico; 2) La generalización algebraica es un elemento primario hacia la abstracción matemática y puede ser desarrollada a partir del trabajo con patrones o regularidades que favorecen la articulación de la generalización en situaciones cotidianas y que 3) para aprender el lenguaje algebraico es importante que el alumno tenga algo que comunicar, para lo que se necesita percibir un patrón o una regularidad y después intentar expresarlo y comunicarlo a alguien.

Figura 57. Conjetura de los alumnos para determinar que un número no es feliz

$\boxed{1023}$	100	4	9	113
113	1	1	9	11
11	0	1	1	2
2	0	0	4	4
4	0	0	16	16
16	0	1	36	37
37	0	9	49	58
58	0	25	64	89
89	0	64	81	145
145	1	16	25	42
42	0	16	4	20
20	0	4	0	4
4	0	0	16	16
16	0	1	36	37
37	0	9	49	58
58	0	25	64	89
89	0	64	81	145
145	1	16	25	42
42	0	16	4	20
20	0	4	0	4
4	0	0	16	16

$\boxed{832}$	64	9	4	77
77	0	49	49	98
98	0	81	64	145
145	1	16	25	42
42	0	16	4	20
20	0	4	0	4
4	0	0	16	16
16	0	1	36	37
37	0	9	49	58
58	0	25	64	89
89	0	64	81	145
145	1	16	25	42
42	0	16	4	20
20	0	4	0	4
4	0	0	16	16

De acuerdo con lo observado en esta sesión se sugiere a los profesores, al igual que Blanton y Kaput (2003), que fomenten en sus alumnos la cultura de modelar, explorar, comentar, predecir, suponer y poner a prueba sus ideas, además de poner en práctica sus habilidades y tener la oportunidad de descubrir patrones, realizar conjeturas o generalizaciones sobre hechos y relaciones matemáticas con su respectiva justificación.

5.1.3 Confrontación del bloque III Métodos directos de demostración

Este bloque se diseñó para cumplir los siguientes objetivos: 1) Desarrollar en los estudiantes la noción de pregunta clave como apoyo para derivar información matemática nueva de la información disponible, 2) apoyar la comprensión y desarrollo de habilidades para manejar el método directo de demostración de implicaciones a través de la extracción de significado de sus elementos y 3) desarrollar en los estudiantes habilidades para organizar información y escribir demostraciones para comunicarlas en las formas apropiadas del registro matemático.

Se conformó en cuatro sesiones 7, 8, 9 y 10 y para desarrollarlas se diseñaron tres hojas de trabajo para documentar el pensamiento y acuerdo de los pequeños grupos, las hojas 6 y 7 para las sesiones 7 y 8 y la hoja 8 para las sesiones 9 y 10.

5.1.3.1 Confrontación de la Sesión 7 : Demostrando con el método avance-retroceso

Análisis a priori
Esta sesión, al contrario a lo planeado se llevó a cabo en dos sesiones. Para ella se diseñó la hoja 6 (ver anexo A) con el propósito de desarrollar en los estudiantes la noción de pregunta clave como estrategia para derivar enunciados *verdaderos* a partir de la extracción de significado de la información disponible hasta el momento, o bien tomando en cuenta la información que es necesaria para llegar a la conclusión. En esta parte, se esperaba que pusieran en juego el manejo de definiciones (trabajadas en el bloque I, sesión 1), el manejo de conectivos lógicos, estructura de las implicaciones y papel condicional de la hipótesis (tópicos abordados en el bloque II, sesiones 3, 4 y 5). Este conocimiento es crucial para el manejo de los procesos de avanzar y retroceder en el método de demostración directa.

Análisis a posteriori
Al iniciar la sesión 7, el maestro introdujo ejemplos que ilustraban el método directo de demostración y los elementos implicados en él: *pregunta clave, proceso avanzar y proceso retroceder*. Señaló la importancia de identificar como *pregunta clave*, la pregunta específica obtenida al cuestionarse cómo se puede probar que el enunciado dado es *verdad* a partir de la información disponible hasta el momento. También, a través de los ejemplos, ilustró los procesos avanzar y retroceder como el tránsito de un enunciado a otro, es decir, el *proceso avanzar*, se da al derivar a partir de un enunciado verdadero P otro enunciado verdadero P_1, mientras que el *proceso retroceder*, es el que se da al derivar a partir de un enunciado Q (en este caso la conclusión) un nuevo enunciado, Q_1, con la propiedad de que si Q_1 es verdadero, entonces Q también lo es. Esto se hace formulando la pregunta clave y respondiendo a ella.
Uno de los ejemplos que introdujo fue: *Demostrar que dados a, b y c enteros. Si a divide a b y b divide a c, entonces a divide a c.*
Primero se aseguró que los estudiantes entendieran el lenguaje (factor, divisor, etc) y el manejo adecuado de las definiciones (divide, divisible, etc.). Para analizar la demostración se determinaron los elementos del enunciado a probar, se propusieron las preguntas claves adecuadas y sus respuestas y se aplicó el proceso avanzar y el proceso retroceder para organizar la demostración como aparece en la tabla 38, p. 250 (no se sigue un orden en el avance y el retroceso).

Una vez aclarado el método a seguir para demostrar las proposiciones, mediante el ejercicio propuesto y resuelto en grupo con ayuda del profesor, la tarea que enfrentaron los alumnos fue probar la proposición: *Si el triángulo rectángulo XYZ con catetos de longitudes x e y e hipotenusa de longitud z tiene área* $z^2/4$*, entonces el triángulo XYZ es isósceles.*
Los alumnos interactuaron en pequeño grupo (fragmento 2-85 pp. 251-254) y primero recordaron las definiciones de triángulos rectángulo e isósceles, cateto e hipotenusa y en ocasiones utilizaron el término arista como sinónimo de cateto. No obstante, en su escrito dieron muestra de mayor cuidado en el manejo de definiciones (ver respuestas tabla 39, p. 252 y tabla 40, p 254).
A continuación, se les pidió que determinaran los elementos que componen el enunciado a probar y que, buscaran preguntas claves y sus respuestas para estructurar y organizar la demostración. En los equipos identificaron la información dada (hipótesis) y lo que probarían.

En el proceso, concibieron al triángulo equilátero como caso particular del isósceles. Más adelante, descartaron la observación al considerar la hipótesis; el triángulo es rectángulo. Dado que tenían claro a dónde llegar, y el papel de la hipótesis, derivaron la información conveniente. Primero al tratarse de triángulo rectángulo usaron el teorema de Pitágoras para expresar el cuadrado de la longitud de la hipotenusa (z^2) en función de los catetos y, posteriormente, sustituyeron ese valor en el área que planteaba la hipótesis $z^2/4$, quedando expresada como $(x^2+y^2)/4$. Además, derivaron equivalencias al relacionar el área que tenían con la fórmula para encontrar el área de cualquier triángulo $xy/2$. También identificaron que cualquiera de los catetos podía ser altura del triángulo por ser rectángulo.
Desde la equivalencia $xy/2=(x^2+y^2)/4$, simplificaron obteniendo $xy=(x^2+y^2)/2$. Al transformar la igualdad anterior en $2xy=x^2+y^2$ dedujeron que para que fuera posible se debe dar que $x=y$ en cuyo caso la igualdad quedaría $2x^2=2x^2$. Luego, al igualar a cero la expresión se dieron cuenta que se trataba de un trinomio cuadrado perfecto y lo factorizaron como $(x-y)^2$ deduciendo que $x-y=0$ y por tanto $x=y$. Esto no fue claro para todos y, un estudiante expresó la necesidad de un ejemplo específico para verificar la validez del argumento. Como respuesta le plantearon ejemplos para convencerlo. Enseguida repasaron el proceso seguido y organizaron adecuadamente su demostración. En ambos equipos expresaron con claridad la demostración en una tabla de dos columnas, la primera para preguntas clave y la segunda para organizarla.
Finalmente, el profesor retoma el ejemplo que utilizó al inicio de la sesión para explicar el método, y expresa la importancia de dar una versión ordenada y condensada una vez que tienen claridad de los argumentos utilizados. Él realizó dicha versión en el pizarrón y les pidió que hicieran lo mismo con el resultado recién demostrado. Las versiones finales de sus demostraciones fueron presentadas sin la tabla y en ambos equipos se comunicó una demostración coherente y ordenada mostrando consolidación del *registro matemático* (Forman 1996) como un género de discurso especializado utilizado por personas del medio. En este caso hay un manejo y comprensión de la proposición y su demostración y la forma de comunicarla en el lenguaje de la disciplina.

Continuando con la sesión pasaron a una serie de ejercicios propuestos con el objetivo de reforzar la idea de *pregunta clave* para retroceder en el método *avance-retroceso*. Una *pregunta clave* es una pregunta abstracta obtenida al cuestionarse cómo se puede probar que un enunciado dado es *verdad*. La pregunta se formula haciendo referencia a sus conocimientos generales sobre el objeto o concepto, por ejemplo si se trata de probar que un determinado triángulo *ABC* es isósceles, la pregunta puede ser ¿cómo saber que un triángulo es isósceles?
Después de una explicación previa se les presentaron las siguientes cuestiones con las que se pretendía lograr que manejaran la idea de pregunta clave:
Para demostrar que *"Si x es un número real, entonces el valor máximo de* $-x^2+2x+1$ *es mayor o igual que 2"*. ¿Cuál de las siguientes preguntas clave es incorrecta? Justifica.
a) ¿Cómo probar que el valor máximo de una parábola es mayor o igual que un número?
b) ¿Cómo probar que un número es menor o igual que el valor máximo de un polinomio?
c) ¿Cómo probar que el valor máximo de la función $-x^2+2x+1$ es mayor o igual que un número?
d) ¿Cómo probar que un número es menor o igual que el máximo de una función cuadrática?

Para resolver la cuestión (Fragmento 88-145 pp. 255-258), no aplicaron la idea de que una pregunta no contiene información específica y éste fue el argumento principal para identificar c) como la opción incorrecta. Inicialmente, intentaron analizar las opciones, estudiaron previamente el enunciado tratando de identificar hipótesis y conclusión. Posteriormente, la interacción entre ellos permitió comprender el problema, ahí el uso de lenguaje apropiado jugó un papel determinante. Encontramos que no se consideró el valor máximo que toma $-x^2+2x+1$, en su lugar

se plantearon sacar el valor máximo de *x;* aunque finalmente se dieron cuenta de su error y buscaron el mayor valor en el eje *y*. Entendieron *y* como la imagen de *x* según la ley $-x^2+2x+1$ y descartaron los valores de $y<2$, al considerar que debían probar que son mayores o iguales que 2 y se dieron cuenta que el máximo de la función se da cuando $x=1$.
Una vez comprendido el enunciado, procedieron a analizar las opciones para identificar cuál no es una pregunta clave o cuales eran equivalentes. En principio, pensaron que la opción c) al contener la información específica que se pedía en la proposición, era adecuada y no estaba claro para ellos que las preguntas claves, al ser un apoyo para realizar la demostración, no es conveniente que contengan información específica. Luego reconocieron los elementos que les permitieron determinar la equivalencia de b), d) y a). Dado que $-x^2+2x+1$ era un polinomio, de grado 2, se dieron cuenta que se podía considerar función cuadrática y que también era parábola. Consideraron que a) era equivalente a b) y d), analizando el orden de los términos que forman parte de cada pregunta y tomando en cuenta el tipo de desigualdades (en a) es menor o igual y en b) y d) mayor o igual) y el tipo de números que se están comparando. Hasta entonces, no discutieron acerca de la opción c), sólo mencionaron sin argumentar que era inadecuada y en resumen, consideraron a), b) y d) como posibles preguntas claves.
Más que centrarse en identificar preguntas clave, que era el propósito, se interesaron en probar la proposición. En este sentido, reconocieron elementos disponibles, la proposición a probar e identificaron qué pregunta ayudaría a avanzar en la prueba.
Buscaron elementos comunes de las preguntas clave, por ejemplo se fijaron en el signo "mayor o igual" para expresar que a) y c) se parecen en el sentido de la desigualdad, indican que b) y d) comparten el signo "menor igual", tratan de encontrar además del signo relación entre parábola y función cuadrática. Un alumno reconoció que ciertamente los signos se han invertido al igual que los elementos, pero eso no les permite avanzar en la demostración, lo que deja ver que no tienen clara la tarea de identificar preguntas clave. Al pensar que un polinomio no es necesariamente parábola, consideraron la posibilidad de eliminar la opción b). Finalmente decidieron descartar a) ya que no incluye la función, argumentando que para ellos es un elemento fundamental para construir la prueba, sin embargo bajo este argumento no consideraron que en b) y d) tampoco aparece la función de manera explícita. Así reconocen como preguntas clave b), c) y d) argumentando que sí contienen la información necesaria para la demostración. El término pregunta clave, aún no se comprendía del todo ya que consideraban importantes los elementos específicos del enunciado a probar, justo lo contrario, ya que más bien se considera en abstracto como estrategia para darse cuenta de los elementos generales a utilizarse en la demostración.

Al ver la dificultad intervino el profesor (Fragmento 146-170 pp. 257-258) interpretando "pregunta clave", de forma diferente a como estaba planificado, sin considerarla como algo abstracto, sin símbolos e información específica. Centró la discusión en conducir a los alumnos a ver la equivalencia de las opciones y el cambio en el sentido de los símbolos de la relación de orden. En cuanto al polinomio concluyeron que si en general saben encontrar el valor máximo de un polinomio pueden hacerlo para el caso particular del ejercicio. Luego para el a) en el que figura la parábola, determinaron que no es sencillo encontrar el valor máximo para cualquier parábola influenciados por un dibujo que realiza el profesor de una parábola con vértice fuera del origen y el eje de simetría no paralelo a ningún eje (también creemos que influye la actividad de construcción de la parábola a partir de su definición como lugar geométrico del primer bloque de la ID). Un estudiante habló de la posibilidad de hacerlo a partir del criterio de la derivada y el profesor puntualiza la necesidad de tener expresada la función. Esto último nos lleva a concluir que al requerir información específica el profesor no entiende la pregunta clave con un formato más abstracto. Esto nos habla de la necesidad de replantear la noción de pregunta clave con un enfoque centrado en su función, más que en su apariencia, es decir, dirigido hacia preguntas que ayuden a encontrar pistas para avanzar, más que considerar si debe o no contener símbolos o información específica.

En el escrito ambos equipos coinciden y su argumento es la necesidad de información específica (ver respuestas en tabla 42 p. 259), esto deja ver que en la sesión no se cumple con el objetivo y es necesario fortalecer la idea de pregunta clave y revisar la aproximación para lograr comprensión.

5.1.3.1.1 Sesión 7 b: Demostrando con el método avance-retroceso

El tiempo previsto para el desarrollo de la actividad no fue suficiente y al día siguiente se continuó con la siguiente parte (fragmento 1-257 pp. 259-266).

La cuestión planteada para los equipos era que para dos problemas propuestos elaboraran una lista con al menos dos preguntas claves. La indicación fue que las preguntas no deberían contener símbolos ni notación del problema tratado. Esto último se enfatizó dado que en la sesión anterior se percibió confusión en torno al concepto de pregunta clave.

Para la primera proposición propuesta, a) *Si n es un entero par, entonces n^2 es un entero par.* Construyeron sus preguntas claves a través del reconocimiento y comprensión de lo que deseaban probar. Se puso atención en que la pregunta clave no tuviera información específica ni símbolos y eso ayudó a concretar de manera correcta la pregunta clave considerando el método de retroceso: ¿cómo ver que un número es par?, es decir, una pregunta planteada de forma abstracta. Luego se concentraron en buscar respuestas a la pregunta planteada. Da la impresión que siguen sin entender que la tarea solicitada termina cuando la pregunta clave se enuncia y ellos continuaron tratando de probar la proposición. En el intento de prueba producen «el error de la recíproca» (e.g. Epp, 2003; Alvarado y González, 2010) aunque corrigieron al darse cuenta del papel de la hipótesis y de lo que quieren probar. Antes formularon la pregunta ¿cómo probar que un número es par? y su respuesta fue: si el número en módulo *2* es *0*. En ese momento, se preguntaron ¿cómo probar que *n* cuadrada [un número] módulo *2* es *0*? Aunque no construyeron las preguntas de forma abstracta, esto puede considerarse un indicador de consolidación vinculada al proceso retroceder construyendo preguntas que permitan llegar al consecuente.

En el caso del otro equipo, encontramos una pregunta clave que no contenía información simbólica, ni específica, ¿qué es un entero par?, vemos que se construye a partir de la hipótesis para dar un paso en el *avance* de la demostración, es decir extraen información relevante de la hipótesis. También trataron de perfilar la forma que tendría el cuadrado de un número par y ligar con la hipótesis para probar que es par.

El proceso de búsqueda de preguntas clave siguió con la proposición, *Si n es un entero dado que satisface $-3n^2+2n+8=0$, entonces $2n^2-3n=2$.* Durante la interacción en uno de los equipos, encontramos que, al igual que antes, cuidaron el reconocimiento de elementos que conforman la proposición, así como su función. También es interesante notar que un alumno fue consciente de que cometió el error de negación del antecedente, lo que constituye una acción de consolidación del rol de los elementos de una proposición. Por ensayo y error trataron de encontrar raíces de los polinomios, técnica de uso común en los alumnos que para Watson y Mason (2005) conduce por un camino de razonamiento hacia las demostraciones.

Después se enfocaron en una nueva estrategia, a sumar ambos polinomios y dar por hecho que la proposición es válida, es decir, su razonamiento se basa en que si se tiene la raíz entera del polinomio $-3n^2+2n+8$ y es raíz también de $2n^2-3n-2$ entonces lo será de un tercer polinomio que es la suma. También verificaron que la solución encontrada por ensayo y error satisface la tercera ecuación. Aunque con esto se desviaron de la tarea de encontrar preguntas clave que los apoye a la demostración, hay que reconocer que estaban inmersos en la actividad de la demostración y sin darse cuenta generaban conjeturas susceptibles de prueba que constituyen nuevo conocimiento, es decir, realmente hacían matemáticas.

Más que plantear una pregunta clave por ejemplo, ¿cómo encontrar un entero que sea raíz del polinomio $-3n^2+2n+8$ o que satisfaga la ecuación $-3n^2+2n+8=0$? los estudiantes estuvieron enfocados en dar respuesta a la pregunta clave y encontraron las soluciones *2* y *4/3* factorizando la expresión. Tuvieron necesidad de verificar su validez y se dieron cuenta que *2* satisface ambas ecuaciones, sin embargo *4/3* sólo satisface la primera ecuación, sin tener en cuenta que en la hipótesis se hacía referencia a solución entera. Finalmente expresaron la pregunta clave: "¿cómo pueden encontrar un entero que satisface la ecuación?" aunque se referían a la suma de las ecuaciones de la hipótesis y conclusión ($-n^2-n+6=0$).
En el otro equipo construyeron las preguntas clave: *¿Cómo probamos que n satisface* $2n^2-3n=2$*? ¿Cómo probamos que el valor de* $2n^2-3n$ *es igual a 2?¿Cómo probar que el valor de* $-3n^2+2n+8$ *es igual a 0? ¿Cómo probamos que n satisface* $-3n^2+2n+8=0$*?* Al igual que en el otro equipo se encuentra información específica *Si n es un entero dado que satisface* $-3n^2+2n+8=0$*, entonces* $2n^2-3n=2$. No obstante, ayudó a construir la demostración a partir de las respuestas generadas.

En la siguiente consigna se solicitó a los estudiantes que identificaran de las opciones a), b), c) y d) la respuesta incorrecta para la pregunta clave: *"¿cómo pueden probar que dos rectas en un plano son paralelas?"* y que explicaran su respuesta.

a) Probar que las pendientes de las rectas son iguales,
b) probar que cada una de las dos rectas es paralela a una tercera recta,
c) probar que cada una de las dos rectas es perpendicular a una tercera recta, y
d) probar que cada una de las dos rectas están en lados opuestos de un cuadrilátero.

En uno de los equipos, en relación a las opciones a), b) y c) las consideraron como respuesta correcta. Además b) y c) de manera inmediata las encontraron equivalentes y muy obvias como un camino para probar que dos rectas son paralelas. Es de destacar que aunque el concepto de rectas perpendiculares se estudia en primaria y secundaria, los alumnos vinculan este concepto con el plano cartesiano. Una vez descartadas las respuestas correctas, la discusión se centró en explorar la opción d) para lo cual analizaron como ejemplo crítico de cuadrilátero un trapecio. Discutieron acerca de considerar los lados paralelos del trapecio, pero expresaron que el trapecio es un contraejemplo al tener dos lados no paralelos y, por tanto, probar que cada una de las rectas están en lados opuestos de un cuadrilátero no prueba que dos rectas sean paralelas. Esto se consideró consolidación del manejo y papel de los ejemplos y contraejemplos trabajado en sesiones anteriores.

También se les solicitó encontrar tres respuestas a la pregunta ¿Cómo se puede probar que dos números reales son iguales? Inicialmente discutieron sobre si la igualdad del valor absoluto al cuadrado de los números implicaba la igualdad de números, aunque lo desecharon con un argumento válido. Luego, en relación a la igualdad de números, establecieron que para que sean iguales al dividirlos por un número distinto de *0,* cociente y residuo son iguales. También observaron que al asociarlo con la multiplicación se daba la igualdad si el producto por otro número es el mismo en ambos casos. Luego utilizaron la sustracción, y llegaron a que dos números son iguales si su diferencia es *0*. La posibilidad de discutir en equipo permitió corregir algunos errores. Por ejemplo, mientras se discutió que la igualdad se dedujo que la resta de los números es

0, un alumno pensó en la multiplicación y argumentó tratando de convencer que el argumento era incorrecto, sin embargo al centrarlo en la resta aceptó como válida la respuesta. Además, al trabajar con el *0* como "neutro" de la suma, se realizó la conexión con el neutro multiplicativo y plantearon que si *1* es resultado de la división entre dos números entonces se prueba que los números son iguales.
El juego con las operaciones los condujo a un conocimiento más sofisticado y propusieron, en el contexto de funciones, que si f es función y las imágenes de a y b son iguales deben provenir de pre-imágenes iguales, es decir $a=b$. Esto mostró un conocimiento superior y vemos como de una pregunta en apariencia muy sencilla van entrelazando conocimiento y razonando sobre su validez. En esta parte trabajaron con conocimiento crucial en matemáticas: cuándo una relación es función. A menudo un matemático, cuando propone un candidato para "función", debe justificar que está bien definida, es decir toma la igualdad $f(a)=f(b)$ y debe probar que $a=b$. Esto justamente fue lo que propusieron. Finalmente reportaron respuestas correctas e incluso ensayaron pequeñas pruebas. En esta parte destacamos la importancia de seguir las interacciones en equipos, puesto que la mayoría del conocimiento que se va generando no se reporta en los escritos. De hecho, esta parte no fue documentada para entregarla por escrito. Sin embargo, sí se discutió y fue aprobada por el equipo. En el diseño de esta hoja de trabajo hemos encontrado que sugerir que las preguntas claves no tuvieran símbolos ha generado confusión y se han descartado buenas respuestas en el registro escrito.

En la siguiente consigna, para proponer al menos tres respuestas a la pregunta clave ¿cómo puedes probar que dos conjuntos son iguales? Primero ensayaron con la cardinalidad y poco a poco demandaron mayor explicación y argumentación dentro de los equipos, plantearon un contraejemplo que hizo que abandonaran la idea, exhibiendo con ello consolidación vinculada al manejo de ejemplos y contraejemplos. Luego mencionaron que la cardinalidad es necesaria pero no suficiente, puesto que se requiere que sean iguales los elementos. Enseguida conectaron con la noción de función y con la idea de función inyectiva aunque no exploraron la necesidad de la sobreyectividad para la igualdad de los conjuntos.
Finalmente, coincidieron en verificar la igualdad entre cada elemento del primer conjunto con uno en el segundo. Buscaron otras formas de demostrarlo recurriendo a las operaciones de unión e intersección de conjuntos, también se centraron en la existencia de una función biyectiva (aunque sólo mencionaron la inyectividad) y en la noción de subconjunto.
Es interesante cómo la interacción en pequeños grupos permite que los estudiantes se sientan cómodos explorando diferentes estrategias y, al no sentir miedo al error, se expresan libremente, encuentran inconsistencias en su propio razonamiento, van refinando sus respuestas y como resultado disponen de una variedad de estrategias.

A continuación se les pidió que señalaran tres maneras de *probar que dos triángulos son congruentes*. En el desarrollo de esta tarea (fragmento 244-257 p. 266) observamos que el diseño de la ID y la manera en la que se ha venido trabajando, ha permitido sentar ciertas normas que no se han determinado de manera explícita, pero que encontramos ahora en las interacciones en equipos de manera sistemática. Comenzaron reconociendo los objetos y conceptos involucrados con el propósito de comprender los enunciados, y extraer significado e información de las definiciones acordadas. Las interacciones permitieron establecer conexiones, aún cuando conducían a un error, pero al discutirlas eran refinadas por otros compañeros y actuaban para contribuir a la variedad de estrategias. Así los alumnos se formaron la idea de que hay distintas maneras de enfrentar un problema/demostración.

En los registros escritos observamos correctas y variadas estrategias. Encontramos también una idea errónea (probar que son del mismo tipo de triángulos y la circunferencia circunscrita tiene igual radio) que puede considerarse una buena oportunidad para discutir en grupo una nueva cuestión: ¿en una circunferencia los triángulos [rectángulos/equiláteros/escalenos, isósceles] formados por tres puntos sobre ella son siempre iguales? La discusión permitiría explorar y esperar algunos contraejemplos para obtener la respuesta. Transmitiendo la idea de que de las respuestas erróneas pueden darse oportunidades de generar nuevas investigaciones, al igual que ocurre en la práctica del matemático y otros científicos.

5.1.3.1.2 Tarea para reforzar la idea de deducción

Para reforzar la idea de *deducción* en el avance del método *avance-retroceso* se pidió que para cada una de las hipótesis dadas, se formularan tantos enunciados como fueran posibles que resultaran de aplicar el primer paso del proceso de avanzar a partir de la hipótesis.
La primera hipótesis fue: *el número real x satisface* $x^2-3x+2<0$
Para desarrollar la tarea (fragmento 210-230 p. 267) los estudiantes despejaron y enseguida buscaron números para satisfacer la desigualdad. Luego, consideraron el enunciado como una proposición y no como la hipótesis. Intentaron buscar qué es lo que hay que demostrar pensando en que encontrar una *x* que satisfaga la desigualdad sea conclusión y pensaron como hipótesis a "*x* es número real", de ahí trataron de extraer información. Ensayaron con diferentes números sin encontrar valores para satisfacer la desigualdad. Decidieron entonces resolver la ecuación cuadrática y encontraron como soluciones *2* y *1*. Sustituyeron esos valores y otros para decidiendo que no hay números que satisfacen la desigualdad. En esta parte observamos que tienden a buscar ejemplos sólo en el conjunto de los números enteros y, al no buscar valores entre *1* y *2*, no resuelven la desigualdad.

Los escritos evidenciaron que en ambos equipos conciben $-\infty$ *y* ∞ como extremos incluidos de los números reales ([ ] y $\leq$). Ambos encontraron la solución de la ecuación de segundo grado (por métodos distintos) y, como vimos antes, en un equipo después de la búsqueda de valores enteros (aún cuando ponen énfasis en que *x* es real), decidieron que no hay valores que satisficieran la desigualdad. En el otro equipo, partieron de la hipótesis, así se debía cumplir que $(x-2)(x-1)<0$. Para que eso sucediera uno de los factores tenía que ser positivo y el otro negativo. Esto les condujo a decir que debería cumplir por una parte que $x-2>0$ *y* $x-1<0$; $x>2$ *y* $x<1$ y por otro lado, cumplir que $x-2<0$ *y* $x-1>0$; $x<2$ *y* $x>1$ y ahí detuvieron su búsqueda. Es posible que en este equipo sí tuvieran claro el papel de la hipótesis y al no tener conclusión se detuvieron al cumplir con lo que se les pidió. Sin embargo, el siguiente paso podría ser descartar la primera opción por la imposibilidad de encontrar un número real *x* que a la vez fuera mayor que *2* y menor que *1*, quedándose con la otra opción para avanzar en la demostración en caso de conocer la proposición completa. En este equipo encontramos acciones de consolidación del papel de la hipótesis y del método avance retroceso.

La siguiente hipótesis dada para formular o deducir al menos dos enunciados a partir de ella y avanzar en el método descrito fue: *El seno del ángulo X en el triángulo XYZ de la figura es 1/√2*

Para esta tarea (fragmento 259-309 p. 268), establecieron conexiones con lo trabajado anteriormente. Revisaron la demostración que realizaron en las primeras tareas de la hoja y se centraron en cómo obtuvieron las deducciones para avanzar en la deducción de nuevos hechos.

Empeñados en visualizar el *sen x* en el círculo unitario se confundieron y de manera errónea pensaron que *sen x* es *1*, pero durante la discusión, retomaron la función seno como la razón del cateto opuesto entre la hipotenusa y no como segmento. Luego dedujeron que era un triángulo rectángulo isósceles, sus lados medían *1*, la hipotenusa $\sqrt{2}$, y la medida de los ángulos .
Finalmente, el trabajo en equipo permitió extender su comprensión de la tarea de deducción a partir de un enunciado que puede funcionar como hipótesis. Además, la demanda de la tarea de proponer más de una deducción a partir de la hipótesis abrió a los estudiantes la posibilidad de avanzar en el proceso de la demostración.

Posteriormente pasaron a realizar deducciones a partir del enunciado: *el rectángulo ABCD es un cuadrado*, realizando rápidamente deducciones acerca de igualdad de lados, ángulos y la diagonal como el cuadrado de la suma de dos lados. Aquí, sólo encontramos alguna debilidad en el lenguaje cuando ocasionalmente se referían a rectas en lugar de lados del rectángulo.

La siguiente tarea (fragmento 332-377 pp. 269-270) fue obtener deducciones a partir de: *el entero* n^2*-1 es impar.* Los alumnos tomaron el enunciado como proposición y no sólo como hipótesis para realizar las deducciones y avanzar. Esto les condujo a plantear contraejemplos y a explorar posibles valores para *n* par o impar estableciendo valores de verdad.
Continuando con la idea de que constituye una proposición, intentaron una representación simbólica del enunciado y plantearon como primera opción $n^2-1=x$ para *x* impar y llegaron a la representación $n^2-1=2x+1$ para *x* entero. Manipularon la expresión obteniendo diferentes formas. Ver el enunciado como proposición los llevó a construirla para que resultara *verdadera*. Aunque, podemos ver que uno de los estudiantes mostró comprensión del papel del enunciado como hipótesis, esto no ocurre con los demás que insistieron en una contradicción.
Finalmente, llegaron a dos deducciones correctas ($n^2-1 =2x+1$; $n^2=2x+2$, *x entero*) a partir del enunciado tomado como hipótesis. No obstante, tomaron el enunciado como una proposición completa y analizaron en qué casos es *falso* o *verdad* y no todos interpretaron la tarea como: a partir de esa hipótesis deberían realizar deducciones. También, encontramos otras deducciones (si el valor de *n* es par el resultado es impar; si el valor de *n* es impar el resultado es par) con ese tratamiento como proposición.
Cerca del final de la sesión, el profesor percibió la confusión de los alumnos cuando dan a la hipótesis el tratamiento de implicación. No obstante, observamos que mencionaron un ejemplo en el que realizaron bien las deducciones y no discutieron aquellos ejercicios en los que se apreciaba que tomaban la hipótesis como si fuera la proposición. Finalmente, no realizaron cambios a partir de la intervención del profesor y al no explorar más, se mantuvo la confusión.
De la hipótesis: *la circunferencia C consta de todos los valores de x e y que satisfacen la ecuación* $(x-3)^2 +(y-2)^2=25$, se solicitó que realizaran dos deducciones a partir de ella. En un equipo [fragmento 382-453, pp. 271-272] dedujeron el centro de la circunferencia *(3,2)* y su radio, *5*. Sólo un alumno mostró conocimiento completo de la ecuación de la circunferencia y de lo que representaba cada elemento. En este caso la interacción permitió que ayudara a sus compañeros a darse cuenta de sus errores.
También, manifestaron la necesidad de conectar la ecuación con la forma concreta de la circunferencia y para ello visualizaron puntos y verificaron que cumplían con la ecuación. Observamos cómo utilizan argumentos de pensamiento “transformacional” para explicar que el centro de la circunferencia *(x,y)* va variando y que la noción de circunferencia se pensó como conjunto de puntos que se encontraban a la misma distancia del centro, esto los llevó a pensar que si el radio fuera *0* hablarían de un punto. A partir de ahí pensaron en el radio *5*.

Una vez que entendieron de manera intuitiva la noción de la circunferencia expresaron una necesidad de buscar puntos en la circunferencia. Un estudiante trató de persuadirles sugiriendo*,* que para eso era la ecuación que representaba a la totalidad de esos puntos, puesto que era su forma general. Buscaron números tales que la suma de sus cuadrados les dieran 25; ensayaron descartando alguno y aceptando otros. Los puntos sobre la circunferencia que buscaron primero fueron los que resultaban de agregar o quitar 5 unidades a la ordenada del centro y después a la abscisa. Finalmente ya no obtuvieron nuevas deducciones, además de los valores del centro y radio. Este proceso les ayudó a comprender la representación algebraica de la circunferencia y conectarla con la noción de lugar geométrico, vista al trabajar definiciones. Esto se considera una muestra de consolidación en el manejo de definiciones al extraer significado y ser capaces de establecer conexiones entre contenidos.

La siguiente consigna varía un poco en el sentido que ahora se les dio una proposición y cuatro opciones para que seleccionaran la que NO era válida o adecuada para avanzar en una deducción a partir de la hipótesis para demostrarla.
La primera proposición fue: "Si x e y son números reales tales que $x^2+6y^2=25$ e $y^2+x=3$, entonces $y=2$". Al aplicar el proceso de avanzar a partir de la hipótesis, ¿cuál de los enunciados siguientes no es válido? a) $y^2=3-x$; b) $y^2=(25/6)-(x\sqrt{6})^2$; c) $(3-y^2)^2+6y^2-25=0$ y d) $x+5=-6y^2/(x-5)$

Los estudiantes realizaron sustituciones en las expresiones algebraicas a partir de la hipótesis y llegaron a que la opción b) no es válida. Aquí mostraron flexibilidad en el manejo del método avance-retroceso, mientras unos ofrecían argumentos aplicando el proceso de avanzar, otros argumentaron por el proceso de retroceder conocidos los valores de x e y.

En este mismo sentido, en el siguiente ejercicio se les pidió que: *Supongan que quieren probar que:" Si R es un subconjunto de S y S es un subconjunto de T, entonces R es un subconjunto de T"*. Expliquen por qué el siguiente enunciado en el proceso avanzar es incorrecto: "puesto que *R* es un subconjunto de *S*, se sigue que todo elemento de *S* también es elemento de *R"*.
Dado lo acotado de la tarea se limitaron a explicar que: «es falso que todo elemento de S también sea un elemento de *R*, *R* está contenido en *S* pero sólo abarca una parte de éste, existen elementos de *S* que están fuera de *R»,* y fortalecen con un dibujo. También explicaron que: «$R\subseteq S\subseteq T$ es incorrecto porque no está afirmando que los subconjuntos son iguales sino que *R* está contenido en *S* y no *S* en *R*».

5.1.3.1.3 Conclusiones de las sesiones 7a y 7b

Al observar el desempeño de los estudiantes con esta actividad encontramos que no ha sido muy clara la forma en que se ha definido pregunta clave, en el sentido de sugerir que sea abstracta, que no contenga símbolos e información específica del problema. Esto se hizo así con la intención de que no transcribieran símbolos sin una comprensión de los diferentes elementos puestos en juego y de los conocimientos de resultados previos que tienen los estudiantes. Además estos elementos (definiciones, proposiciones, propiedades, etc) se suelen escribir en general y por esa razón tratar de formular preguntas abstractas se considera que puede ayudar a encontrar la información necesaria para la demostración. Sin embargo, el ejercicio de búsqueda de preguntas y respuestas que puedan ayudar a extraer y derivar información para construir las demostraciones ha resultado muy rico. Se observa que las primeras actividades de esta ingeniería didáctica han cumplido el objetivo ya que los estudiantes son cuidadosos en el tratamiento de las definiciones y también en la identificación de los elementos que componen la proposición: hipótesis y conclusión. En relación al manejo de definiciones, hemos encontrado por ejemplo, cuando trabajan con la circunferencia, ellos ensayan a buscar puntos específicos que cumplan con la ecuación y con la definición de circunferencia como lugar geométrico y es en ese momento cuando conectan la forma gráfica con la algebraica al extraer significado de la definición como lugar geométrico.

5.1.3.2 Confrontación de la Sesión 8a. Práctica del método avance-retroceso para demostrar

Análisis a priori

Para esta sesión se diseñó la hoja de trabajo 7 (ver anexo A). Se esperaba que los estudiantes trabajaran en pequeños grupos y realizaran la demostración de la proposición: *Si a, b y c son números reales para los que* $a>0$, $b<0$ *y* $b^2-4ac=0$, *entonces la solución de la ecuación* $ax^2+bx+c=0$ *es positiva.* También se esperaba que posteriormente discutieran en gran grupo los detalles de la demostración, así como de su versión condensada.

Análisis a posteriori

No se realizó la sesión en pequeños grupos dada la asistencia de pocos estudiantes. Finalmente se concretó con 5 estudiantes, la interacción se dio con el grupo completo y el profesor (fragmento 1-24, pp. 273-274) y se terminó mucho antes del tiempo previsto. Para construir juntos la demostración, los alumnos escribieron en forma correcta la fórmula para encontrar la solución de la ecuación general de segundo grado y el profesor planteó preguntas para inducir la construcción de deducciones. Por ejemplo, identificaron la hipótesis y su función (no explícita, pero entendida) junto con el método de resolución las ecuaciones de segundo grado y utilizaron el método para avanzar y finalmente fueron los alumnos quienes construyeron la demostración en una tabla y en su versión condensada para comunicar presentaron lo siguiente: *Tenemos que* $a,b,c \in \Re$ *y* $a>0$, $b<0$ *y* $b^2-4ac=0$. *Ahora* $x=[-b\pm\sqrt{(b^2-4ac)}]/2a$. *Luego sustituyendo en la ecuación general,* $x=(d\pm\sqrt{0})/2a$ *donde* $d>0$ *y* $2a>0$. *Entonces* $x=d/2a$ $\therefore x>0$.

5.1.3.3 Sesión 8b: Leyendo y entendiendo demostraciones

Análisis a priori

En esta sesión, prevista para menos de una hora, se trabajaría únicamente la hoja de trabajo 8 (ver anexo A), diseñada para que los estudiantes lograran extraer información relevante de la lectura de demostraciones, que les permitieran reconstruir el camino recorrido por otros para generar conocimiento nuevo y consistente dentro de un marco de referencia. Por ello, se les presentarían demostraciones como las que aparecen en sus libros de texto, para iniciarles en su lectura, dado que previamente identificamos que es una habilidad que no han desarrollado.

También la sesión tenía como propósito afianzar el método avance-retroceso como método directo para demostrar una proposición. Por ello, se les presentarían tareas que en principio se mostraban alejadas del contexto matemático. Por ejemplo, en una se consideraría la existencia de un alfabeto que consta de las letras *s* y *t*, junto con algunas reglas propuestas para crear nuevas 'palabras' a partir de las anteriores.

En relación a la organización, se continuaría con la dinámica de trabajo en pequeños grupos, seguido de la exposición de producciones en gran grupo conducida por el profesor.

Análisis a posteriori

Dado que la sesión 8a ocupó menos tiempo del planeado, esta parte se realizó inmediatamente después y se utilizó la hoja de trabajo prevista. No obstante, a diferencia de la sesión anterior, en esta parte sí se respetó la dinámica de trabajo en pequeño grupo, trabajando sólo con un equipo y posteriormente el profesor condujo la discusión. Para la primera tarea se presentó la siguiente proposición acompañada de su demostración condensada:

> Proposición: *Si x e y son números reales no negativos que satisfacen $x+y=0$, entonces $x=0$ y $y=0$».*
> <u>Demostración:</u> Primero se probará que $x\leq 0$, porque entonces, como $x\geq 0$ por hipótesis debe cumplirse que $x=0$. Para ver que $x\leq 0$, por hipótesis $x+y=0$, de donde $x=-y$. Asimismo, como $y\geq 0$, se sigue que $-y\leq 0$, de donde $x=-y\leq 0$. Por último, para ver que $y=0$, como $x=0$ y $x+y=0$, se sigue que $0=x+y=0+y=y$.□

Primero se pidió que desglosaran la demostración y que escribieran un análisis indicando los pasos del método *avance-retroceso*, así como preguntas clave y sus respuestas.

Los estudiantes aplicaron con éxito el método *avance-retroceso* extrayendo significado de la demostración condensada (fragmento 26-47 pp. 275-276). Primero identificaron la hipótesis y conclusión y discutieron su significado. Luego obtuvieron deducciones a partir de la hipótesis, *P*. Por ejemplo, al enlazar *P* y despejar, obtuvieron que $-y<0$. Otra deducción la obtuvieron al encadenar que $x=-y$, $-y<0$, $x<0$ y por hipótesis $x\geq 0$, luego $x=0$. También, extrajeron información de la conclusión, al formularse la pregunta ¿qué necesitamos para que se dé *Q* ($x=0$, $y=0$)? Así establecieron que un paso previo a la conclusión, Q_1 , era $x+y=0$, pero les faltó considerar que alguno de los sumandos tendría que ser *0*. Vemos que no distinguen aún la diferencia entre avanzar de algo conocido y retroceder de algo a lo que quieren llegar. Finalmente enlazaron la hipótesis con el hecho de que llegaron a $x=0$, que es lo que realmente era el Q_1 .

Finalmente en el escrito (ver figura 46 p. 275) que desglosa la demostración por extracción de significado de la versión condensada, utilizaron el mismo esquema planteado en las sesiones anteriores. En Q_1, repitieron la información, esto ya lo hemos mencionado como atribuible a la confusión entre avanzar de algo conocido y retroceder de algo a lo que quieren llegar. Aquí, consideramos que trabajar sobre esto puede contrarrestar el error de la recíproca, cometido al aplicar el proceso retroceder (aplican *Q implica P* en lugar de aplicar el proceso retroceder para probar *P implica Q*). No obstante, pudieron leerla y mostraron comprensión al desglosar y justificar cada paso.

La siguiente consigna de esta sesión fue considerar la siguiente proposición junto con la demostración condensada y justificar cada afirmación:

> *Proposición*: *Si n es un entero mayor que 2, a y b son las longitudes de los catetos de un triángulo rectángulo, y c es la longitud de la hipotenusa, entonces* $c^n>a^n+b^n$.
>
> <u>Demostración:</u> Se tiene que $c^n = c^2c^{n-2}=(a^2+b^2)c^{n-2}$. Al observar que $c^{n-2}>a^{n-2}$ y que $c^{n-2}>b^{n-2}$, se sigue que $c^n >a^2(a^{n-2})+b^2(b^{n-2})$. Por consiguiente, $c^n>a^n+b^n$.□

Para justificar (fragmento 42-67 pp. 276-277) que $c^n = c^2c^{n-2}$ recurrieron a la ley de exponentes y de ahí al utilizan la hipótesis obtuvieron $c^2c^{n-2}=(a^2+b^2)c^{n-2}$ del teorema de Pitágoras. Para justificar las desigualdades $c^{n-2}>a^{n-2}$ y $c^{n-2}>b^{n-2}$, de manera asertiva utilizaron la hipótesis aunada al hecho de que la hipotenusa es mayor que cualquier cateto, aunque no aclararon en ese momento que al ser cantidades positivas se conservaría la desigualdad al elevar a un exponente positivo. Para verificar que se cumplían las deducciones propusieron ejemplos con números fraccionarios. Reiteradamente dieron muestras de una notable mejora en la consideración de la función y cuidado de la hipótesis.

En la interacción con el profesor, los alumnos respondieron a los cuestionamientos de manera clara y justificando cada paso. Los alumnos fueron más autónomos y mostraron confianza en su manera de justificar. Esta confianza también tiene que ver con disponer de la demostración "correcta" desde el inicio y que su papel es extraer significado y justificar.

Para la siguiente tarea, al igual que antes, se les pidió un análisis indicando los pasos del método *avance-retroceso*, así como las preguntas clave y sus respuestas de:

> *Proposición: Dado un triángulo RST, si SU es un bisector perpendicular de RT y RS=2RU, entonces el triángulo es equilátero*, y se les pide que escriban primero seguido del enunciado de la proposición que se prueba.
> Demostración: Se probará que $\overline{RU} = \overline{UT}$ *,* porque entonces, se tiene también que *∢RUS=∢TUS=90º y* $\overline{SU} = \overline{SU}$*.* Para ello, se observa que $\overline{RU} = \overline{UT}$ porque *SU* es bisector perpendicular de *RT,* y por tanto la demostración está completa.□

Para ello (fragmento 70-98 pp. 278-279), primero identificaron el consecuente de la proposición, mencionaron la definición de triángulo equilátero, asociaron punto medio y mediatriz con bisector perpendicular, como parte de la hipótesis. Percibieron la necesidad de probar que *SU=RT*. Ahora tuvieron mayor cuidado al justificar y ya no se observaron comentarios ambiguos (e.g. es obvio, porque sí pasa). Justificaron integrando elementos de la hipótesis y su significado. El maestro interrumpió, sin que fuera necesario, el curso de la discusión retomando el enunciado y leyendo la demostración confundido por la palabra bisector perpendicular. No aclaró esto y les guió a probar la igualdad de *RU* y *UT* para asociar igualdad de ángulos. Como respuesta, los estudiantes continuaron para enlazar con las acciones previas y justificar la igualdad de los ángulos *RUS* y *SUT*. Luego se fijaron en la medida de los ángulos, en que eran triángulos rectángulos y realizaron cálculos para obtener la medida de *SU*. Concluyeron que no es necesario saber la medida de *SU*, al ser lado común en los triángulos *RSU y SUT,* se podía usar el criterio de congruencia *LAL* con la igualdad de lados, *RU=UT*, la igualdad de ángulos *RUS=SUT=90*^{o} y la igualdad de lado *SU=SU*.

Dado que la tarea fue probar que el triángulo *RST* era equilátero y se llegó a la congruencia de los triángulos *RSU* y *SUT*, el profesor cuestionó a los estudiantes para ver si entendieron esa diferencia y por qué era adecuada la demostración. Los alumnos mostraron conocimiento de la función y elementos tanto de la hipótesis como de la conclusión. Además retomaron las deducciones hechas antes y la conclusión para construir el paso previo a la conclusión desde el retroceso. Esto fue una anticipación de que de lo anterior debían concluir que los lados del triángulo *RST* eran iguales. Al extender el significado de la congruencia de triángulos encontrada previamente, mostraron ya la construcción de la demostración desglosada. Finalmente, los estudiantes reconocieron que se probó que era un triángulo equilátero y que los triángulos *RSU* y *SUT* eran congruentes. El profesor anticipó que son proposiciones equivalentes y lo enlazó con la siguiente parte de la tarea, que en realidad habían resuelto ya. También aprovechó para trabajar en el proceso de retroceder a partir de la conclusión para que los estudiantes se dieran cuenta de la importancia de aclarar lo que habían probado y su significado.

Se dejó de tarea para casa la proposición: *Dado un triángulo RST, si SU es un bisector perpendicular de RT y RS=2RU, entonces el triángulo SUR es congruente con el triángulo SUT.* Esperando que extendieran y analizaran de manera independiente la parte anterior. En la interacción probaron que: *Dado un triángulo RST, si SU es un bisector perpendicular de RT y RS=2RU, entonces el triángulo es equilátero*, era equivalente a probar que el triángulo *SUR* es congruente con el triángulo *SUT* basados sobre la misma hipótesis. Los alumnos lo demostraron utilizando el criterio de congruencia *LLL* en lugar del utilizado en la resolución de la tarea previa (*LAL*). Esto mostró flexibilidad de pensamiento al utilizar otra estrategia con éxito.
Dejar la tarea para un análisis individual previo de cada estudiante modificó notablemente la interacción en equipo y observamos (fragmento 1-30 pp. 279-280), que sólo un estudiante fue el que explicó su prueba esperando ser cuestionado por sus pares. Los compañeros se limitaron a realizar cálculos para verificar su aportación. El estudiante expuso su solución, verbalizando lo que trabajó previamente. Uno de sus compañeros siguió sus ideas y las enlazó con la tarea para encontrar las igualdades de lados homólogos y el criterio *LLL* de congruencia. Finalmente sus pares comprendieron y asintieron que se probó la congruencia de triángulos.

La siguiente tarea, al igual que la anterior, fue trabajada de manera individual y la discutieron en equipo al inicio de la siguiente sesión para, entre todos, ponerse de acuerdo en el registro escrito a entregar. La tarea consistió en que demostraran que si el triángulo del ejercicio 3 a) es equilátero y *SU* es un bisector perpendicular de *RT,* entonces el área del triángulo *RUS* es $\sqrt{3}(RS)^2/4$.
La interacción (fragmento 20-30 p. 280) muestra el acuerdo tomado en el equipo. En este caso se dieron cuenta que la proposición no es verdad pero aunque desde un principio se dieron cuenta de ello la revisaron una y otra vez. Más que un rasgo de inseguridad en su trabajo, esto muestra mayor cuidado en revisar su manera de proceder.

Las dos tareas anteriores tienen en común que cambia la forma en que se da la interacción en equipo al ser un estudiante el que marca el curso de la interacción a partir del camino previamente recorrido en forma individual. A este respecto (Webb, 1991) menciona que las oportunidades de aprendizaje no necesariamente surgen de estudiantes que dan elaboradas explicaciones a sus pares, ya que esto podría ser una mera verbalización de algo que ellos conocen previamente. Sin embargo, sugiere que una oportunidad de aprendizaje se puede producir cuando anticipan que su explicación puede ser cuestionada y criticada por sus compañeros. Esto último es algo que aparece retratado en las últimas dos interacciones analizadas y que da cuenta de la disposición para la participación y la comunicación. Este puede ser un rasgo de la adquisición de la habilidad para comunicar ideas matemáticas.

La siguiente tarea tenía el propósito de afianzar el método avance-retroceso como método directo para demostrar una proposición. Esta tarea a su vez se dividió en 4 ítems a), b), c) y d). En ella se consideraba la existencia de un alfabeto con las letras *s* y *t* únicamente, junto con las siguientes reglas –que podían aplicarse en cualquier orden– para crear nuevas ‘palabras’ a partir de las anteriores.

v. Se duplica la palabra
vi. Se borra *tt* de la palabra
vii. Se sustituye *sss* por *t* en la palabra
viii. Se agrega la letra *t* en el extremo derecho de la palabra si la última letra es *s.*

Aquí se solicitó a los alumnos que utilizaran el proceso avanzar para derivar todas las palabras posibles que se podían obtener en tres pasos al aplicar repetidamente las reglas (i-iv) en cualquier orden a la palabra inicial *s*. La interacción en el equipo (fragmento 32-93 pp. 281-284) muestra comprensión de la tarea con un primer reconocimiento de los elementos o axiomas de partida, seguido de construir los primeros ejemplos para la interpretación adecuada de los axiomas, es decir, que las letras *s* y *t* también pueden considerarse como palabras. Observamos que aplicaron las reglas con soltura para deducir nuevas palabras, mostrando cuidado al leer las reglas, las veces que fuera necesario para despejar las dudas. Este manejo de las reglas y cuidado constituye una muestra de consolidación del proceso *avanzar* como parte directa del método *avance-retroceso*. Sin embargo, aunque en casi todos los estudiantes se percibió tal consolidación, uno vuelve a mostrar el *error de la recíproca,* siendo consciente de que lo comete. Con ayuda de sus compañeros logró superar su confusión al darse cuenta del error cometido. Así, se mostró disposición al trabajo en equipo y a la comunicación efectiva.

Finalmente, los alumnos enunciaron de manera precisa las 6 opciones -*sssst, ssssssss, ts, st, sstsst, stststst*- obtenidas al avanzar tres pasos a partir de *s*.

Con la intención de ganar confianza en el manejo del proceso *retroceder* se les pidió en b) que aplicaran el primer paso del proceso *retroceder* a la palabra *tst.* Específicamente, que realizaran una lista de las palabras para las que la aplicación de una de las reglas anteriores da como resultado *tst.* Los estudiantes encontraron sin problema las palabras, mostrando mejora en el proceso *retroceder* a partir de la conclusión.

Cuando el profesor les preguntó sobre el resultado de esta tarea como posibles resultados de retroceder un paso desde la conclusión, señalan las 5 posibles opciones*: sssst, tssss, ts, tsttt, tttst*. Aquí mostraron un mayor dominio del método de retroceso a diferencia de la primera tarea de la sesión, donde cometieron el error de la recíproca.
En el siguiente ítem, c), se les pidió demostrar: *Si s, entonces tst*. Al inicio, mostraron confianza al enfrentar este tipo de tareas de demostración y una comprensión de la misma, reconociendo la hipótesis, la conclusión y su función. También dominaron la deducción de hechos utilizando reglas establecidas. Además de la consolidación del proceso directo de demostración mostrados por los estudiantes, intentaron, otras maneras de hacerlo que los llevó a construir nuevas proposiciones. Enunciaron su conjetura: si una palabra tiene *3k+1* eses se puede reducir dicha palabra a la forma *tst* utilizando las reglas establecidas. Esta parte no se desarrolló más al ser interrumpidos por el profesor para ver su avance.

En la discusión guiada por el profesor, los estudiantes además de que mostraron dominio y comprensión de la tarea, mostraron su inquietud de revisar la conjetura antes hecha para continuar afinándola. Pero el maestro no dejó que se ampliara la idea y se truncó esa posibilidad. Los estudiantes estuvieron interesados e involucrados en el proceso mostrando su adquisición de las habilidades necesarias para la práctica profesional de un matemático es decir, una consolidación del *registro matemático*. Se puso de manifiesto la conexión inmediata entre su demostración y el método *avance-retroceso.* La cantidad y calidad de las conexiones realizadas con los conocimientos previos constituyen una medida de comprensión del proceso de demostrar. Este ejercicio resultó particularmente estimulante y ayudó a reforzar el método de demostración directo, presentado, en apariencia, como alejado del formato matemático.

En el siguiente apartado debían demostrar que: *Si s, entonces ttst.* Esta demostración la realizaron de manera directa (fragmento 88-93, p. 284) mostrando comprensión de la tarea y del proceso, realizaron las deducciones al aplicar las reglas y probaron la proposición aunque en el diálogo quedó clara la demostración no la organizaron en versión condensada y formal. Esto podemos atribuirlo a la naturaleza de la tarea que no parece una proposición matemática aún cuando hicieron explícita la conexión.
Para concluir la sesión, el profesor les propuso el desafío: *Sea el triángulo ABC con ortocentro H. Demostrar que C es el ortocentro del triángulo ABH*. Luego, se aseguró de que recordaran el significado de ortocentro, preguntándoles acerca de la altura de un triángulo. Los alumnos tuvieron claros los conceptos y lo que implicaba probar la tarea. Al día siguiente entregaron el escrito con una demostración bien estructurada (figura 53 p. 284).

5.1.3.4 Conclusiones de las sesiones 8a y 8b

En la parte de la sesión 8a, al no dar oportunidad al trabajo en equipo y pasar directamente a ser conducidos por el profesor no podemos rescatar elementos importantes de avance en los alumnos, aún y cuando sus respuestas a los cuestionamientos del profesor resultaron adecuadas. No obstante, en la parte 8b, durante el espacio de trabajo en equipo y después en la discusión con el profesor, encontramos cuidado en el manejo de los elementos de la proposición y repetición de la lectura de la tarea para entender cuándo algo no funciona, o bien para asegurarse de que todos entienden lo mismo. En esta parte, encontramos un buen manejo para comunicar matemáticas, o bien para manejar correctamente el *registro matemático* (Forman, 1996), es decir, el discurso matemático de un tipo especializado. Los estudiantes organizaron sus ideas para explicarlas y comunicarlas a otros en interacciones efectivas. Estos rasgos no se encontraron en los diálogos de las primeras sesiones de esta ingeniería didáctica, donde su comunicación era más desordenada y no hacían explícito del todo su pensamiento. Observamos que después de varias sesiones de discusiones en equipos y gran grupo, los estudiantes participaron del discurso matemático incrementando sustancialmente las formas (cuidando argumentaciones, lenguaje matemático, estructura, uso de las definiciones, de sus deducciones, de los símbolos y su función), lo que les condujo a la comprensión de normas, habilidades, valores e ideas que son compartidas por los matemáticos experimentados.
Finalmente encontramos que han desarrollado habilidades para el manejo de la hipótesis y conclusión en una proposición y el reconocimiento de su función, para extraer significado de afirmaciones realizadas, para construir deducciones a partir de reglas o axiomas establecidos y finalmente habilidad para el manejo de los procesos de avanzar y retroceder para concretar una demostración por métodos directos.

5.1.4 Confrontación del Bloque IV. Métodos indirectos de demostración

Los métodos indirectos de demostración suelen causar conflictos y dificultades a los estudiantes, ya que además de requerir el manejo de los métodos deductivos directos de demostración, es necesario lidiar con la construcción de contradicciones. En este bloque se diseñaron dos hojas de trabajo para abordar los métodos de reducción al absurdo y del contrapositivo en dos sesiones.

5.1.4.1 Sesión 9: Reducción al absurdo

Análisis a priori
Para esta sesión se diseñó la hoja de trabajo 9 (Anexo A), se esperaba cubrirla en una clase de aproximadamente una hora. El objetivo era introducir el método de reducción al absurdo a partir del método avance-retroceso, estudiado dos días antes, para demostrar proposiciones de la forma *si P entonces Q*. Básicamente en este método **se supone P verdadero y NO Q verdadero**. Se procede con el proceso de avanzar utilizando la información anterior para llegar a una **contradicción** en un enunciado fuera de toda duda.
La forma de trabajo para la sesión, incluiría una explicación por parte del proferos del método de demostración por reducción al absurdo a través de un ejemplo. A continuación los estudiantes trabajarían organizados en pequeños grupos para resolver las tareas de la hoja de trabajo y posteriormente compartirían sus respuestas en una discusión mediada por el profesor.

Análisis a posteriori
Se utilizó la hoja de trabajo diseñada. Fueron necesarias dos sesiones y parte de una tercera sesión para su implementación. La primera, sesión 9a, duró 1 hora 40 minutos y únicamente se logró explicar el método por parte del profesor y que en equipo trabajaran para demostrar una proposición. Al día siguiente se dio continuidad con la sesión 9b, por un tiempo de más de una hora, iniciando con la discusión con el profesor del trabajo realizado en equipo y posteriormente se dio tiempo para completar la hoja de trabajo. La tercera sesión, prevista para abordar el método del contrapositivo, se realizó durante 15 minutos para discutir algunas inconsistencias en una de las proposiciones que los estudiantes demostraron por reducción al absurdo. En los tres casos se formó un equipo de estudiantes por el número de asistentes a la sesión. A continuación se detalla el trabajo en las sesiones.

5.1.4.1.1 Sesión 9a

El profesor empezó explicando la técnica de reducción al absurdo a través del ejemplo: *Demostrar que los números primos nunca se acaban, siempre hay más.* Aunque en principio parecía no tener la forma *si P entonces Q* a los alumnos se les hizo ver que el enunciado podía transformarse en: *Demostrar que los hechos conocidos sobre los números primos implican que dichos números son infinitos.* Durante el diálogo (fragmento 1-18, pp. 285-286) el maestro utilizó la explicación y el cuestionamiento para construir la demostración y asegurarse que iban comprendiendo la lógica del método. Finalmente el profesor organizó en una tabla la demostración, en una columna preguntas clave y en la otra las deducciones enlazadas.

A continuación, el profesor propuso a los alumnos trabajar sobre la demostración de la proposición √2 *es un número irracional.* En el fragmento [28-65, pp. 286-287] podemos ver que en las proposiciones que no tienen la forma *Si P entonces Q* les costó trabajo identificar la hipótesis o información que debe suponerse *verdadera*. La interacción en el equipo dio pie a que mostraran reconocimiento de este tipo de enunciados y ayudaran a sus compañeros a darse cuenta de su estructura. Luego identificaron la conclusión y esto los llevó a enunciar la negación necesaria para poder usar la técnica de reducción al absurdo. Negaron *Q,* es decir, √2 puede escribirse como cociente de dos enteros con denominador distinto de *0*. Finalmente fueron capaces de construir la contradicción necesaria para concluir la demostración.

Se cuestionó la contradicción, por considerar que al representar *√2* en forma decimal dieron por hecho que era irracional y que esto es justo lo que deseaban probar (al día siguiente se vio con el profesor como error por ser una aproximación de √2). Para responder a esto un alumno distinguió entre número decimal finito e irracional. Varios alumnos expresaron de diferentes formas las deducciones en su demostración, aún cuando se utilizó una aproximación de √2 que hace que la demostración no sea válida. En el registro escrito (figura 54 p. 287), el grupo escribió la versión condensada de la demostración con la inconsistencia antes mencionada, cuidando el lenguaje simbólico y verbal, el manejo de las definiciones, la extracción de significado y los argumentos que justifican sus deducciones, dando muestra de avance en el proceso de demostrar.

5.1.4.1.2 Sesión 9b

En esta sesión se retomó, para discutirlo con el profesor, el trabajo realizado en equipo para probar que √2 *es un número irracional* (fragmento 230-247, p. 288). Los estudiantes, al suponer que √2 es racional, dan muestra del manejo de la definición de número racional. No obstante, cuando expusieron la construcción de la contradicción, a partir de su respuesta, el profesor les hizo notar la inconsistencia, ya que utilizaron una aproximación de √2 y esto restó validez a su demostración. Propuso entonces, abrir otro frente para la demostración, al elevar al cuadrado la expresión *a/b=√2* presentada por ellos. El maestro, aún y cuando marcó la pauta del camino a seguir, se integró en la discusión y asumió un rol mediador apoyando la construcción de la demostración con preguntas que derivaron la participación de los estudiantes para avanzar en las deducciones. Finalmente, fueron ellos quienes construyeron la contradicción. Aquí podemos darnos cuenta que un rasgo importante de consolidación en el proceso de demostrar fue la confianza al reconocer el momento en el cuál se dio la contradicción.

La siguiente tarea a la que se enfrentaron los estudiantes fue probar que *el conjunto de los números primos de la forma 4k+3 es infinito, siendo k un número natural* (fragmento 67-223, pp. 288-293). Al inicio de la interacción identificaron hipótesis y conclusión. Luego, la negación de *Q* la consideraron parte de la hipótesis, como lo indica el método de reducción al absurdo. Al no poder extraer de manera directa las deducciones a partir de la información *P* y *NO Q* necesitaron representar de manera concreta el conjunto de los primos de la forma *4k+3*. Luego construyeron ejemplos para clarificar el tipo de conjunto. Dieron valores en la expresión *4k+3* y obtuvieron números primos, pero no todos los primos tuvieron esa forma. Al tratar de ordenar esos números en sentido creciente identificaron el primer primo de esa forma. Como *k* varía en los números naturales, considerando que el *0* no es natural, comenzaron la lista con el 7. Para hacerse una idea del conjunto, buscaron nuevos números que pertenecieran a él. Fueron organizando los ejemplos con la intención de obtener *espacios de ejemplos* (Watson & Mason, 2005), distinguiendo entre los valores de *k*, que eran pares, impares, primos. Al sentir que no avanzaban, retornaron para recordar *NO Q* y su función en la técnica de *reducción al absurdo*. También volvieron a retomar la idea de enumerarlos en una lista, recuperando las ideas importantes. Además se dieron cuenta de que, si *k=9* se formaba el número *4(9)+3=39* y *39* no es primo, es decir, mientras antes tenían que los números de esta forma producían un subconjunto de números primos (no todos), ahora tenían un contraejemplo para *k=9*, esto complicaba la tarea. Por otro lado, intentaron ligar la demostración con el ejemplo mostrado por el maestro al inicio para explicar el método de reducción al absurdo.

Aunque se mostraron desesperados hasta el momento, persistieron en la tarea, comprometidos e involucrados, mostrando un rasgo que caracteriza al quehacer matemático. Luego resumieron lo obtenido para clarificar la tarea: trataron de encontrar similitudes con el ejemplo que explicó el profesor para enseñar la técnica, descartaron intentos que no prosperaron para integrar *espacios de ejemplos*, resumieron las características del conjunto estudiado, la manera de proceder en reducción al absurdo y retomaron la escritura general de la lista.

Observamos que una vez escrita la lista finita que se suponía concentraba todos los números primos de la forma requerida, intentaron por varios medios "construir" o "buscar" un número con la misma forma, que fuera primo y que no apareciera en la lista con la finalidad de obtener una contradicción (de manera similar al ejemplo del profesor al inicio de la clase). Un alumno, exhibió un error al expresar que si se forma un número n multiplicando todos los primos de la lista, ese número puede ser primo o compuesto, sin darse cuenta, ni ser cuestionado por sus compañeros, puesto que la propia construcción implicaba que era compuesto. Enseguida resumieron toda la información válida hasta ese momento.

Al no tener éxito en la resolución, nuevamente exploraron en la búsqueda de nuevos números de esa forma, pero ahora: "más grandes". Así, para probar que 1919 es primo, pareció bastarles con probar que los primeros números no son divisores y entre los cálculos se aventuraron a conjeturar sobre otros hechos, que en ocasiones fueron refutados de inmediato. En otras ocasiones, sus conjeturas estuvieron más involucradas con el curso de la resolución de la tarea, por ejemplo que k sea primo pensando en construir espacios de ejemplos, pero al igual que con el resto fueron discutidos y refutados con contraejemplos. El uso de contraejemplos por los alumnos fue un rasgo que encontramos en proceso de consolidación.

Aunque no avanzaron mucho en la demostración, mostraron persistencia y confianza personal y de grupo. Retomaron nuevamente la información relevante para descartar aquélla información que no ayudaba. Siguieron construyendo su espacio de ejemplos y aunque era una conjetura que podían descartar con varios contraejemplos en el diálogo, sólo exhibieron a 2 y probablemente si $k=1$, a 9. Luego, intentaron construir un espacio de ejemplos pensando en para qué valores de k se obtenían números primos y se dieron cuenta que empezando en 1 y 2 se obtenían los dos primeros valores de números primos, para el siguiente valor de k no se obtenía un primo, para los siguientes dos valores se obtuvieron otros primos, para el siguiente no y así sucesivamente. Esta conjetura fue refutada, así que modificando el curso de la acción, no se avanzó en el camino equivocado y permitió reorientar la estrategia. El profesor percibió una gran lucha y se acercó para cuestionarlos. Le informaron del avance en la demostración y el profesor les sugirió un posible camino, orientándolos a que se fijaran en que los primos mayores que dos son impares y por tanto en la división entre 4 adoptaban dos posibles formas: $4k+1$ o $4k+3$. Al cuestionar a los estudiantes, éstos plantearon una respuesta derivada de la sugerencia. Tenían una lista finita de los primos de la forma $4k+3$, por lo que el resto de los primos tendrían la forma $4k+1$ y esa información los ayudaría a construir la contradicción requerida.

Un alumno repitió e integró la aportación del profesor a la tarea y buscó su aprobación. El profesor les aclaró que los números primos tienen una de las dos formas sugeridas, pero no necesariamente un número de esa forma es primo.
En este orden de ideas, los estudiantes sugirieron aportaciones poco transparentes, por falta de tiempo, dado que aunque querían extender sus ideas el profesor suspendió la interacción y la sesión. Después de una hora los alumnos buscaron al profesor y le entregaron la tarea escrita resuelta. Estaban tan concentrados en su resolución que no pudieron abandonarla.
Si vinculamos el escrito con lo expresado anteriormente podemos comprobar que trabajaron en esa idea y la depuraron. Consideraron que el producto $M=p_1p_2..p_n$ de la lista de números primos de

la forma *4k+3*, tenía dos opciones: 1) que *n* fuera par y 2) que *n* fuera impar. En el primer caso el producto *M* sería de la forma *4k+1* y en el segundo de la forma *4k+3*. En el caso 1) se construyó *r=M+2* donde *r* tenía la forma *4q+3* dado que *M* tenía la forma *4k+1* y se agregaron 2 unidades. Se procedió de la misma forma para el caso 2 y esta información fue utilizada para construir la contradicción requerida. Cuando entregaron al maestro el escrito (figura 55, p. 293), discutieron su solución y él recomendó mejorar la presentación escrita.

En la tarea de desafío, que se planteó como recurso para que los estudiantes que terminan antes de lo esperado realicen una tarea opcional más. Los estudiantes trabajaron entre 5 y 7 minutos dado que fue una tarea mucho más sencilla que las anteriores al involucrar conjuntos finitos de números. La proposición a demostrar era: *Es imposible escribir números, utilizando cada uno de los diez dígitos una sola vez y de modo que su suma sea 100.*
Primero reconocieron la hipótesis o información disponible, la conclusión y la extracción de significado de la información. Como veremos más adelante, los estudiantes interpretaron de manera errónea la información. Consideraron números de 10 cifras (todas las posibles combinaciones) en los cuales aparecían los dígitos del 0 al 9 una sola vez. A partir de este reconocimiento erróneo, se produjeron deducciones en las que se aplicó la propiedad conmutativa. Mostraron flexibilidad de pensamiento en relación al proceso retroceder «la única forma de darte 100 sería …». Luego formularon la negación de *Q*. Por último, encontraron la contradicción y eso los llevó a concluir que con eso era suficiente para la demostración demandada. Es importante destacar que el enunciado de la proposición no aparecía en la forma convencional *Si P entonces Q*, y en este caso no se dieron cuenta que los números podían ser de cualquier número de cifras, siempre y cuando entre todos ellos sólo apareciera una vez cada dígito del *0* al *9*. Esto los llevó a probar una proposición distinta de la solicitada.

En la figura 56, p. 295, aparece la producción escrita de los estudiantes desglosada por pasos y en su versión condensada, bien organizada y con claridad al comunicar sus ideas, aún cuando no interpretaron bien la proposición y esto se aclaró en la siguiente sesión.

5.1.4.1.3 Sesión 9c

Esta sesión estaba reservada para pasar a un nuevo tema (sesión 10 contrapositivo). No obstante, dedicó cierto tiempo para retomar la demostración de la proposición anterior que presentaron en forma escrita para analizarla en grupo (fragmento 250-285, pp. 295-296). Primero se aclaró el malentendido en la proposición. Dado que los alumnos habían supuesto que tenían que considerar un solo número con *10* cifras y con los dígitos del *0* al *9* una sola vez, el profesor presentó un ejemplo que involucraba dos números. Los alumnos reconocieron las diferencias en la interpretación de la tarea, dándose cuenta que ni aún con la nueva interpretación la suma resultaría *100* y que también era posible escribir más de un número. El maestro replanteó la situación y los alumnos identificaron la hipótesis, fueron capaces de formular la negación de la conclusión y de manera implícita la conclusión misma. Reconocieron que debían avanzar desde la hipótesis y *NO Q* para construir la contradicción. El maestro consideró importante verificar que la interpretación de la tarea era adecuada y para ello les solicitó ejemplos. Ellos construyeron ejemplos encaminados a comprender la naturaleza de los números y la negación de la conclusión.

Se realizaron deducciones a partir de la hipótesis y la información derivada de la negación de la conclusión. Para la primera deducción el profesor pidió a los alumnos que analizaran las cifras de las unidades y pensaran en qué se requería en esta posición para que la suma fuera *100*. Ellos dedujeron que la suma de los dígitos de las unidades debería darles múltiplos de *10* o *20*. Propusieron ejemplos de dígitos que pudieran aparecer en la posición de las unidades. Descubrieron que no es posible tener números de *3* cifras y consideran números de dos dígitos abordando las posibilidades de la suma de las cifras de las decenas. También dieron un ejemplo extremo del único posible caso de más de dos cifras, un número con todos los dígitos y su suma sería él mismo y mayor que *100*.

Finalmente, el maestro detuvo la discusión para pasar a la siguiente hoja de trabajo, expresando que lo importante era que comprendieran el método y siguieran trabajando después en la demostración de la proposición. Como ya estaban en los últimos *2* días de clase no pudimos recuperar evidencia del trabajo de los estudiantes sobre esto.

5.1.4.1.4 Conclusiones de la sesión 9 (a, b y c)

En la planificación de la actividad se esperaba cubrir en una sola sesión la hoja de trabajo y tener tiempo para discutir sus producciones con el profesor. No obstante, no fue posible y se cubrió en dos sesiones y parte de una tercera. Dejar las discusiones para una sesión al día siguiente, complica el retomar las ideas de manera fiel.

Un rasgo a destacar en la evolución de la interacción es que todos los alumnos participan y, en momentos de desacuerdo, recurren a sus compañeros para ahondar y contrastar diferentes ideas que les permitan tomar decisiones.

También se observó que a pesar de mostrar inconsistencias los alumnos dan muestra de avance y flexibilidad en el proceso de demostrar al mostrar mejora en sus argumentaciones, el lenguaje utilizado, las diferentes formas de expresar y justificar una deducción y la identificación de información clave, manejo de las definiciones y la extracción de significado.

A diferencia de las primeras sesiones se percibió un cambio sustancial en la interacción del profesor con los estudiantes. Los estudiantes hacen mayores aportaciones a la discusión y han avanzado en concentrarse en la información relevante. Este cambio en los alumnos lo atribuimos a la confianza que les dio el trabajo previo de exploración en la resolución de la tarea y la experiencia obtenida gracias a la argumentación y comunicación de ideas con pares.

Durante las primeras sesiones y hasta el momento los alumnos construyeron ejemplos y contraejemplos para hacerse idea de las definiciones o conjuntos en juego y para construir sus conjeturas. Mostraron avance al entender su función en el proceso de la demostración de las proposiciones. También de manera sistemática fueron mejorando al agruparlos en ejemplos genéricos o en espacios de ejemplos.

En relación al manejo de la técnica de reducción al absurdo, consideramos que los estudiantes mostraron comprensión de la técnica al manejarla de manera adecuada y entender la función de la negación construida.

5.1.4.2 Sesión 10. Método del contrapositivo

Análisis a priori

Para esta parte se diseñó la hoja de trabajo 10 (Anexo A) y se tenía previsto cubrirla en una hora. El objetivo era introducir el método del contrapositivo a partir del método directo de avance retroceso y el de reducción al absurdo. Además de establecer la conexión con su correspondiente tabla de verdad, para comprender la equivalencia lógica de *NO Q entonces NO P* con *si P entonces Q* y utilizar este hecho para demostrar proposiciones de la forma *si P entonces Q*. Finalmente se

esperaba comparar los tres métodos vistos hasta el momento y distinguir las diferencias entre ellos. Esto fue complicado, dado que el método del **contrapositivo** es similar al de reducción al absurdo; se empieza suponiendo que *P* y *NO Q* son verdaderos, pero a diferencia del método de reducción al absurdo, únicamente se aplica el proceso de avance a *NO Q*. El objetivo aquí es llegar a que P es falso (es decir a *NO P*).
El método puede verse como de contradicción pasiva, en el sentido de que suponer *P* verdadero proporciona pasivamente la contradicción. Una ventaja del método del contrapositivo, a diferencia del de reducción al absurdo, es que ya sabemos de antemano a que contradicción llegar (*P* y *NO P*).
En relación a la organización de la sesión, se planeó primero iniciar con una explicación del método por parte del profesor, posteriormente realizar la interacción y resolución en equipo de la hoja diseñada y finalmente concluir con la socialización de producciones mediada por el profesor.

Análisis a posteriori
Dada la estrecha relación del método de contrapositivo con el de reducción al absurdo, el profesor inició la sesión retomando la discusión sobre inconsistencias encontradas en las producciones escritas del método de reducción al absurdo de la hoja de trabajo 9 (anexo A).
Luego, el profesor decidió conducir la sesión y no dar lugar a la interacción en equipo, dado que dedicó mucho tiempo a la revisión de las debilidades encontradas en la sesión anterior.
El profesor explicó el método del contrapositivo utilizando como ejemplo la proposición: *Sean a y b enteros con $a\neq 0$. Si a no divide a b, entonces $ax^2+bx+b-a$ no tiene una raíz entera positiva.* Luego, hizo preguntas para que reconocieran los elementos principales de la proposición y los que intervienen en el contrapositivo. Los estudiantes primero reconocieron la equivalencia de *P implica Q* con *NO Q implica NO P*, y construyeron *NO Q* y *NO P*. Finalmente el maestro explicó las deducciones y terminó la demostración, sin que participaran los alumnos. Luego les entregó la hoja de trabajo con la explicación anterior y la versión condensada.

Se planteó a los alumnos la siguiente proposición a demostrar utilizando el método del contrapositivo: *Sea n un número entero. Demostrar que si n^3 es par, entonces n es par*.
Primero negaron la conclusión y la hipótesis que es a donde se pretendía llegar (para obtener la contradicción *P* y *NO P*). El profesor tomó el rol de mediador para recuperar las deducciones de los estudiantes. Al no dar tiempo a que los estudiantes lo visualizaran y dejar que fueran ellos quienes verbalizaran, el profesor concretó la construcción de la demostración. Entre los alumnos se generó confusión al no entender lo que probaron y un estudiante fue quien aclaró.
Se dieron unos cuantos minutos para que los alumnos escribieran su registro escrito (tabla 58, p. 298) en él se observan algunas inconsistencias: mezcla de diferentes métodos (inducción y contrapositivo), deducciones erróneas, hechos mal argumentados, falta de claridad acerca de lo que se probó así como de la contradicción encontrada.

En la siguiente tarea, se les pidió: *Demostrar que, de acuerdo a las reglas del ajedrez un peón se mueve, a lo más, 6 veces.*
En la interacción en grupo (fragmento 20-34, pp. 299), encontramos menos intervenciones del profesor y esto dio mayor oportunidad de interacción entre pares y con la tarea. La naturaleza de la tarea además era más cercana a algo que pudieran imaginar. Eso se reflejó en su forma de organizar sus ideas escritas. Algunas *acciones* fueron inducidas por el maestro: la comprensión de la hipótesis, *x* es peón, la verbalización del conocimiento de la posición en que debían estar los peones y su tipo de movimiento, el reconocimiento de quién es *Q*, *NO Q* y que lo que debían probar era que *x* no era peón (*NO P*).

Al mismo tiempo anticiparon ejemplos que les llevaron a deducir que no se movería hacia delante como peón, y dedujeron que tendría que moverse hacia los lados o retroceder. Revisaron el significado de *NO Q*, es decir no era *6* veces, sino más de *6* veces. Decidieron mover su peón a la primera fila y explorar ese caso, pero un estudiante consideró que era independiente de su posición, que lo relevante era que más de *6* movimientos implicaban violar la regla de movimientos permitidos y el maestro sugirió que si estuviera en la primera fila no sería peón.
Son los estudiantes quienes verbalizaron que para cumplir con *NO Q* se tenían que realizar movimientos que el peón no podía hacer y por lo tanto habían llegado a *NO P*. El registro escrito (tabla 59, pp. 299-300) muestra que se acercaron más que en la tarea anterior a la comprensión del método.

En la tarea de desafío se les pedía: *Demostrar que si c es un número impar, la ecuación* $n^2+n-c=0$ *no tiene solución entera*.
El desarrollo de la demostración de esta proposición lo guió el profesor (fragmento 36-46 p. 300). Empezó solicitando extraer a partir del enunciado la hipótesis y la conclusión. Los estudiantes formaron las negaciones de *Q* y de *P*. El profesor les guió para que se fijaran en que la solución *n* podía ser par o impar y con ello los alumnos dedujeron y argumentaron que en cualquiera de los casos $n^2+n=c$ era par, es decir, habían llegado a *NO P* y concluyeron la demostración

El profesor solicitó a los alumnos un registro escrito de la demostración desglosada y en versión condensada (tabla 60, p. 300). A pesar de la interacción anterior se percibieron ciertos errores como que *NO Q* lo expresaron como *P* implica *NO Q*; que se deseaba llegar a que *c* era impar, es decir a *P* y en realidad se deseaba llegar a *NO P* (*c* par y de hecho llegaron a esto en un paso previo). Esto nos confirma que necesitaron más tiempo para interactuar primero entre ellos, para verbalizar las ideas y que al tratar de explicarlas y argumentarlas con sus compañeros se fueran depurando.

5.1.4.2.1 Conclusiones de la sesión 10. Método del contrapositivo

La primera parte de la sesión se dedicó a discutir errores cometidos en la sesión anterior, dedicada al método de reducción al absurdo. Esto llevó al profesor a no dejar tiempo para trabajo en equipo y conducir él la sesión a través de la exposición del método del contrapositivo y cuestionamientos para que lograran realizar las tareas de la hoja de trabajo. El resultado fue una mezcla de métodos, deducciones erróneas y argumentos poco estructurados y en consecuencia confusión en el método de contrapositivo. Esto es un ejemplo de la importancia que tiene el tiempo dedicado por los alumnos a la interacción entre ellos, ya que les permite exhibir los hechos que no entienden, construir ejemplos, exponer explicaciones y presentar argumentos para convencer a sus compañeros. También creemos que son ellos quienes deben reconocer en qué momento han llegado a la demostración y que sean capaces de verbalizarlo. En apariencia la interacción entre el maestro y los estudiantes deja ver que son capaces de realizar deducciones pero que no han tenido suficientemente tiempo para trabajar por sí mismos sobre la tarea y poder aplicar e interiorizar el método del contrapositivo.
Finalmente, consideramos que la tarea que les permite acercarse más a la comprensión del método del contrapositivo es la de demostrar que: *de acuerdo a las reglas del ajedrez un peón se mueve, a lo más, 6 veces.* Esto puede atribuirse a lo práctico de la tarea y que la cercanía a su entorno les permite extraer significado, además de la experiencia ganada en el manejo de lenguaje matemático, conectivos lógicos, etc.

5.2 Aspectos y conceptos relevantes para apoyar la demostración matemática en esta ingeniería

Poder documentar la formación, evolución y uso de conceptos, objetos y aspectos relacionados con la demostración resultaría inagotable. Por esta razón, en esta sección se abordan sólo algunos conceptos, aspectos y procesos que han sido determinantes a lo largo de la implementación de esta ingeniería para lograr desarrollar competencias demostrativas en los estudiantes. La elección de los mismos se ha hecho a partir de poder construir una cadena de evidencias que nos de cuenta de la evolución percibida en el desempeño de los estudiantes a lo largo del diseño e implementación de la ingeniería. Se presentará aquí, cómo se ha provocado la emergencia de los mismos y cómo han ido evolucionando para apoyar la noción de la demostración como objeto de estudio. Para ello, se presentará la descripción de la trayectoria que han seguido desde el estudio exploratorio, el diseño, hasta la última sesión de la implementación de la ingeniería. Principalmente se aportarán ejemplos de las trayectorias de: la definición como objeto de estudio, el uso de cuantificadores, la formación del concepto de implicación, el uso de ejemplos, no ejemplos y contraejemplos y las pruebas deductivas.

5.2.1 Definición como Objeto de Estudio

El manejo de las definiciones juega un papel determinante en la demostración matemática. De hecho, consideramos que para iniciar la demostración de una proposición y poder avanzar en ella, se requiere de comprender todos los conceptos implicados en el enunciado y de poder desenvolver sus definiciones y extraer significado para poder construir deducciones. En el estudio exploratorio hemos encontrado evidencia en los estudiantes de dificultades con el manejo de definiciones. Durante la implementación de la ingeniería hemos presenciado una lucha para lograr reconstruir definiciones básicas y lograr construir definiciones aceptables en la comunidad matemática. No obstante, en el curriculum de los diferentes niveles educativos se da por hecho su manejo, y no encontramos indicaciones sobre cómo enseñar a definir, ni el momento propicio para introducirlas, ni para que los estudiantes comprendan su significado y el rol que juegan en matemáticas las definiciones. Podemos resumir que desde el estudio exploratorio hasta el final de la implementación de la ingeniería se transita desde un manejo parcial de las definiciones, hacia la reconstrucción de definiciones "conocidas", se establecen acuerdos para dar una buena definición para la comunidad de práctica y de ahí se extrae su significado para ser usada en una demostración matemática. Con el propósito de mostrar la importancia que tiene la definición como concepto y como proceso para avanzar en la construcción de la demostración de una proposición matemática mostraremos un gráfico (ver figura 58), en el cual hemos diferenciado distintos momentos: (0) desde el estudio exploratorio realizado para tomar elementos del diseño, (1) la implementación de la ingeniería en un momento inicial que nos permitió darnos cuenta de los errores, nociones y reconstrucción de la definición de diferentes conceptos y cómo los estudiantes van modificando y comprendiendo la tarea de definir durante el trabajo en pequeño grupo, (2) la modificación de esta noción con la intervención del profesor y, finalmente, (3) cuando se usan las definiciones como entradas conceptuales útiles en el momento de demostrar proposiciones. Estos momentos nos permiten percibir los avances de la formación de la noción, su evolución y el manejo de las definiciones como una competencias demostrativas desarrollada en los estudiantes durante esta ingeniería.

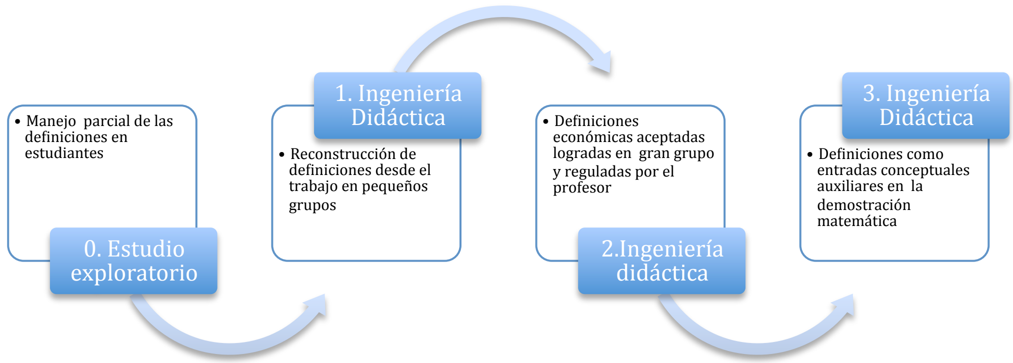


Figura 58. Evolución del manejo de definiciones durante esta ID

Estudio exploratorio 0 (Manejo parcial de las definiciones). En este momento hemos podido documentar que los estudiantes tienen un manejo parcial de las definiciones. Aún cuando pueden enunciar de memoria una definición, no la utilizan para intentar deducir o extraer información de ella que les permita comprender su papel dentro del proceso de demostración. Es decir, para lograr dicha comprensión se requiere identificar en el enunciado de la proposición a demostrar, los elementos u objetos que intervienen, así como sus propiedades, y a partir de esa comprensión poder iniciar el proceso deductivo. El problema de la transición hacia la matemática formal puede verse en el sentido de que se da por hecho que los estudiantes comprenden las definiciones como entidades conceptuales, y que son capaces de usarlas como el inicio de la estructura matemática de la demostración. En este sentido debe tomarse en cuenta en el diseño de la ID el principio de lo concreto sugerido por Harel (2000), en el cual se establece que los estudiantes abstraen una estructura matemática de un modelo dado, del cual la estructura de sus elementos son entidades conceptuales a los ojos de los estudiantes; es decir, el estudiante tiene procedimientos mentales que pueden tomar estos objetos como entradas.

Ingeniería didáctica 1 (Reconstrucción de definiciones en pequeños grupos). En el primer bloque de la ID (hoja 1) se da oportunidad a los estudiantes de reconstruir, en pequeños grupos, definiciones de conceptos conocidos en apariencia muy simples (número par, impar, primo, racional, triángulo isósceles, mediatriz, etc). Los estudiantes necesitan reconstruir la "definición" como entidad conceptual dándoseles oportunidad a partir de lo conocido (Piaget 1997; Greeno 1983). En este camino de reconstruir junto a sus pares las definiciones, se hacen evidentes errores y malos entendidos en torno a ellas. Los estudiantes que participaron de esta experiencia eran de diferentes semestres de la licenciatura y en casi todos los casos pudimos evidenciar las debilidades activadas durante la interacción.

Ingeniería didáctica 2 (Socialización en gran grupo). En este momento se comparten las definiciones generadas en pequeños grupos con la clase completa guiada por el profesor. En este ejercicio de compartir y comparar se generó una discusión en la que los equipos presentan sus argumentos y el profesor orquesta la actividad de la clase tratando que sean ellos mismos quienes vayan depurando sus definiciones, librando inconsistencias y modificando el lenguaje desde una forma vaga a una más elaborada.

Finalmente, en la mayoría de los casos se lograron "buenas definiciones" o definiciones correctas en la discusión, pero algunas fueron no económicas por incluir en el texto propiedades que pueden excluirse sin afectar el enunciado de la definición, ya sea porque son innecesarias o bien por ser deducibles de otra parte del enunciado. En este sentido el profesor ayudó en esta transición, señalando las partes a excluir y demandando argumentos de porqué es posible la exclusión. Esta parte del proceso los conduce de manera natural hacia el pensamiento deductivo de la demostración matemática puesto que las partes excluidas se deducen de otra parte del enunciado.

Ingeniería didáctica 3 (Las definiciones como entradas conceptuales). En el desarrollo de los bloque III y IV de la ID se pudo observar el rol de las definiciones como entradas conceptuales para generar demostraciones de proposiciones. Primero se trató de ayudar a los alumnos centrándolos en el enunciado de la proposición para que respondieran por turnos a la pregunta ¿qué conceptos intervienen en la proposición?. A continuación se trata de extraer el significado de las definiciones para que construyan sus primeras deducciones hasta responder a la pregunta ¿qué significaría llegar a esta conclusión?. Se trataba de que respondieran a partir del significado del o de los conceptos presentes en la conclusión. En esta parte de extraer significado de la definición tomó fuerza la experiencia de la socialización en gran grupo (momento 1 discutido en el párrafo anterior) cuando el maestro les condujo desde buenas definiciones o definiciones correctas a económicas.
A medida que se avanzó en el desarrollo de estos bloques, aunque ya no se guiaba a los estudiantes, realizaron este proceso de manera sistemática dotando de significado a las definiciones y mostrando comprensión del papel que juegan en el proceso de demostrar. En esta parte, los estudiantes comprendieron la necesidad de definir para comunicarse en matemáticas y la necesidad de manejar las definiciones para avanzar en una demostración. En este sentido, el *principio de la necesidad* (Harel 2000) de la definición, que se ha tenido en cuenta para el diseño de la ID, ha tenido efecto para conseguir que los alumnos avanzaran en su percepción del papel que han de cumplir las definiciones en el proceso de demostración matemática. Tal necesidad se consiguió a través de los momentos que tuvieron los estudiantes para discutir entre pares con el objeto de generar diferentes definiciones de objetos conocidos manipulados por ellos con anterioridad. La variedad de definiciones les conduce a la necesidad de construir definiciones válidas para poder comunicarse a partir de la negociación grupal argumentada.
Por último, en esta parte podemos destacar que los estudiantes al final lograron producir demostraciones en versiones condensadas. Aunque estaban habituados a ellas por la forma en que se presentan en los textos o en la instrucción (convicción externa) nunca se habían enfrentado al proceso completo de su construcción por lo que quedaba escondido el papel de las definiciones. Observamos que desde el enunciado de las definiciones son capaces de extraer su significado para construir sus deducciones. Una vez establecidas esas deducciones son capaces de dejar a un lado las definiciones para presentar la demostración de forma condensada y así comunicar el conocimiento en matemáticas.

A continuación a manera de ejemplo concreto presentaremos la trayectoria que han seguido los alumnos durante la implementación de la Ingeniería en relación a la definición de triángulo isósceles.

Trayectoria de la definición de triángulo isósceles en la ID

<u>*Momento 1. Reconstrucción de la definición.*</u> Esta tarea del Bloque I se desarrolla en la hoja de trabajo # 1. Para reconstruir la definición de triángulo isósceles los estudiantes establecen ejemplos particulares realizando dibujos con ángulos de diferentes medidas, partiendo de triángulos rectángulos (45^o, 90^0, 45^0) y equiláteros, especificando sus ángulos (60^0, 60^0, 60^0). Mediante un proceso transformacional del triángulo equilátero piensan en que si “abren” dos

ángulos en la misma medida obtendrán triángulos isósceles y el tercer ángulo se hará cada vez más pequeño.
Partiendo del triángulo equilátero con ángulos 60^{o}, 60^{o}, 60^{o} fijan uno con medida de 45^{0} y establecen qué medida tendrían los otros ángulos [45^{0}, 45^{0} y 90^{0}] para que fuera isósceles. Así construyen su definición «es un triángulo con dos lados iguales, dos lados con la misma longitud» y una que consideran equivalente «**Los mismos ángulos iguales y uno diferente»**
Más tarde al comparar con las definiciones de otros equipos antes de la socialización determinan que «**No, es que no está definido si el tercero [lado] es igual o diferente** ».

Por otra parte otro equipo reconstruye la definición de triángulo isósceles centrándose en las propiedades, «figura geométrica regular de 3 lados» que complementan con «Donde **dos lados miden exactamente lo mismo y uno desigual»**

Acabamos de observar los equipos proceden de diferente manera para reconstruir la definición. Mientras uno se centra en ejemplos particulares y necesita dibujar triángulos más familiares (rectángulos y equiláteros), otro se centra en las propiedades de ese triángulo. En ambos se activa el hecho de si se debe considerar al triángulo equilátero como isósceles.
Sólo se muestra la forma de proceder de dos de los equipos para reconstruir la definición, pero podemos observar el acuerdo al que llegó cada equipo participante en la página 156.

Este camino para reconstruir la definición de triángulo isósceles y las producciones logradas por los estudiantes de diferentes semestres de la licenciatura puede causar gran sorpresa y pone sobre la mesa diferentes cuestiones:
Si los conceptos u objetos que deben definir los estudiantes son conocidos por ellos desde los ocho años de edad *¿por qué producen definiciones parciales?* No es apropiado cuestionar la capacidad de los estudiantes, así que la siguiente pregunta que surge es: *¿en qué momento de sus estudios (desde preescolar hasta licenciatura) se les ha enseñado a definir?* más aún *¿en qué momento aprenden a distinguir cuando están ante una buena definición?*

Momento 2. Socialización en gran grupo. Volviendo a la trayectoria de la definición de triángulo isósceles en esta ID, pasemos a revisar el momento en que se comparten las definiciones producidas por los equipos en gran grupo cuando la discusión es apoyada, regulada y extendida por el profesor.

[45] Alumnos: Es un triángulo con dos lados iguales y uno diferente
[46] Profesor: Bueno, parece que esta definición es suficientemente clara, pero quisiera comentar, si definimos triángulo isósceles aquel que tiene 2 lados iguales, ¿estaría bien? [asienten los alumnos]
[48] P: Y uno que tenga 3 lados iguales será isósceles ¬
[49] As: Sí también, porque tiene 2 lados iguales
[50] P: Sí, ¿verdad? Aunque coincida que el tercero sea igual. Entonces, si pensamos en la definición que incluye "**y un lado diferente**" el triángulo equilátero, que tiene los tres lados iguales, no sería isósceles. Pero con la definición "**aquel que tiene 2 lados iguales**" el equilátero es también isósceles. Vemos […] la importancia de definir de manera precisa.

En este momento se les da oportunidad a los alumnos para contrastar las ideas que previamente han discutido y al mismo tiempo se han activado y depurado algunas debilidades que surgieron en los pequeños grupos. No obstante, otras persisten y, al comparar las definiciones con las de otros equipos como consecuencia de los aspectos discutidos en gran grupo, surge la necesidad de acordar entre todos una definición que aunque presenta algunas inconsistencias se va reconstruyendo de forma más precisa con la ayuda del profesor. Esta parte del proceso fue contemplada en el diseño de la ID para atender *el principio de la generalización* (Harel, 2010). Es decir, en este momento la instrucción está relacionada con un modelo concreto puesto que satisface el *Principio de lo Concreto* y, a su vez, las actividades instruccionales de este modelo permiten mostrar y desarrollar la generalización de conceptos mediante el proceso de definir que posteriormente será utilizado en el contexto de la demostración.

Aunque únicamente hayamos presentado la trayectoria de la definición de triángulo isósceles el proceso que aquí se ha mostrado ha de tenerse en cuenta como perspectiva de futuro. El profesor debería poner en juego estrategias para lograr dirigir las discusiones con los alumnos hacia diálogos académicamente productivos que les den oportunidades para que ellos mismos logren generar buenas definiciones, o bien definiciones económicas (de Villiers, 1998) que son las que se han usado para el análisis de este trabajo. Este proceso es determinante para que los estudiantes no sólo entiendan una definición sino para que además puedan comprender la necesidad de definir en cierta manera, definir en matemáticas.

Momento 3. Las definiciones como entradas conceptuales. A partir de la definición económica correcta de triángulo isósceles los alumnos utilizan dicha definición en el bloque III, hoja de trabajo 6 en el proceso de demostrar la proposición: *Si el triángulo rectángulo XYZ con catetos de longitudes x e y e hipotenusa de longitud z tiene área* $z^2/4$*, entonces el triángulo XYZ es isósceles.*

En el inicio de este proceso los alumnos cuestionan las definiciones que intervienen en el enunciado de la proposición como las definiciones de: triángulo rectángulo, catetos, hipotenusa, o la que nos interesa en este caso que es la de triángulo isósceles.

[4] Un triángulo isósceles es el que tiene 2 lados iguales
[5] 2 ángulos y 2 lados [iguales] ¿verdad?

[6] Pues es lo mismo. Acuérdate que lo podemos definir de cualquiera de las 2 formas. Dependiendo lo que nos diga para poder demostrarlo

En el *momento dos* la definición de triángulo isósceles que establecieron era: un triángulo con dos lados iguales y uno. En el diálogo anterior enunciaron de manera correcta la definición y además [6] hablan de la conveniencia de establecerla en función de lados o ángulos de acuerdo con los elementos de la proposición. En este caso darán la definición en función de sus lados. Los alumnos han mejorado sustancialmente respecto de las definiciones previas establecidas por los equipos **A** (*Es el que tiene 2 ángulos (o lados) iguales)* y **B** (*es una figura geométrica cerrada formada por 3 segmentos de recta, con dos lados de la misma longitud).*
A partir de la definición tratan de extraer la información que necesitan para realizar deducciones teniendo claro que como el triángulo también debe ser rectángulo sus catetos deben ser iguales.

[20] Bueno, aquí no sabemos que estos lados no son iguales pero podemos decir que, por ejemplo, el ángulo donde están *x* y *y* mide 90 grados y … que el triángulo …
[21] //tiene área de una hipotenusa cuadrada entre cuatro, [apoyan la intervención].

[25] Nada más estás explicando que *z* es igual a la hipotenusa, pero se necesita probar que tiene dos de sus catetos iguales [que es un triángulo isósceles]. Que *x* y *y* son iguales

Al considerar también el caso de un triángulo equilátero se dan cuenta de que deben descartar esa posibilidad al contrastarla con la definición de triángulo rectángulo. En este momento mostraron confianza pues eran conscientes de hacia dónde debían dirigirse.

[27] Pero la hipotenusa ahí sí puede ser igual a ellos o no

[29] Ah sí, bueno. También si es rectángulo, no puede ser igual; la longitud es más grande

[28] Bueno que sea isósceles significa que x y y sean iguales y la hipotenusa puede serlo [piensan en la posibilidad de sea triángulo equilátero]

[31] Okay ya. Queremos probar que estos dos [catetos] son iguales

[35] Y queremos llegar a que *x* es igual a y ¿no?

Combinando lo anterior con otras deducciones finalmente llegan a la conclusión completando con ello la demostración.

[79] Para que esto se cumpla sería *x* igual a *y*. Porque x^2 y y^2 igual a 2*xy*. Y luego de ahí, despejar *y*

[80] Si mejor igualamos a cero [Apoyan la idea: $x^2-2xy+y^2=0$].¡Perfecto! *x* menos *y* es igual a 0, *x* igual a *y*

[83] Algo estamos haciendo mal ahí. Sí, ¿no? … cuyos catetos son *x* y *y* [revisa]

[84] Entonces el área está definida *x* por *y* sobre dos y esto es igual a *z* cuadrada sobre *4*, ¿no? [asienten]. Entonces igual a *x* cuadrada, más *y* cuadrada, sobre *4*. Luego lo demás queda bien *x* igual a *y*

[85] Entonces el triángulo es isósceles [asienten]

En el registro escrito de sus producciones, tabla 40, p. 254, observamos el manejo de las definiciones y cómo extraen información de las mismas.

Finalmente escriben una versión condensada de la demostración que muestra la evolución en el manejo de las definiciones. En este momento son capaces de considerarlas como entradas conceptuales para la demostración.

$\boxed{\text{A}}$ *Dado que tenemos el triángulo rectángulo XYZ entonces su área está definida por* $xy/2= z^2/4$ *y por definición del* $\triangle$ *rectángulo sabemos que* $z^2 =x^2+y^2$ *entonces* $zz/4=(x^2+y^2)/4$ *entonces* $xy/2=(x^2+y^2)/4$ *luego* $xy=(x^2+y^2)/2$ *despejamos* x^2+y^2 *y tenemos* $2xy=x^2+y^2$ *volvemos a despejar y nos da* $0= x^2-2xy+y^2$ *lo que es igual a* $(x-y)^2=0$ *y para que esto se cumpla* $x-y=0 \therefore y=x$.

$\boxed{\text{B}}$ *Tenemos que XYZ es un triángulo rectángulo, x, y catetos, z hipotenusa y* $A(\triangle XYZ)=z^2/4$. *Luego del* $\triangle$ *rectángulo obtenemos que:* $x^2+y^2= z^2$ *y* $A=z^2/4=xy/2$. *Entonces* $z^2=2xy$ *y sustituyendo* $x^2+y^2=2xy$. $x^2-2xy+y^2=0$; $(x-y)^2=0$; $x-y=0 \Rightarrow x=y$. *Como* $x=y$ *entonces* $\triangle XYZ$ *es isósceles.*

Se puede observar que considerar las definiciones como entradas conceptuales en la demostración muestra el dominio que tienen los alumnos de las mismas y cómo las usan como una doble implicación, tal objeto es X sí y sólo si satisface las propiedades Y. El manejo de las definiciones como implicaciones permite a los alumnos extraer significado de ellas y considerarlas para construir (método avance) o retroceder (método retroceso) en el proceso de demostrar.

5.2.2 Uso de cuantificadores

Los cuantificadores juegan un papel determinante en la construcción de negaciones como se puede ver en la contrastación del diseño y la implementación de la ingeniería. Los estudiantes cuando ingresan a la licenciatura no tienen experiencias previas formales vinculadas al uso de cuantificadores y, por ello, extraen significado de manera informal, lo que suelen confundirlos cuando trabajan en un ambiente matemático formal. Esto, por ejemplo, lo pudimos observar en una de las tareas de la ID, en este trabajo en la sección 4.4.2.1 Análisis de comprender la negación pp. 228-229 cuando documentamos cómo los equipos fallaron al enunciar todas las negaciones en las que el enunciado presentaba algún cuantificador. En este sentido, el profesor, durante la socialización, ayudó a los alumnos en la construcción correcta de las negaciones dándoles tiempo suficiente para la reflexión. Al jugar los cuantificadores un papel importante en la construcción de negaciones, entre otros tópicos, resultar ser un contenido crucial que se debe usar en el método de demostración por reducción al absurdo y en el contrapositivo. No obstante, no pudimos documentar el avance en la demostración matemática al no incluir en las proposiciones a probar por los métodos mencionados, enunciados con cuantificadores. Finalmente se debe resaltar la importancia de que los estudiantes muestren sus errores pues al activarlos se pueden discutir en el aula y se les puede ayudar para que sean conscientes de ellos y se puedan ir paliando las debilidades. Con la finalidad de mostrar la importancia y la manera en la que figuran los cuantificadores al encarar la demostración matemática, hemos diferenciado distintos momentos: (0) desde el estudio exploratorio realizado para tomar elementos del diseño, (1) la implementación de la ingeniería en un momento inicial que nos permitió darnos cuenta de los errores y nociones de los estudiantes en trabajo en pequeño grupo, (2) la modificación de esta noción con la intervención del profesor y, finalmente, (3) cuando toman lugar como entrada conceptual útil en el momento de demostrar proposiciones. Estos momentos se presentan en la figura 59 y esto nos permite percibir los avances de la formación de la noción, su evolución y uso en la demostración.

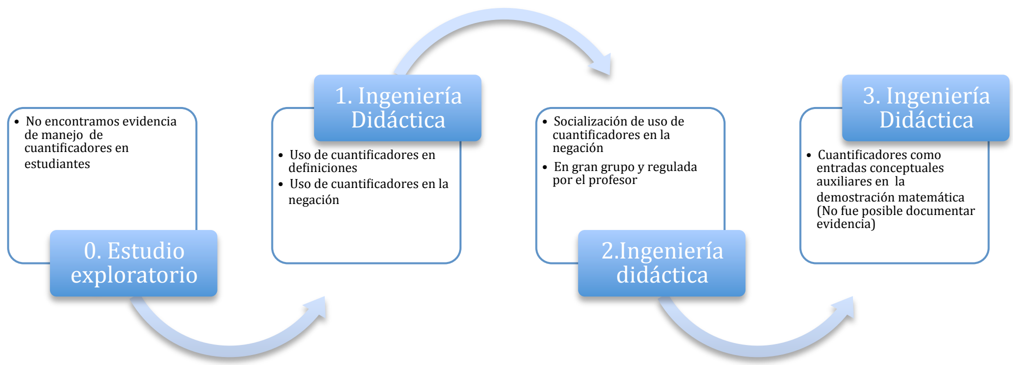


Figura 59. Avance del manejo de cuantificadores durante este trabajo

Estudio exploratorio 0 (Manejo parcial de cuantificadores). En el estudio exploratorio se estableció que comprender la negación de enunciados que contienen cuantificadores (para todo, para cada, para algún, etc) son de gran importancia para trabajar en un ambiente matemático formal. Sin embargo, éste es un tópico que no resulta sencillo para los estudiantes principiantes en este ambiente, en virtud de que al no tener oportunidades para trabajar estas nociones, extraen significado de manera un tanto informal lo que suele resultar ser fuente de confusión cuando se preparan para trabajar en un ambiente matemático formal.

Ingeniería Didáctica 1. En la hoja de trabajo # 1, cuando los estudiantes buscaban reconstruir la definición de triángulos semejantes después del trabajo en el equipo **C** y antes de la socialización los estudiantes establecen su definición: «cuando alguno de sus ángulos o de sus lados pueden ser iguales». En esta aportación ya nos encontramos con un uso inadecuado de cuantificadores que da lugar a más de una interpretación: que "todos los triángulos son semejantes", que "o los ángulos son iguales o bien sus lados lo son", que los triángulos con algo en común son semejantes (como los rectángulos, isósceles, etc).
También, en esta misma sesión, para reconstruir o completar la definición de un *entero a divide a un entero b si…,* únicamente un equipo (**E**) de ocho participantes usa adecuadamente el cuantificador completando con: *se cumple que xa=b para algún x entero*. Durante la socialización el profesor enfatiza en el uso de "existe un" entero y también en "para algún".

Más adelante, (hoja # 3 sobre proposiciones), cuando los estudiantes tienen que decidir el valor de verdad de: *$x^2+y^2>1$, donde x e y números reales* los equipos **A** y **B** deciden que es *falso* usando un contraejemplo: «Porque si *x* y *y* fueran cero o, *x* o *y* fueran igual a *1*, entonces *0* y *1* no es mayor que *1*» « Donde x^2+y^2 nos de igual o menor a *1*». No obstante, en la interacción en gran grupo ambos equipos deciden que el enunciado no presenta cuantificadores y, al no decirse en la tarea que tiene que verificarse *para todo número real* o bien usar otro cuantificador, no es una proposición porque la palabra "donde" es ambigua y se entiende de diferentes maneras.

La palabra "donde" es interpretada en este caso como "sin valores definidos". Esto se comprueba en las *acciones* guiadas por el profesor que desafía a los estudiantes para que establezcan el valor de verdad de la proposición usando ejemplos con valores dados (*x=2* y *y=3; x=1/2* y *y=1/2*). Finalmente concluyen que no se trata de una proposición al no poder decidir su valor de verdad. En esta parte los alumnos empiezan a considerar los cuantificadores.

Finalmente en la hoja # 4 sobre conectivos lógicos, cuando hay que construir negaciones, al igual que en el estudio exploratorio el uso de los cuantificadores representan una gran lucha para los estudiantes.
En las proposiciones en que aparecen cuantificadores los estudiantes construyen las negaciones de manera errónea al no tenerlos en cuenta. En el registro escrito el patrón de negación del equipo **A** en los tres enunciados es: agregar sólo la palabra "no". En el caso del equipo **B**, el patrón de negación es cambiar los cuantificadores "cada" por "todo", "todo" y "al menos uno" por "ninguno".

P_4:Cada aula tiene una silla que no esta rota $\boxed{\text{A}}$ Cada aula tiene una silla que está rota $\boxed{\text{B}}$ Toda aula tiene una silla rota
P_5:Todos los estudiantes son buenos $\boxed{\text{A}}$ Todos los estudiantes no son buenos $\boxed{\text{B}}$ Ningún estudiante es bueno
P_6:Al menos uno de mis compañeros está casado $\boxed{\text{A}}$ Al menos uno de mis compañeros no está casado $\boxed{\text{B}}$ Ninguno de mis compañeros está casado

Ingeniería Didáctica 2. En la socialización de las negaciones anteriores, el profesor a fuerza de repetir y enfatizar el cuantificador consigue que los estudiantes construyan de manera adecuada la negación del enunciado 4 [63]. Esto les lleva a construir de manera inmediata las negaciones de los enunciados 5 y 6 .

[55] Profesor: Cada aula tiene una silla que no está rota
[56] Alumnos: [la negación] Cada aula tiene una silla que está rota
[57] P: [vuelve a preguntar] La negación de "cada aula tiene una silla que no está rota"
[58] As: Cada aula tiene una silla que está rota
[59] P: ¿Esa sería la negación?, a ver analicemos un poco [espera]
[60] As: Cada aula tiene al menos una silla que está rota
[61] As: Para toda aula hay una silla rota
[62] P: Aquí, cada aula tiene "una" silla no rota
[63] As: Existe un aula con todas las sillas rotas
[64] P: ¡Esa sería la negación! Hay que tener mucho cuidado con los cuantificadores. Si hay una, la negación es para todo. Luego "todos los estudiantes son buenos"
[65] As: Existe un estudiante que no es bueno
[66] P: Existe un estudiante, de acuerdo? A ver, "al menos uno de mis compañeros está casado
[67]As:Todos mis compañeros NO están casados

No fue posible contrastar si los alumnos tienen en cuenta los cuantificadores al realizar una demostración. En el diseño de la Ingeniería faltaron algunas proposiciones que utilizaran cuantificadores sobre todo al abordar los métodos de reducción al absurdo o del contrapositivo.

5.2.3 Formando el concepto de Implicación

En el estudio exploratorio observamos que no se reconocía el papel condicional de la hipótesis y en consecuencia en repetidas ocasiones se pudo comprobar el error de la recíproca. También cuando el *si* y el *entonces* no aparecen de manera explícita, los estudiantes discrepan en su elección de la hipótesis y la conclusión por lo que deben revisar el papel de la hipótesis. A fin de realizar la confrontación entre el estudio exploratorio y los resultados de la ingeniería utilizaremos las etapas indicadas en la figura 60 para percibir su evolución. En dichas etapas, pasamos desde, (0) el estudio exploratorio realizado para tomar elementos del diseño, (1) la implementación de la ingeniería en un momento inicial que nos permitió darnos cuenta de los errores y nociones de los estudiantes en trabajo en pequeño grupo, (2) la modificación de esta noción con la intervención del profesor y, hasta, (3) cuando toman lugar la estructura y función de las componentes de una implicación como entradas conceptuales útiles al momento de demostrar proposiciones.

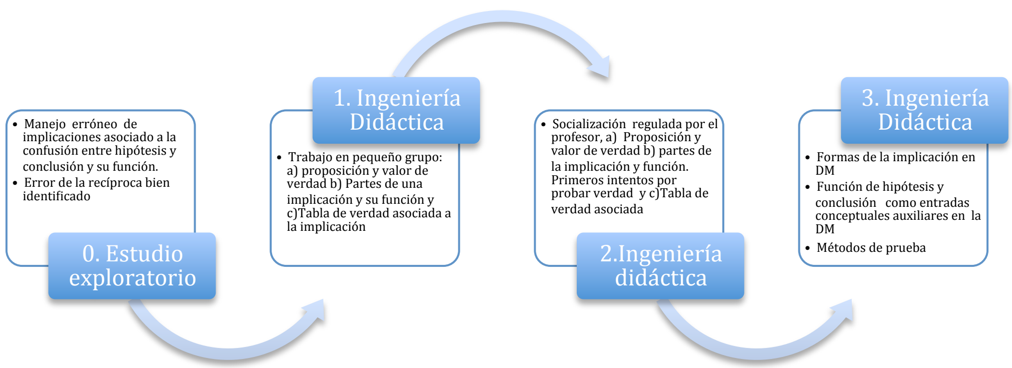


Figura 60. Avance del manejo de la implicación

Estudio Exploratorio 0. Los estudiantes que participaron en el estudio exploratorio cuando trataron de probar una implicación confundían la hipótesis con la conclusión tanto al considerar la información que debían suponer cierta, como al pensar qué era lo que debían probar (ver capítulo II). Esto condujo en repetidas ocasiones a cometer el error de la recíproca (Alvarado & González, 2009, 2010). Las dificultades y errores encontrados en este estudio exploratorio aparecen de forma insistente en la bibliografía revisada al efecto.

Ingeniería Didáctica 1a (Proposición y valor de verdad). En cuanto a la noción de proposición matemática y su definición, en la hoja 3, durante la discusión en pequeño grupo se establecieron las siguientes respuestas en los equipos **A** y **B** construidas a partir de ejemplos específicos.

$\boxed{A}$ « Es un enunciado que se considera V o F, más sin embargo necesita de una demostración».	Rasgos esenciales de una proposición matemática, es decir que puede ser *V* o *F* (sentido excluyente) y que para sustentar dicho valor es necesario presentar una demostración.
$\boxed{B}$ « Enunciado cuyas propiedades pueden ser afirmativas o negativas. Hay una relación entre dos elementos».	Se centran en “propiedades” que se incluyan en el enunciado y en la posibilidad de que sean “afirmativas o negativas” (sentido excluyente y entendiendo como *V* o *F*). Es importante la presencia de una relación (e.g. =,≠,>,<).

En esa misma sesión (hoja 3) para determinar el valor de verdad de: *Si* $x>0$*, entonces* $\log_7 x>0$ *(donde x es un número real)* los estudiantes no manejaron correctamente la hipótesis y conclusión cuando surgió un contraejemplo, y tuvieron problemas con el concepto de logaritmo. Fue necesario verbalizar sucesivas veces lo que entendían por dicho concepto hasta lograr su construcción definitiva. La dificultad radica en que, por un lado tienen una definición de logaritmo poco operativa a partir de exponentes puesto que han de manejar dos variables (*x* y *p*) inversas una de la otra y, a veces, sin ser conscientes, las intercambian. Por otro lado, al buscar un contraejemplo, han de probar que, para algún valor que verifique la hipótesis, no se verifica la conclusión, pero esto no lo tienen totalmente asumido ya que saben que para que una implicación sea *verdad* ambas premisas deben serlo.

Para poder resolver la tarea (ver fragmento 200-234, pp. 215-216) la retomaron desde el principio realizando de forma paralela acciones para: 1) edificar el significado de contraejemplo, 2) iniciar un proceso de consolidación del concepto de logaritmo recién construido afianzándolo con herramientas algebraicas primarias que les aclarara el papel del exponente, con diferentes ejemplos y cambiando de notación y 3) edificar sobre el papel de la hipótesis en una implicación. Esto les llevó a activar de nuevo el contraejemplo que demuestra que la proposición es falsa. Finalmente en el registro escrito del equipo **B**, «$7^p=x$, $7^0=1$, $x>0$ pero $log_7 1=0$ y no cumple la proposición» se exhibe un contraejemplo para probar que la proposición es *falsa*.

Por su parte el equipo **A** en su registro escrito, expresa de forma errónea que la proposición es *verdad:* dado que «Al elevar 7 a cualquier número > 0 siempre será mayor que cero». Su argumento muestra que no hay una comprensión del significado del logaritmo.

Ingeniería Didáctica 2 a. Proposición y su valor de verdad apoyados por el profesor

En la interacción en gran grupo (ver fragmentos 67-71a, p. 207 y 312-332a, p. 217) se muestra que los alumnos han identificado tres aspectos en la definición de proposición: que hace referencia a una propiedad, que puede ser afirmativa o negativa (en el sentido de verdad o falsedad) y debe incluir una relación entre dos elementos. Al compartir las respuestas del trabajo en pequeños grupo, el profesor concentra todas las participaciones de los estudiantes y les da forma para enunciar cuando es o no proposición matemática.

A continuación, tratan de decidir en el grupo si el enunciado: *si* $x>0$*, entonces* $log_7 x>0$ *(donde x es real*), es una proposición. Aunque aún entienden la implicación de manera limitada, es decir en forma de ecuaciones o desigualdades que requieren conocer valores numéricos condicionales.

Ingeniería Didáctica 1 b (Partes de la implicación y su función. Trabajo en pequeño grupo) Lo primero que perciben los alumnos en cuanto a los componentes de una implicación es que la conclusión se deriva de la hipótesis. Sin embargo también dan muestra de no tener clara la naturaleza de la hipótesis al considerarla como propiedad o evento independiente

[372] La conclusión depende de la hipótesis
[374] Ajá, pero al verificar la hipótesis, pero la hipótesis …[otro alumno] Es como una propiedad ¿no?
[376] La hipótesis vendría siendo () una propiedad ¿no? […] Mira, por ejemplo este es un entero, sea *x* un entero… es una hipótesis, una propiedad, entonces…
[382] O puede ser un evento, un evento [otro estudiante completa y asienten] Un evento independiente
[385] Porque si pasa esto, entonces pasa aquello. Entonces la conclusión es un …
[386] Otro evento que está en función del evento independiente …¿?
[387] O de las propiedades de la hipótesis
[391] Una o más propiedades, bueno así, es un evento que está en función de la hipótesis,

Al tratar de identificar hipótesis y conclusión en diversas proposiciones, en las dos proposiciones que tiene la forma habitual *si P entonces Q* no tienen problema. En las que se presenta primero la conclusión y después la hipótesis y que además contienen palabras distintas a las habituales o se omite la palabra *entonces* no muestran conflicto con el orden y de inmediato identifican que "si" y "cuando" tienen la función de condicionar la conclusión. Finalmente para identificar hipótesis y conclusión en la proposición: *La suma de los n primeros enteros positivos es n(n+1)/2*, los estudiantes del equipo **B** (el equipo **A** abandona la tarea) identifican que el enunciado no presenta la forma habitual de implicación y no se menciona ninguna de las palabras (si y entonces) y tampoco algún sinónimo (cuando e implica, es posible, $\mapsto$). Así que intentan transformar la proposición a la forma clásica de una implicación para identificar sus componentes [405].

[399] La suma de los *n* primeros enteros () [se detienen y contesta un estudiante] Esta es la hipótesis
[401] *Si* son primeros enteros positivos, digamos que tenemos los primeros enteros positivos *entonces* la suma es esta [*n(n+1)/2*]
[402] Esto es la conclusión
[403] La suma de los *n* primeros. Mmmh. Ah. Esta es la hipótesis, porque ()
[404] *Si* son primeros enteros positivos *entonces* la suma de los *n* es () Bueno digamos que *si* tenemos los *n* primeros enteros positivos *entonces* la suma de ellos es esta
[405] Se me hace que esta es la hipótesis [señala] todo esto es la suma [*n(n+1)/2*] en consecuencia de tener los primeros enteros positivos
[406] Tú le pusiste ahí [la compañera contesta] Sí, ajá. Esta es la hipótesis [*n(n+1)/2*]

Aunque el diálogo apunta que la hipótesis es "[si consideramos] los *n* primeros enteros positivos" y la conclusión es la fórmula para calcular la suma, en la producción escrita se especifica lo contrario. Aunque los estudiantes avanzan en la identificación de hipótesis y conclusión a veces intercambian de forma arbitraria la hipótesis y la conclusión. Por ejemplo, cuando los estudiantes trabajan con la proposición: *Si p y q son números reales positivos con* $\sqrt{pq} \neq (p+q)/2$ *entonces* $p \neq q$, se aprecia que, dada la estructura de la proposición enseguida identifican el *si* y el *entonces* y a partir de ello determinan la hipótesis y conclusión. Sin embargo, una alumna pone en consideración del equipo el intercambio de las partículas *si* y el *entonces* en el enunciado. Sus compañeros se dan cuenta del error cometido e intentan disuadirla mediante diferentes argumentos.

[409] Si *p* y *q* son números reales [positivos con $\sqrt{pq} \neq (p+q)/2$ … Todo esto es hipótesis
[410] Queda nada más ese pedacito [entonces $p \neq q$] [asienten convencidos que es correcto]
[412] Esta es la hipótesis … [Si *p* y *q* son números reales [positivos con $\sqrt{pq} \neq (p+q)/2$]
[413] Esa es la hipótesis y esta es la conclusión [entonces $p \neq q$]
[414] No, no puedes decir, *p* diferente de *q*, entonces *p* y *q* son números reales positivos ..
[415] Cómo saber que son números reales positivos si sólo son diferentes y ¿si son negativos?
[416] Pues es que léelo al revés para que veas qué tanta congruencia tiene, ¿no?. Bueno yo digo
[417] No, así no es como aparece

En la proposición: *cuando x es un número real, el valor mínimo de x(x-1) es al menos -1/4*, para ayudarse en la identificación de la hipótesis y la conclusión los alumnos cambian la palabra *cuando* por el *si*. Pero, al igual que antes, la misma alumna vuelve a cambiar el orden mostrando falta de comprensión de la forma condicional. En esta ocasión ella misma se da cuenta del error recurriendo a uno de los argumentos utilizados para persuadirla de invertir la implicación. Con intención de convencerla de nuevo, se enuncia la proposición de tal manera que se comprenda la función de la hipótesis «*Si x es número real entonces el valor [mínimo de x(x-1) es al menos -1/4]…*» Sin embargo es ese cambio (correcto) combinado con la no comprensión del papel condicional de la hipótesis lo que genera que piense que puede cambiar el orden de forma arbitraria. Esto lo confirma cuando sugiere que el cambio propuesto es posible *« A ver el valor mínimo de x por x menos 1.. [es al menos 1/4], ¿de aquí puedo llegar a que x es un número real?»*

Para sacarla de su error insisten en la función de la hipótesis y la conclusión, más que pensar si de la conclusión puede llegar a la hipótesis para justificar su intercambio. «Es que sí puedes llegar pero más bien por culpa de esto pasa esto, no por culpa de esto pasa esto»

Ingeniería Didáctica 2 b (Componentes de la implicación y su función, primeros intentos por probar verdad apoyados por el profesor) El profesor retoma para la discusión en la interacción en grupo la definición construida de hipótesis y conclusión en los equipos, al darse cuenta que los estudiantes ven la hipótesis como algo independiente. Al preguntarles por la función de la hipótesis y recurriendo a un ejemplo consigue que comprendan el papel de la hipótesis en una implicación.

[430] Profesor: […] en el caso de la implicación, ¿qué función tiene la hipótesis?, ¿para qué me sirve?
[431] Alumnos: Enunciado *falso* o *verdad*, el cual consideramos para saber si alguna proposición, etc, es *falsa* o *verdad*
[432] As: Para saber qué es lo que necesitamos [al demostrar], algo que debo tener en cuenta
[434] As: Evento independiente que enuncia ciertas propiedades
[435] P: Regularmente en matemáticas cuando van a demostrar, esta parte [la hipótesis] ¿para qué me sirve? ¿qué me aporta en la demostración? […] Bueno, por ejemplo, demuestre que si x es un número par entonces su cuadrado también es par [escribe]
[436] As: Pues agarro un par y de ahí empiezo [cuestiona el profesor] Pero entonces qué es
[438] As: Son las bases para probar
[439] P: Son las bases. Eso se supone que es cómo ¬ Cuando yo quiero probar esto [señala la hipótesis "si x es un número par"] se considera que es ¬ [contestan los alumnos] Cierto, V

Cuando el profesor intenta que comprendan la técnica directa para probar una implicación ésta entra en conflicto con la tabla de verdad asociada a la implicación. La discusión generada les permitirá avanzar en otro momento de la ingeniería.

[442] Alumnos: Se supone, pero no se considera verdad [la hipótesis]. Es que también cuando se considera la hipótesis *F* y se llega a que es *V* [el profesor pide explicación]¿Cómo?
[444] As: Si la hipótesis es falsa y llegas a que es verdad
[445] Profesor: Si se da en ambos [si supones la hipótesis falsa y verdad y la conclusión es verdad] quiere decir que a lo que llegas no depende de lo que supones, entonces es *V*.

Pero una alumna interviene señalando que «cuando es una hipótesis *falsa* pues es lo contrario». Esto provoca que el profesor active como ejemplo la proposición tratada previamente sobre el logaritmo, lo cual da lugar a la construcción del significado de la hipótesis de acuerdo a su función en el proceso de demostración. Sin embargo, en este proceso "colectivo" de construcción, el efecto no es el mismo para todos los estudiantes ya que intervienen otros conceptos que aún no son capaces de diferenciar (e.g "contradicción" con el sentido de falsedad [450]).

[446] Alumnos: [otra alumna] Cuando es una hipótesis falsa, pues es lo contrario
[447] Profesor: Pero en el proceso de demostrar ¿cómo utilizan la implicación? Regularmente dices: si pasa esto [hipótesis] demuestra que esto [la conclusión] es *V*. Dan por hecho que la hipótesis o esta parte [señala en el ejemplo la parte, *si x es un número par*] es *V*. Por ejemplo, en una proposición que tenían [busca en la hoja de trabajo] ¿dónde fue? aquí está, si x es mayor que cero entonces log base 7 de x es mayor que cero ¿verdad? Ustedes dijeron que era falsa, pero parten de qué hecho
[448] As: De que x mayor que cero
[449] P: Suponen que esto es verdadero [escribe y señala]
[450] As: ¡Ah y llegamos a una contradicción!
[451] P: Y en ese proceso de demostrar analizan a partir de que x es mayor que cero

Algún alumno insiste en que «la hipótesis puede ser también *falsa* o *verdad»* puesto que las tablas de verdad se imponen sobre la construcción que se ha hecho de la implicación (más adelante se trabajará el proceso de demostrar asociado a la tabla e verdad). Por ello el profesor vuelve a enfatizar el papel de la hipótesis tratando de incidir en la forma de proceder para demostrar una implicación.

[453] Profesor: En realidad la hipótesis vamos a partir del hecho de que es V y entonces llegamos a una conclusión que puede ser ¬ [contestan los alumnos] falsa o verdadera
[455] P: Sí, y eso nos determina la verdad o falsedad de la proposición.

En la proposición: *la suma de n primeros enteros positivos es n(n+1)/2*, dado que el *si* y el *entonces* no aparecen de manera explícita, los estudiantes discrepan en su elección de la hipótesis y la conclusión por lo que deben revisar el papel de la hipótesis. En este sentido el profesor sugiere que reescriban el enunciado.

[464] Alumnos: Nosotros le pusimos que *n(n+1)/2* es hipótesis porque de ahí se concluye que es la suma de los primeros números enteros positivos
[465] Profesor: De qué partimos ahí
[466] As: Bueno de que son los primeros enteros positivos
[467] As: También la parte de la fórmula se puede considerar como hipótesis
[468] P: No necesariamente, porque esta fórmula se puede dar para otro tipo de números
[469] As: La hipótesis sería entonces los *n* primeros enteros positivos
[470] P: De manera inherente la hipótesis sería: tomemos los n primeros enteros positivos y entonces su suma es *n(n+1)/2*. Cómo podemos reescribir esto
[471] As: Ya ven, yo lo había hecho así [se dirige a sus compañeros de equipo]
[476] As: Si tomamos los primeros *n* enteros positivos
[472] P: ¿De acuerdo? entonces su suma es *n(n+1)/2* [asienten los estudiantes]

Finalmente, en la socialización en grupo se aprovecha para relacionar los elementos importantes y los constructos obtenidos en la actividad, así como la necesidad y su utilidad para el proceso de demostrar. Para ello se retoman las actividades previas, se rescatan ideas clave y se establece la conexión correspondiente entre ellas.

[478] Profesor:[Cuando *x* es número real, el valor mínimo *de x(x-1)* es al menos *-1/4*] ¿cuál es la hipótesis?
[479] Alumnos: Cuando *x* es número real
[480] As: Y la conclusión el valor mínimo de *x(x-1)* es al menos *-1/4*
[481] P: [...] cuando queremos demostrar una implicación debemos partir de que la hipótesis es *verdad* y a través de una serie de pasos... esos pasos ¿quién no los va a dar? el área en la que estamos trabajando, la teoría previa que tenemos. A partir de la hipótesis y de la serie de pasos sustentados en la teoría previa tenemos que manipular y llegar a la conclusión. [...] Cuando estamos demostrando algo en una implicación ¿qué diríamos?: [1)] ¿Qué cosas nos está dando la hipótesis? y [2)] ¿qué cosas conozco de la teoría? [...] y con todo esto y la hipótesis a través de un razonamiento deductivo llegar a la conclusión.
La idea de estas prácticas es acercarnos cada vez más a qué es lo que hay que hacer cuándo demuestras. La primera situación fue que construyeran “algo” a partir del nombre, tenían que “definir”[...] Luego tenían una definición y a partir de ahí construían o representaban el objeto. Luego el siguiente paso es: qué tengo, qué es lo que me dan y a dónde quiero llegar.

Ingeniería Didáctica 1 c (Tabla de verdad asociada a la implicación. Trabajo en pequeño grupo)
Posteriormente durante otra sesión (hoja 4) trabajan para construir la **tabla de verdad de la implicación** a partir del análisis de proposiciones como: *P: hoy está lloviendo,* y *Q: Sofía y Oscar esta tarde verán una película*. Después de una explicación breve de la implicación como conectivo entre enunciados, los símbolos utilizados (→, “,”), la forma y significado se pide a los estudiantes que escriban el significado de la implicación y su recíproca y que expliquen sus diferencias.
En los registros escritos de los estudiantes (tablas 29 y 30 p. 232) se puede ver que no tienen problema para entender el sentido de dependencia de la hipótesis.

Para trabajar las formas equivalentes a una implicación se les muestran ejemplos y se les pide que construyan enunciados equivalentes en otras situaciones. Los estudiantes se limitan a adaptar los enunciados a las estructuras establecidas. Se observa que no tienen suficiente cuidado en la escritura del enunciado e interpretan la implicación como una “ocurrencia”. En el contexto cotidiano es frecuente vincular “ocurre” con “verdadero” y esto propicia que los estudiantes consideren las proposiciones como “eventos”, como lo discutimos al inicio de este apartado (ver p. 232).

A continuación se les pide que completen la tabla de verdad de la implicación y su recíproca pensando en los enunciados dados. El equipo **B** establece los valores de verdad de manera correcta. En el equipo **A** establecen que cuando *P* es *falsa* y *Q* es *verdad* consideran que la implicación es *falsa*. Ya anteriormente se había percibido la relación entre la tabla de verdad y el proceso de demostración, que sigue manifestándose en esta actividad.

P	*Q*	$P \rightarrow Q$	$Q \rightarrow P$
V	*V*	A,B *V*	A,B *V*
V	*F*	A,B *F*	A *F* B *V*
F	*V*	A *F* B *V*	A,B *F*
F	*F*	A,B *V*	A,B *V*

Ingeniería Didáctica 2 c (Tabla de verdad asociada a la implicación. Trabajo apoyado por el profesor)

En la socialización de los valores de la tabla de verdad de la implicación trabajada en los equipos, la discusión se centró en analizar por qué los equipos diferían en las respuestas del valor de verdad otorgado a *P implica Q* cuando *P* es *falso* y *Q* es *verdad* y viceversa. Para explorar y comprender esto se consideraron las cuatro posibilidades de la implicación y el profesor les fue realizando preguntas que condujeron al establecimiento de las dos situaciones clave en el proceso de demostración: 1) *P* (*V*), *Q (V)*; 2) *P (V)*, *Q (F)*. La primera es necesaria para probar que *P* implica *Q* y la segunda para probar que *P* no implica *Q*. Luego, se trató el caso en que la hipótesis es *F* concluyendo que no importa el valor de verdad de la conclusión para determinar que la implicación es *verdad*, para lo que se recurrió a diferentes ejemplos que ilustraran este caso.

Ingeniería Didáctica 3 (Hipótesis y conclusión como entradas conceptuales en la demostración) El profesor explica el método directo de prueba, *avance-retroceso* con especial formato (ver tabla 38, pp. 250-251) para ayudarles posteriormente a escribir la versión condensada de la demostración.

En las cuatro últimas sesiones de la ingeniería didáctica se sigue este formato. Los estudiantes para responder a las preguntas ¿Qué información se supone cierta? y ¿Qué se pretende probar?, son capaces de identificar la hipótesis y la conclusión sin problemas poniendo especial cuidado en la función que tienen cada una en el proceso de demostrar.

No ha resultado sencillo construir una comprensión de las implicaciones y aún con el tratamiento detallado que se ha hecho, en repetidas ocasiones se han detectado errores relativos a la distinción de la hipótesis y la conclusión así como la función de ambas.

Uno de los errores más persistente es el error de la recíproca que incluso se muestra durante la sesión 8. En esta ocasión los estudiantes se enfrentaron a una tarea en la que deben trabajar con un alfabeto que consta de dos letras *s* y *t*, junto con las siguientes reglas –que pueden aplicarse en cualquier orden– para crear nuevas ‘palabras’ a partir de las anteriores.

i. Se duplica la palabra

ii. Se borra *tt* de la palabra
iii. Se sustituye *sss* por *t* en la palabra
iv. Se agrega la letra *t* en el extremo derecho de la palabra si la última letra es *s.*

En el apartado a) de esta tarea los estudiantes deben realizar deducciones respetando las reglas del sistema. Así tienen que derivar todas las posibles palabras que se puedan obtener en tres pasos al aplicar repetidamente las reglas (i-iv) en cualquier orden a la palabra inicial *s*. Un estudiante [39] vuelve a mostrar el *error de la recíproca [P implica Q* como equivalente de *Q implica P]* , aunque es consciente de que comete este error [41 y 42].

[39] Falta otra, en esa s, agrega t, duplica y sustituir esa por las tres s. A ver sería s, luego st [por iv], luego sería stst [regla i], y stssss,
[40] A ver tengo s, agrego t, tengo st, luego duplico, stst y luego en lugar de t sustituir sss, mh [duda]
[41] Entonces, ¿sí se podía al revés?
[42] No, no es lo mismo, la regla es si tienes sss puedes sustituir por t, pero t no implica sss [error de la recíproca] [El estudiante indica que es algo que todavía lo confunde].

En otras sesiones al trabajar las pruebas contrapositivo y reducción al absurdo se vuelven a encontrar evidencias de confusión entre hipótesis y conclusión así como de su función.
En la sesión 10 (desarrollo de la hoja 8) consideramos que el grupo de estudiantes ha tenido un logro sustancial, los errores cometidos son menores, y con un mínimo de retroalimentación en relación a la función de los componentes de la implicación puede dominar las técnicas de reducción al absurdo y contrapositivo y completar el conocimiento estratégico para comprender la demostración como objeto y como proceso.

5.2.4 Uso de ejemplos, no ejemplos y contraejemplo en la demostración y en tareas inherentes

En este apartado se trata sobre el uso de ejemplos asociado a la construcción de una demostración y, de manera implícita, a actividades asociadas a esta práctica como: definir, conjeturar y argumentar. La exposición se realizará siguiendo la figura 61 para contrastar el estudio exploratorio con la implementación de la ingeniería revisando diferentes momentos con los que se trata de dibujar la trayectoria seguida de la función de los ejemplos y contraejemplos.

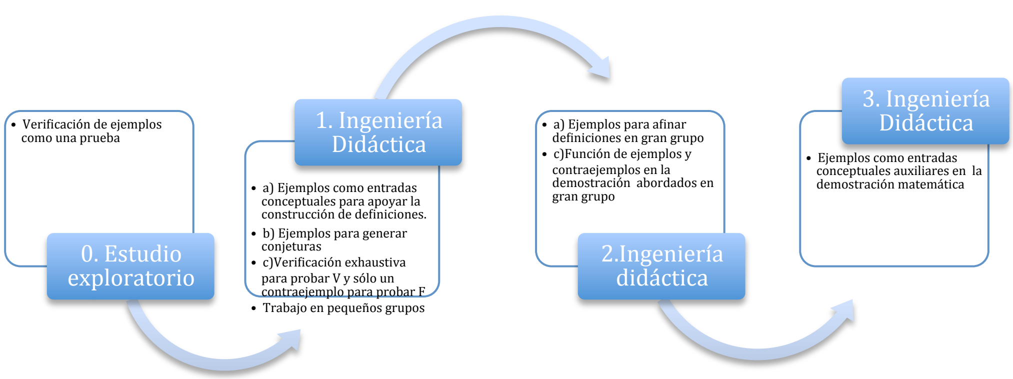


Figura 61 Avance en el manejo de ejemplos y contraejemplos

0. Estudio exploratorio

Los ejemplos en matemáticas se utilizan con la intención de presentar una situación en la que se cumple alguna propiedad. En ese sentido su función es la de verificar y no la de probar, así que un caso no representa una prueba a menos que sea único. Por otra parte, un contraejemplo de una afirmación cuantificada universalmente, es un ejemplo para el cual la afirmación es falsa. Para probarla basta con exhibir un caso (contraejemplo) en el que se verifica que es falso. En cambio, para probar un enunciado que es verdadero es necesario asegurarse que se cumple para todos los casos. En el estudio exploratorio cuando los alumnos intentaron probar que una proposición es verdadera suelen recurrir a un ejemplo estableciendo una simetría con lo que se hace para probar que es falsa (usar un contraejemplo). Más aún, cuando se les presenta una demostración o la realizan ellos mismos necesitan verificarla para algunos casos (Alvarado y González, 2009).

Ingeniería Didáctica 1a. Ejemplos como entradas conceptuales para apoyar la construcción de definiciones

Para construir definiciones, los estudiantes recurren a ejemplos de forma natural como se ha podido documentar en la implementación de la primera hoja de trabajo de esta ingeniería dedicada al manejo de las definiciones.
Para la definición de número par, en el trabajo en pequeño grupo, aunque se corresponde con un concepto que se adquiere desde edad muy temprana, los estudiantes recurren como apoyo a ejemplos de números que saben que son pares.

[3] Entonces un número par es aquel que se puede dividir entre él
[4] Y otros [otro estudiante cuestiona] ¿Y otros?
[6] Sí, porque por ejemplo el 10 se puede dividir entre él, entre 5, entre 2
[12] El 18, entre el 18, entre el 9, entre 2 [otro estudiante pide ensayar más valores] ¿Entre que más?
[14] Todos los números pares se pueden dividir entre 2 ¿no? [contesta otro estudiante] Sí, creo que sí
[16] A ver espérame [ensayan] el 2 sí, el 4 sí, 6 también, el 8, 14 también

O por ejemplo cuando intentan construir la definición de número primo en pequeño grupo.

[48] [los núm primos] Eran el 2, 5 y el 7 ¿no?
[49] No me acuerdo bien. Número primo [Pensando en voz alta]
[51] Yo nada más me acuerdo que eran, por ejemplo 10 y encontrar los mínimos. Cuando le sacas común. […] le pones así [escribe] se puede dividir entre 2 y el 5. Esos son primos. Lo vimos en cálculo.

2a.Ingeniería didáctica. Ejemplos para afinar definiciones en gran grupo

Durante el trabajo de socialización en gran grupo conducido por el profesor tanto los estudiantes como el profesor buscan apoyo constante en los ejemplos para construir las definiciones. Veamos su uso al construir el significado de *a divide a b.*

[107] Profesor: A ver $a=3$, ¿3 divide a 10? Voy a usar esta notación para "divide" [escribe $3 \mid 10$]
[108] Alumnos: Que al 10 lo parte en 3 partes iguales
[109] P: A ver, ¿el 3 divide al 10 en 3 partes iguales? ¬ [responden que no los alumnos]
[130] P: Entonces 4 divide a 20 [escribe $4 \mid 20$] o bien 20 es divisible entre 4 o 20 es múltiplo de 4. Tres formas de decir lo mismo.[…]Entonces en general ¿cómo escribimos esto acá? [señala la hoja] *a* divide a *b* si $a \neq 0$ y existe, por ejemplo acá [señala un ejemplo] existe el 5. Entonces existe un número (el 5) que multiplicado por 4 me da 20.
[132] As: ¿Existe un número entero?

[111] P:[…]cuando digo un número es divisible entre 5, ¿cuáles son los divisibles entre 5
[112] As: Son los que cuando se divide entre 5 sobra 0
[113] P: Por ejemplo 10 es divisible entre 3
[114] As: No, porque 10 entre 3 no sobra cero
[126] P: Bien, que exista un número multiplicado por 4 (el divisor) sea 20. Por ejemplo ¿existe un número que multiplicado por 3 me dé 10? [responden los alumnos que no, que entero no existe]
[128] P: ¿Existe un número que multiplicado por 4 me da 20? [le contestan] Sí, el 5
[133] P: Sí, existe un número entero *q*, vamos a llamarlo así. En el ejemplo ¿quién sería *q*?
[134] As: El 5
[135] P: Entonces qué debe cumplir *q* ¬ [contesta un alumno] Que multiplicado por 4 me da 20
[137] P: [Continúa escribiendo] *a* divide a *b*…si existe un número entero *q* tal que $q*a=b$ y $a\neq 0$ [escribe enseguida la notación simbólica $a|b$ si $\exists\ q \in \mathbb{Z}$ tal que $q*a=b$ y $a\neq 0$] [verifica la definición con ejemplos], 26 es divisible entre 13 o 13 divide a 26 ¬existe un entero que multiplicado por 13 me dé 26
[138] As: Sí el 2
[139] P: 9 divide a 14 [un alumno] No, porque no hay un entero que multiplicado por 9 sea 14

O también para construir la definición de cuadrilátero surgen ejemplos tanto durante el trabajo en pequeño grupo como en gran grupo para afinar la definición y descartar o aprobar propiedades en base a si son ejemplos o no los que aparecen en la figura 29 (p. 161). En todas las construcciones de definiciones geométricas y aritméticas han sido utilizados los ejemplos tanto por los estudiantes como por el profesor.

Ingeniería Didáctica 1b. Ejemplos para generar conjeturas en pequeños grupos

En relación al papel de los ejemplos en las definiciones también hay que tener en cuenta tareas en las cuales a partir de una definición dada se generen ejemplos que la cumplan para comprender la definición. En la tarea en la que consideraban la definición de número feliz *(un número [entero] es feliz cuando la suma reiterada de los cuadrados de sus dígitos acaba siendo 1)* los estudiantes generan ejemplos de números felices.
En las interacciones en pequeños grupos van construyendo espacios de ejemplos de números felices en el sentido de Watson & Mason (2005). Entre sus espacios de ejemplos **encuentran los números {1,10,100,1000,…}** después de probar con algunos que cumplen la definición, **construyen un argumento** en el consideran como números felices aquellos constituidos por un 1 seguido de ceros. Aunque **en ocasiones** no cuidan sus argumentos y **bastan algunos ejemplos para generalizar a espacios de ejemplos.** En el caso de los números **{11, 111,1111, 11111,…}** ellos determinan que es un espacio de no ejemplos, no obstante, el número con diez 1's sí sería número feliz. Cuando se discute esto en gran grupo se activa de manera natural la revisión del papel de los ejemplos y contraejemplos.
Más tarde tratando de encontrar números que además de felices sean primos, se apoyan en ejemplos para construir estrategias y obtener primos felices. En vista de la dificultad de que ahora también sean primos, **buscan una forma eficiente y más rápida para localizarlos**. Por ejemplo, una vez que encuentran uno **establecen como argumento incluir el número obtenido al permutar sus cifras.** Aunque sólo consideran números de dos cifras, en otra tarea donde necesitan primos felices de tres cifras aplican este argumento.

[161] Sería éste que es primo [eligen el 13], que son todos los primos son todos los números
[165] Y que su suma ( ) y que la suma de los cuadrados de sus dígitos … (Piensa en voz alta)
[166] Ejemplos de números primos felices ( )
[170] Esto es igual a 1, estoy buscando uno, ¡31!
[171] Eso es trampa porque es al revés [de 13]
[172] Mira, al último aquí lo difícil, es que sea primo

Derivado de esta tarea en apariencia muy simple, construyen un buen número de conjeturas que verifican con ejemplos y contraejemplos que luego usan en los argumentos con los que tratan de convencer a otros.
Por ejemplo, **conjeturan que una vez que encuentran un 5 entre los dígitos [271] a reducir, se produce un ciclo [273] y se descarta la posibilidad de que sea número feliz.** Esta última conjetura la realizan verficando que los números 17, 25, 35, 45, 55, 65 no son números felices. Esta conjetura surge a partir del número 17.

[174] [A ver ponle 17] 7 por 7, 49 y 1, 50, 5 por 5, 25
[175] Es que se va así
[176] Sí [asienten y lo convencen de desistir]
[177] Es igual a 5 al cuadrado 25 y 4, 29 o que
[178] No va a ser 25. No
[179-180] 5 al cuadrado 25. Ah, sí, se va a ir
[181] 29; 2 por 2, 4+81, 85 mira se va repitiendo; 8 por 8, 64+25, 89; 64+81, 145; [da 4 y ya no es feliz] [182] ¡Otra vez salió 81!
[184] Ah es 14 ponle 14 y luego 17 ya regresa [De 145, 1^2+4^2 es igual a 17]
[269] El 35 ya dijimos que no
[271] ¡Ah! entonces los que tengan un 5 no cuentan. 45, 55, 65
[273] Bueno. ¡Hasta ahorita! Todos los que tengan 5 son cíclicos
[274] No es que no precisamente se debe al hecho que tenían 5 [como 17 en la primera suma da 50]
[278] 49 más uno 50 ¡Ay no! ¡ya valió!, tiene 5

En uno de los equipos los estudiantes trabajan con diferentes números y, al observar las diferentes iteraciones, emerge la conjetura de que una vez que aparece un 5 ya no puede ser un número feliz. Esto se comprueba verificando la suma reiterada del cuadrado de los dígitos de varios números, que se puede ver en las siguientes tablas.

Número	17	50	25	29	85	89	145	42	20
Suma Cuadrado de dígitos	50	25	29	85	89	145	42	20	4
Número	35	34	25	29	85	89	145	42	20
Suma Cuadrado de dígitos	34	25	29	85	89	145	42	20	4

Número	45	41	17	50	25	29	85	89	145	42	20
Suma Cuadrado de dígitos	41	17	50	25	29	85	89	145	42	20	4
Número	55	50	25	29	85	89	145	42	20		
Suma Cuadrado de dígitos	50	25	29	85	89	145	42	20	4		

Número	65	61	37	58	89	145	42	20
Suma Cuadrado de dígitos	61	37	58	89	145	42	20	4

Aunque no lo hacen explícito, han generado un espacio de ejemplos para apoyar su conjetura. En principio, seleccionaron números menores de 100 que contienen un 5. Pero además incorporan todos aquellos que aparecen en los cálculos intermedios de esa verificación, como: 16, 17, 29, 37, 61, 34, 89, entre otros. Esto sirve como estrategia para descartar los que no son números felices.
Los estudiantes encuentran en esta tarea, en cierto grado, un desafío y se aventuran cada vez más en la búsqueda de ejemplos más complejos y estructurados que les permiten construir algunas conjeturas y establecer espacios de ejemplos y espacios de no ejemplos cada vez más generales.

Hay que tener en cuenta que cuando construyen conjeturas basadas en las similitudes de los ejemplos de los números felices encontrados (e.g. que aparezca algún dígito igual) centradas en los procesos con los que los obtienen (e.g. cuando buscan combinaciones de cuadrados perfectos que sumen 10) no logran generar espacios de ejemplos. Así, van dando más importancia a la estructura de sus ejemplos.

En el siguiente acertijo que se les propone ¿qué número sigue en la serie 313, 331, 367? los estudiantes se dan cuenta (con la ayuda del profesor) de que los números de la serie son números felices y números primos. Las conjeturas que antes habían establecido los estudiantes para los números felices de dos cifras, toman fuerza ahora para lograr encontrar los números felices de tres cifras mayores a 367 y que además resulten primos.

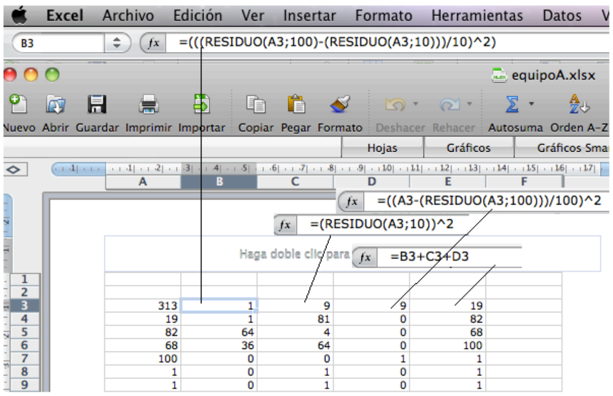


Figura 62. Programa en Excel para obtener números primos

Esta tarea constituye una situación de resolución de problemas muy significativa para los estudiantes con la que se muestran muy motivados. Son capaces de establecer un algoritmo iterado (que programan con ayuda de software como Excel de Microsof Office, figura 62) para determinar si un número es feliz o no mostrando dominio de la definición de divisibilidad construida por ellos mismos en la primera sesión de esta ingeniería. Posteriormente, combinado su algoritmo con una tabla de primos o una función para determinar si el número es primo o no, logran responder el acertijo.

Como conclusión final hay que destacar que el profesor se mostró muy satisfecho con esta hoja de trabajo porque la tarea trascendió al aula en el sentido de que al día siguiente los estudiantes le mostraron un algoritmo de prueba de número feliz a partir de la parte entera (cociente) de la división:

$$(\text{entero}(\text{número}/100))^2+(\text{entero}((\text{número}-(100*\text{entero}(\text{número}/100)))/10))^2+(\text{número}-(\text{entero}(\text{número}/10)*10))^2$$

Incluso otro alumno construyó un programa en lenguaje *Pascal* para resolver el acertijo. Los alumnos establecieron diversas conjeturas que se fortalecían al comprobarlas con números de más cifras. Así al aparecer un 5 en uno de los pasos de la suma de los cuadrados de los dígitos aseguraban que el número no sería feliz. Por ejemplo en el caso de los números 1023 y 832 en algún momento del proceso de verificación de si son felices o no les aparece un 145 (tiene un 5) aparecerá entonces un ciclo con lo que se asegura que no son números felices (figura 61, p. 369).

Esto sorprendió gratamente al profesor que no esperaba que las actividades de generación de ejemplos estimularan a los estudiantes para seguir indagando y para que establecieran sus conjeturas, pero menciona que lamentablemente los tiempos y compromisos escolares no dan pie a este tipo de exploraciones. Además de no estar habituados tanto estudiantes como maestros a este tipo de dinámicas, ya que en el nivel universitario se privilegian las prácticas formales, se involucra a los estudiantes más en la demostración formal y no se le da importancia al contenido estrechamente ligado con esta tarea como lo son el desarrollo intuitivo de ideas, la visualización, la organización de la información en tablas, **las prácticas donde los estudiantes exploren y encuentren patrones que les permitan producir conjeturas o crear sus "propias fórmulas y algoritmos"** como en este caso.

En relación con esto, Thurston (1994) habla de que con los avances tecnológicos es común realizar con las computadoras cálculos a gran escala, por ejemplo para imprimir una tabla de los primeros 10,000 números primos, solamente por encontrarlos y su impresión no es algo que realmente sea lo que buscan después de todo. «El descubrimiento en este sentido lo que en realidad quiere no es usualmente alguna colección de “respuestas”- lo que quieren es *comprender» (p. 162)*, encontrar patrones y construir conjeturas.

En este sentido diferentes investigadores han encontrado que las representaciones tabulares pueden ayudar a los estudiantes para ver relaciones generales subrayando patrones y representaciones algebraicas. Por ejemplo, Rojano y Butto (2004) indican que las grandes dificultades que tuvieron algunos alumnos para trabajar secuencias geométricas en distintos contextos, fueron superadas sólo cuando se les presentó una tabla numérica con la que pudieron comparar fácilmente los valores numéricos. Así: 1) La generalización es fundamental para el pensamiento matemático y algebraico; 2) La generalización algebraica es un elemento primario hacia la abstracción matemática y puede ser desarrollada a partir del trabajo con patrones o regularidades que favorecen la articulación en situaciones cotidianas y que 3) para aprender el lenguaje algebraico es importante que el alumno tenga algo que comunicar; necesita percibir previamente un patrón o una regularidad.
Los maestros deben fomentar en sus alumnos la cultura de modelar, explorar, comentar, predecir, suponer y poner a prueba sus ideas, además de poner en práctica sus habilidades y tener la oportunidad de descubrir patrones, realizar conjeturas o generalizaciones sobre hechos y relaciones matemáticas con su respectiva justificación (Blanton y Kaput, 2003).

En este apartado se ha destacado en negrita cómo han sido utilizados los ejemplos asociados a un proceso de prueba como puede verse en la figura 63.

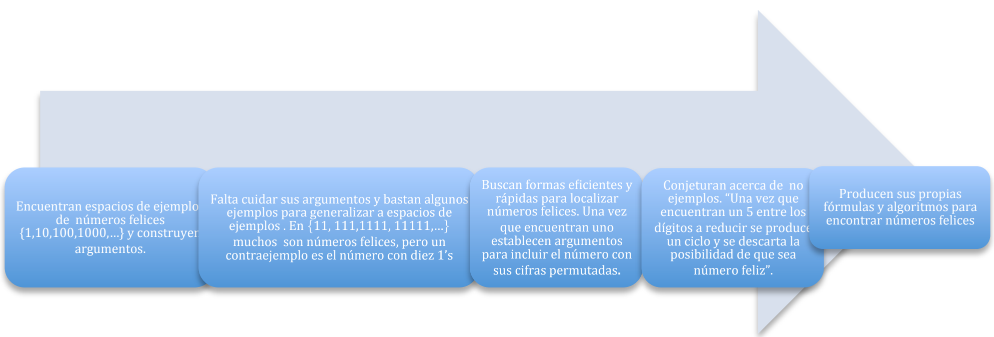


Figura 63 Uso de ejemplos en un proceso de demostración

Para concluir, la construcción de ejemplos ayuda a los estudiantes a construir conjeturas y verficarlas, en principio sólo observando resultados, pero poco a poco se van fijando en la estructura o en el proceso como fueron obtenidos, con lo que surgen además de ejemplos, contraejemplos y no ejemplos. Eso sin duda apoya la construcción de la noción de demostrar y convencer en matemáticas.

Ingeniería Didáctica 1c. Verificación exhaustiva para probar verdad y sólo un contraejemplo para probar falsedad; trabajo en pequeños grupos.

Para ilustrar esta situación se hará mediante la resolución que hicieron de la proposición: *Para todo número natural n, se tiene que* n^2+n+41 *es primo*, que venía acompañada de una tabla para comprobar la proposición con diferentes números, registrar los resultados y decidir si con la fórmula se obtiene un número primo. Luego se les pidió que indicaran cómo demostrar la *verdad* o *falsedad* de la proposición.

En un equipo las líneas de la discusión o estrategias fueron: 1) ensayar con diferentes números, 2) considerar la paridad de *n* y 3) probar por "inducción matemática" manipulando expresiones algebraicas de manera errónea en el afán de acomodar los cálculos para que resulte *V*.

Estrategia 1. Ensayar con diferentes números

En el fragmento [68-92 ver p. 240] evalúan para 3, 4, 5, 7 la expresión y obtienen un número primo. Primero atribuyen esto a que prueban con primos (3, 5) y luego comprueban con un número que no sea primo [80 y 82] obtieniendo el mismo resultado. Intentan encontrar un patrón basados en los ejemplos y deducen que el número 1 (unidad en 41) hace que los números que se obtengan sean impares, ya que en el paso previo a sumar el 41 tienen un número par. Esto es una prueba de la fuerza de la asociación que establecen entre los números impares y los primos. En principio consideraban que el enunciado era verdad, pero al buscar un contraejemplo se encuentran con ciertas dificultades .

En el fragmento [102-165 pp. 240-241] siguen buscando un contraejemplo creyendo que el encontrarlo está vinculado con el tamaño del número. Prueban con 144 y obtienen 20921 que es primo.

Estrategia 2. Consideran la paridad de n

En el fragmento [93-188 ver p. 241] de la interacción en pequeños grupos insisten en generalizar a partir de los ejemplos. Esto se ve cuando expresan que el número obtenido de n^2+n es siempre par y al sumarle *41* es impar. Este patrón lo basan en los ejemplos encontrados y no en su estructura, aunque la conjetura es cierta y es sencillo probarla *n por la expresión de números pares e impares respectivamente* (*2k o 2k+1*) y realizando los cálculos algebraicos. Insisten en su asociación entre número primo y número impar. Esto ocurre cuando considerar que el número *2* no es primo y al considerar que número primo es lo mismo que impar Al final un alumno se da cuenta y comenta que no todos los impares son primos.

Estrategia 3. Intentan probar por inducción matemática manipulando expresiones algebraicas de manera errónea en el afán de acomodar los cálculos para que resulte verdadera

Aún cuando han encontrado varios ejemplos que satisface que la expresión f(n) es primo en el fragmento [167-211, p. 242] muestran una necesidad de la demostración, para ello intentan generalizar y probar la proposición por inducción matemática lo que se percibe claramente durante la socialización en gran grupo. Prueban que la proposición se cumple para *k+1,* aunque no hacen explícito que *F(1)* se cumple con ser primo, ni consideran el supuesto de que *F(k)* sea primo. Al tratar de probar que *F(k+1*) es primo obtienen de n^2+n+41 la expresión $(k+1)^2+k+1+41$. Al

realizar cálculos en esa expresión intentan resolverla como si fuera una ecuación, considerando primero $(k+1)^2=0$ con lo que encuentran la raíz $k=-1$. Esa raíz la sustituyen en toda la expresión $(k+1)^2+k+1+41$ sin tener cuidado de los signos y eso les conduce a encontrar el número 47, que es un número primo. Finalmente se percibe confusión entre n y k junto con una mezcla de ideas y procedimientos algebraicos erróneos en un intento por generalizar y acomodar las expresiones para que funcione. Esto confirma la creencia que tienen de que en ocasiones al realizar cálculos o demostrar los maestros “acomodan” los cálculos o recurren a artificios que no resultan transparentes para ellos.
La inducción matemática es una técnica que resulta artificial para ellos y más que una línea de razonamiento tratan de acomodar cálculos para conseguir la expresión requerida. Esta técnica de demostración no fue abordada en esta Ingeniería Didáctica, aunque resultaría interesante una exploración más profunda con actividades cercanas al estudiante, en las que los ejemplos tengan un papel preponderante y que en ellos se pueda buscar una determinada estructura que les permita aproximarse a una demostración.

Finalmente en los registros escritos encontramos que muestran variados ejemplos en los que se verifica que $f(n)= n^2+n+41$ es primo y con ese argumento deciden que el enunciado es verdadero. La dificultad para encontrar un contraejemplo o bien que un buen número de ejemplos encontrado valida el enunciado, para ellos equivale a decir que el enunciado es verdadero. Muchos estudiantes creen que mostrar que un teorema general es válido con un ejemplo específico, o quizás con varios ejemplos, es suficiente como demostración (Weber, 2001). También en los estudios que realizó Wason (1966), observó que los sujetos mostraban el sesgo de la confirmación, es decir, el principal error que tienen los estudiantes es que intentan encontrar evidencia que confirme la regla en lugar de buscar una evidencia que la falsee. Por otra parte, en los estudios realizados por Lehrer & Romberg (1999), la dificultad para encontrar un contraejemplo es tomada por los alumnos como una verificación de la proposición.

Como hemos podido observar se cometen diferentes errores y considerando un sentido amplio los esquemas de prueba sugeridos por diferentes autores (e.g. Harel & Sowder, 1998; Bell, 1976, 1979; Balacheff, 1987; Gutiérrez, 2001) los estudiantes se ubican en pruebas empíricas, dado que validan las proposiciones a través de la verificación de casos particulares. No obstante, en repetidas ocasiones los estudiantes muestran que no estan satisfechos con el tipo de prueba. Esto se fortalece si se tiene en cuenta que: a) realizan diferentes intentos por falsear la proposición con una insistente y fallida búsqueda de contraejemplos, b) tratan de probar mediante inducción matemática o reducción al absurdo, algo que todavía no se ha desarrollado, dando muestra de la necesidad de afinar el *nivel de sofisticación de las técnicas de demostración* disponibles (Bell, 1979), y c) intentan construir casos genéricos en la expresión $f(n)=n^2+n+41$ considerando n par o impar (de la forma $n=2k$ o $n=2k+1$ para k número natural). De acuerdo con Gutiérrez (2001) en relación con los esquemas ubica a los estudiantes en casos genéricos dentro de las modalidades, analítica e intelectual que les va aproximado a las pruebas deductivas. Para ello el profesor tratará de que vayan superando las pruebas empíricas.

Ingeniería Didáctica 2c. Función de ejemplos y contraejemplos en la demostración abordados en gran grupo

Cuando se produce la socialización en gran grupo, aunque habían considerado que la proposición era *verdad*, un estudiante [239] se da cuenta que no es suficiente verificar la proposición en cierto número de casos para que sea verdad. Aun cuando un alumno afirma que lo demostró por inducción matemática [241] no se discuten los pasos seguidos para comprobar la demostración y encontrar el error. Es el profesor quien afirma que es *falso* y da el contraejemplo F(41) [244, 246].

[235] Profesor: […] Cómo demostrar la *verdad* o *falsedad* de: *Para todo número n, se tiene que* n^2+n+41 *es primo*. Ensayen con diferentes números […] y justifiquen. Ahí les dice que pueden usar [..] su calculadora. Viene calculado para 2, f(2) es 47[…] ¿Con los números que ustedes checaron se cumplió siempre? [asienten]
[237] P: Luego nos preguntan: qué pueden concluir de lo anterior
[238] Alumnos: Que es verdadero
[239] As: No es suficiente, bueno sólo cumple en específico para los que checamos
[240] As: Como para 18
[241] As: Yo lo demostré por inducción matemática
[242] P: Bueno habría que asegurarnos de que todos los pasos en la inducción matemática están bien, o si alguien encuentra uno que no cumpla pues es F. A ver la expresión es ¬[contestan] n^2+n+41
[244] P: A ver, bueno, en realidad esta expresión no siempre me da un número primo
[245] As: ¿Cuándo?
[246] P: A ver ¿qué pasa cuando *n* vale 41? [escribe $41^2+41+41$] ¿qué tienen en común?
[247] As: El 41; 41 por 41+2
[248] P: Es decir 41 por 43. Entonces ¿es primo? [contestan que no]
[250] P: Qué divisores tiene
[251] As: 41, 43, 1, y ya no es primo

[252] P: No siempre ocurre, aunque ocurra en muchos casos. Ahora algo importante podría ser preguntarnos ¿cuál es el número natural, menor, más pequeño donde la expresión no es un número primo? Yo les he dicho 41, […] ¿habrá otro menor que 41 para el que la expresión nos dé un número no primo?. [Usa software para calcular] Ahora si lo hacemos en SWP y le ponemos FACTOR al número, si es primo lo muestra igual y sino pone sus factores. Bueno en este caso aunque ustedes lo hagan para muchos ejemplos y cumplan, […] es *falso* porque ya encontramos uno [el 41]. Esto es muy importante porque a lo largo de la historia […] se han planteado muchas preguntas, así se trabaja en matemáticas. Por ejemplo dicen "a ver creo que todos estos números son primos" y a tratar de probarlo con diferentes técnicas: reducción al absurdo, no; de manera directa, no; si no se puede probar que es *verdad* entonces intentamos probar que es *falso* buscando un contraejemplo o un ejemplo donde no sea verdad. Entonces se pueden pasar siglos buscando. [Menciona a detalle la conjetura de Goldbach (cualquier *número par mayor que 2 se puede escribir como suma de dos primos)* y el teorema de Fermat [*cuando* $n> 2$, $x^n+y^n \neq z^n$) y los intentos por resolverlos] Esos son los problemas en matemáticas. Hay gente que pasa la vida buscando un contraejemplo y a lo mejor sólo hay uno y es suficiente.

Finalmente, aunque los estudiantes consideran que la proposición es verdadera dada la dificultad para encontrar un contraejemplo, enfrentarse con esta actividad les ha dado la oportunidad de mostrar su pensamiento. Es importante la labor del profesor al abordar la función de los ejemplos y contraejemplos en matemáticas ya que generalmente se asume que los estudiantes dominan su función en la actividad de demostración. Lo que expresaron los alumnos en su registro escrito al trabajar el acertijo de números felices, descrito en el apartado anterior.

> $\boxed{\text{A}}$ *Cuando la proposición es F, es suficiente dar un ejemplo que contradiga a esta. En caso de que sea verdadero el [H]echo de dar un ejemplo que cumpla con la proposición no es suficiente para comprobar que es V.*
> $\boxed{\text{B}}$ *Cuando encontramos al menos un elemento que no cumpla la o las condiciones que se tienen en el enunciado. (Para demostrar que es F) Para demostrar que es V no es suficiente con mostrar que sólo un elemento cumpla con la condición.*

El uso de ejemplos es una estrategia muy utilizada por los estudiantes. Recurren a ellos para construir conjeturas, para evidenciar que han comprendido una definición, para explicar su pensamiento, etc. El propósito en esta Ingeniería era que entendieran su función en la demostración, es decir, que para probar que una proposición no se verifica basta con exhibir un contraejemplo y, para probar que una proposición es verdad si no es posible probar todos los casos, es necesario buscar otros métodos de prueba. Se ha obtenido evidencia de un avance importante, aunque como en las últimas sesiones se les pedía que utilizaran métodos de demostración específicos, es difícil concluir que cuando no se les pida utilizar un método determinado, seguirán recurriendo a la técnica de verificar algunos ejemplos para convencerse de la verdad de alguna proposición, o bien, que la dificultad para encontrar un contraejemplo les lleve a concluir de manera equivocada que una proposición sea verdadera.

Ingeniería Didáctica 3. Ejemplos como entradas conceptuales auxiliares en la demostración matemática.

Cuando los estudiantes comprenden la función del contraejemplo para probar que una proposición es falsa, consideramos que han incorporado el uso del contraejemplo como entrada conceptual en la demostración matemática. Por ejemplo, cuando resuelven la hoja de trabajo # 3 al intentar encontrar el valor de verdad de la proposición, *Si $x>0$, entonces $\log_7 x>0$ (donde x es un número real)*, vemos que en el fragmento 303-308, p. 216, dan muestra de tal comprensión. De la misma manera cuando resuelven la hoja # 5, dan el contraejemplo $x=1/2$ para probar que es falso que para todo número real x, $x^2>x$ [ver fragmento 221-226 p. 238].
En la misma hoja de trabajo # 5 cuando los estudiantes buscan probar que, *para todo número entero n se tiene que n^2+n+41 es número primo*, aunque les cuesta trabajo encontrar el contraejemplo para probar que es falsa la proposición y es el profesor quien finalmente los apoya al encontrarlo. Algunos estudiantes no se muestran convencidos de que la proposición sea verdad aunque puedan enumerar un buen número de casos en los que cumplen [ver fragmento 235-252, p. 243]. Esta comprensión de que mientras la tarea de exhibir ejemplos no sea exhaustiva no pueden concluir verdad, consideramos que es un rasgo de que los ejemplos ya están incorporados como entrada conceptual en la demostración matemática.
En la hoja de trabajo # 9 para probar que: *el conjunto de los números primos de la forma $4k+3$ es infinito, siendo k un número natural,* encontramos que construyen espacios de ejemplos pero buscan encontrar en ellos rasgos genéricos que les permitan avanzar en la demostración, con estas acciones consideramos que los estudiantes utilizan los ejemplos ya como entradas conceptuales en la demostración [ver pp. 288-293].
Al igual que Sandefur, Mason, Stylianides & Watson (2013), encontramos como situaciones en las que los ejemplos juegan un papel positivo en los procesos de demostrar: la experiencia de utilidad de ejemplos en la tarea de demostrar, los espacios personales de ejemplos y herramientas técnicas como auxiliares para avanzar en las demostraciones, ejemplos para la formulación del problema, y una necesidad relacional generada por los ejemplos. En Alvarado & González (2014) también se describe una situación en la un grupo de alumnos enfrentan una definición nueva para ellos, deben extraer información que les permita comprenderla, para luego generar ejemplos que respondan con la definición, poder identificar no ejemplos y encontrar organizadores genéricos para construir espacios de ejemplos que finalmente les permiten resolver una situación en la que está implicada la definición inicial, formulan nuevos problemas a través de conjeturas y realizan una extensión de la situación que los lleva a enfrentarse a generalizaciones a través de poner en juego el pensamiento relacional.

5.2.5 Pruebas deductivas

Para documentar el avance que se produjo en cuanto a las pruebas deductivas haremos un contraste entre el estudio exploratorio y la ingeniería didáctica mediante los distintos momentos ilustrados en la figura 64: (0) estudio exploratorio realizado para tomar elementos del diseño, (1) implementación de la ingeniería en un momento inicial que nos permitió darnos cuenta de los errores y nociones de los estudiantes en trabajo en pequeño grupo, (2) la modificación de esta noción con la intervención del profesor y, finalmente, (3) cuando toman lugar como entrada conceptual útil al momento de demostrar proposiciones y comunicar su demostración.

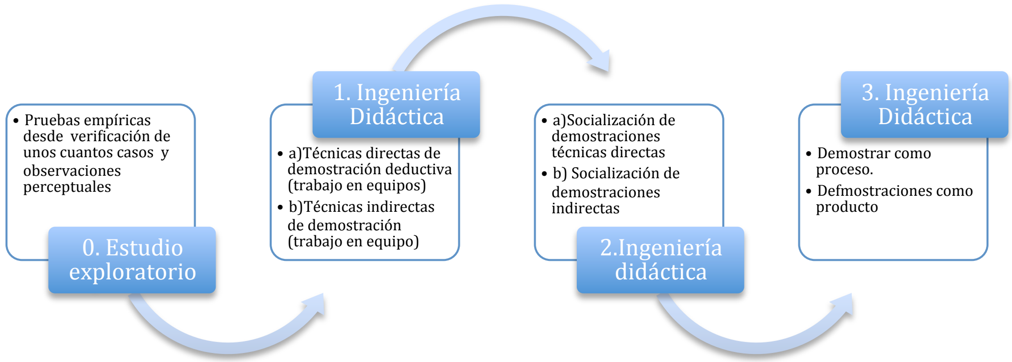


Figura 64 Avance en pruebas deductivas en este trabajo

0. Estudio exploratorio

En el estudio exploratorio pudimos observar que tres grupos de estudiantes de licenciatura en matemáticas de diferentes niveles (primer semestre, tercer semestre y quinto semestre) presentan en su mayoría esquemas de prueba empíricos, es decir, verificaciones a partir de unos cuantos ejemplos particulares y observaciones perceptivas en las proposiciones geométricas. Una mínima parte (dos estudiantes) desarrolló esquemas de prueba deductivos, axiomáticos y transformacionales. No obstante esta minoría consiguió desarrollar tales esquemas mediante entrenamientos en programas especiales como las olimpiadas en matemáticas.

Una revisión de los programas de licenciatura así como de los niveles previos muestra que no hay un tratamiento de la demostración matemática como objeto de estudio. Los estudiantes tienen un manejo pobre de las definiciones y cuando se enfrentan a una demostración no tratan de analizar las definiciones en juego para extraer su significado y así poder realizar sus primeras deducciones o generar enunciados equivalentes que puedan enlazar con coherencia lógica. Tampoco conciben un sistema axiomático y cuando manipulan una proposición confunden la hipótesis y conclusión sin tener cuidado en su función.

Los estudiantes aceptan las demostraciones vienen de un libro o las realizadas por el profesor por convicción externa.

Ingeniería Didáctica 1a. Métodos directos de demostración (trabajo en pequeños grupos)

Cuando a los estudiantes se les plantean las actividades en las que deben realizar pruebas deductivas de acuerdo a la clasificación de Gutiérrez (2001) (sesión 7 a la 9, hojas de trabajo 6 a la 8 respectivamente para métodos directos de demostración), o bien, deben reconocer el proceso de demostrar como un proceso de razonamiento en sentido estricto, es decir, para producir demostraciones como las de los libros de texto están preparados para:

a) Reconocer la importancia de las definiciones y verlas como una doble implicación. Eso les permite extraer significado y construir o derivar al menos dos deducciones directas, una para

avanzar en la construcción de un enunciado equivalente a la hipótesis y otra para retroceder equivalente a la conclusión.
b) Distinguir entre las diferentes formas en que aparece enunciada una implicación así como entre sus componentes (hipótesis y conclusión) y su función en el proceso de construir su demostración matemática.
c) No recurrir a las pruebas empíricas. Se dan cuenta de que por más ejemplos que verifiquen la proposición si no se corresponden con la totalidad, esto no constituye garantía de verdad en matemáticas. Y que un contraejemplo es suficiente garantía de que la proposición en juego es falsa, además de que la dificultad para encontrarlo no es suficiente para asegurar que no exista.
d) Afinar sus esquemas de prueba con cierto nivel de sofisticación en las técnicas de demostración disponibles por la insatisfacción (disonancia cognitiva) generada con las pruebas enfrentadas previamente.
e) Manejar adecuadamente los conectivos lógicos de las proposiciones y las tablas de verdad asociadas.

El camino recorrido permite introducir a los alumnos en el método avance/retroceso siguiendo un formato de dos columnas: la primera reservada para una cadena de preguntas clave para avanzar en las deducciones y la segunda para encadenar enunciados desde la hipótesis hasta la conclusión. El manejo de las definiciones, la identificación de la hipótesis y la conclusión, al igual que el formato de dos columnas utilizado para guiar el proceso, ha permitido avanzar en el proceso de producir demostraciones y con ello se ha conseguido que los estudiantes generen una representación previa de la versión condensada o versión para comunicar. Esta última se va afinando hasta conseguir una versión comunicable.
Posteriormente se hace un recorrido inverso desde demostraciones condensadas que aparecen en textos o artículos para que extraigan su significado consiguiendo la versión previa que les permite comprender cómo ha sido obtenida. Así se hace más trasparente el proceso de demostrar para que las pruebas de convicción externa cobren sentido y se transformen en pruebas de convicción interna, figura 65.

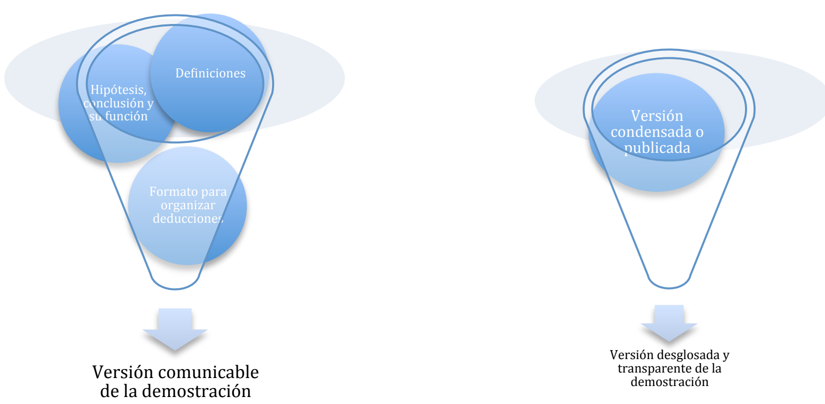


Figura 65 Proceso para desarrollar competencias demostrativas

Al cobrar sentido las definiciones, la hipótesis y la conclusión y su función en la demostración, los estudiantes transforman la convicción interna en externa (al poder comunicarla a otros) y viceversa.
La noción de pregunta clave causó conflicto cuando se les pedía que las identificaran al presentarse de forma aislada y resultar una situación artificial. Aun así construyen de manera

natural las preguntas clave para extraer información. Se debería reestructurar la Ingeniería didáctica para usos posteriores presentando únicamente proposiciones para que se prueben con ayuda del formato de dos columnas y una noción desarrollada y fortalecida de las definiciones y los componentes de una implicación.

Ingeniería Didáctica 2a. Métodos directos de demostración (socialización)

Durante la socialización de las demostraciones generadas con el proceso avance y retroceso, los alumnos no cometieron errores salvo la referencia al término de pregunta clave. Con objeto de mejorar la ingeniería didáctica se debería quitar la referencia a ese término pero mantener la idea de construir preguntas que les permitan enlazar razonamientos para avanzar en las deducciones.
Finalmente, en relación a los métodos directos de prueba, el aprendizaje previo de estos alumnos en relación con el método de avance y retroceso para demostrar ha sido efectivo al tener que resolver una tarea contextualizada mediante una situación ajena a las matemáticas [aplicar el método avance y retroceso para construir un alfabeto con ciertas reglas establecidas, ver p. 281-284]. En ocasiones han tenido que enfrentarse a las dificultades inherentes al proceso de demostración recogidas en la literatura (por ejemplo el error de la recíproca), pero el trabajo continuado en pequeños grupos a lo largo de toda la ingeniería ha permitido a los alumnos aprender a escucharse y a ofrecer soluciones efectivas a las demandas de los compañeros.

Ingeniería Didáctica 1b. Métodos indirectos de demostración (trabajo en pequeños grupos)

En la parte correspondiente a las sesiones de la 9 a la 11 (con hojas de trabajo correspondientes a la 9 y 10 los estudiantes han comprendido la técnica que se ha desarrollado en el formato de dos columnas señalando que se supone como información cierta *P* (hipótesis) y *NO Q* (la negación de la conclusión) con el propósito de construir una contradicción.
En general no tuvieron problemas para aplicar esta técnica, más bien presentaron errores relacionados con ciertas sutilezas (figura 54, p. 287). Así, al construir la contradicción el alumno explica:

[44] Una de las reglas que puedo aplicar es que *b* lo puedo multiplicar por *√2* y como *√2* es *1.4142* y más decimales. Luego pues es decimal y *b* entero. El resultado es decimal o fraccionario cualquiera que fuera *b* y entonces tienes que es igual a *a*, pero *a* es entero.

Al representar *√2* en forma decimal dan por hecho que es irracional siendo esto justamente lo que desean demostrar (esto lo superan en la discusión durante la socialización).

En la tarea de demostrar que *el conjunto de los números primos de la forma 4k+3 es infinito, siendo k un número natural*, aunque no tienen problemas con la técnica de reducción al absurdo, ni con las deducciones o la necesidad de construir una contradicción, les cuesta trabajo realizar la demostración. A lo largo de la tarea se muestran persistentes. Recurren a ejemplos y construyen espacios de ejemplos y ejemplos genéricos con la intención de fijarse en la estructura y extraer información en la construcción de la contradicción. Gracias a ciertas intervenciones del profesor logran finalmente la demostración.

En otra tarea, en la que había que demostrar por reducción al absurdo, interpretan de manera incorrecta el enunciado: *Es imposible escribir números, utilizando cada uno de los diez dígitos una* *sola vez y de modo que su suma sea 100*. Consideraron que habían de buscar un único número y no dos como es el caso. Una vez aclarado esto con el profesor pudieron avanzar.

Por último en el método de contrapositivo no presentaron ningún problema reconociéndolo como un caso particular de la técnica de reducción al absurdo.

2b) Ingeniería didáctica. Métodos indirectos de demostración (socialización)

Los alumnos no presentaron dificultades con las técnicas de reducción al absurdo y del contrapositivo. En la socialización se discutieron algunas sutilezas que no tuvieron en cuenta los estudiantes. Por ejemplo, cuando tratan de demostrar que √2 es irracional consideran su representación decimal. El profesor trata este tema indicando:

[235] Maestro: Bueno *a* y *b* son enteros y *√2* es *1.41* y algo, sí, pero finalmente no sabemos hasta dónde llega *√2*, no podemos cortar porque sería una aproximación. De hecho podemos plantear una sucesión que converja a *√2*, pero bueno, la idea es que no puedo cortar, ya no sería *√2*. ¿Cuál es la idea? Lo conveniente es pensar en *a/b* como fracción irreducible. ¿Qué quiere decir? Que ya no tienen factores comunes *a* y *b*, por ejemplo si fuera *2/4* queda ½ y ya es irreducible. Ahora, porque además yo debo probar con esos enteros, acerca de *√2* no sé todavía nada. Si elevo al cuadrado [$a=\sqrt{2}b$] queda $a^2=2(b^2)$ o sea es igual a *2* por algo, eso ¿qué quiere decir?

Con esta ayuda los estudiantes construyeron finalmente la contradicción sin dificultad.

En la ingeniería se deberían haber incluido actividades de demostración que involucraran cuantificadores por las dificultades detectadas para construir negaciones. En los métodos indirectos no había situaciones en que los que la negación se estableciera en un enunciado que tuviera cuantificadores.
En las pruebas que involucraban el método contrapositivo, por cuestiones de tiempo, el profesor decidió no dejar tiempo para el trabajo en equipo y observamos que ese fue un factor determinante para que se cometieran errores ya que los estudiantes no tuvieron el espacio para discutir y darse cuenta de las inconsistencias.

5.3 Aportaciones e implicaciones de la ID

En el Capítulo 1 se señaló que la motivación de este trabajo fue la no asunción del dominio de las bases necesarias en los estudiantes egresados de bachillerato para acceder a la demostración como proceso y en dar lugar a la demostración matemática como objeto de estudio y como parte esencial para comunicar el conocimiento en matemáticas. De ahí se deriva, que nuestra pretensión en esta investigación era comprender los elementos necesarios para desarrollar la noción de la demostración matemática en los estudiantes y utilizar dicha comprensión en la elaboración de una propuesta para intervenir en el salón de clases, con estudiantes de nuevo ingreso a la licenciatura en Matemáticas Aplicadas de la Universidad Juárez del Estado de Durango, México (UJED). Dicha propuesta debía conformarse de manera informada en la investigación en educación matemática para cambiar el estatus de la demostración desde una noción paramatemática hasta lograr un reconocimiento como objeto de estudio. Con ello, primordialmente, buscábamos impulsar en los estudiantes, el desarrollo de competencias demostrativas, procurándoles herramientas y experiencias de aprendizaje colaborativo que les permitieran una amplia concepción de la demostración, que la dotaran de significado y los acercara a la comprensión de su naturaleza y al rol que juega al “hacer” matemáticas y en el desarrollo y avance de la misma. Para tal propósito, nos planteamos los siguientes objetivos particulares:

1. Realizar una aproximación socio-epistemológica de la DM y de su lugar en la práctica profesional del matemático.
2. Aproximarnos a la naturaleza cognitiva de la DM.
3. Realizar un estudio exploratorio con estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas.
5. Diseñar e implementar una ID para impulsar el desarrollo de competencias demostrativas que respondieran a las exigencias del contexto y a la construcción del conocimiento base necesario para enfrentar la demostración matemática.

Somos conscientes de la amplitud y generalidad del objetivo de este trabajo, que, en parte, se debe a los obstáculos percibidos en los estudiantes para enfrentar la demostración matemática, a que es una idea fundamental en matemática y, a que actualmente muchos investigadores en educación matemática han prestado atención a este tema, reclamando que se preste mayor importancia en el curriculum y han presentado herramientas teóricas para el estudio de la construcción de conocimiento necesario para su abordaje (e.g. Harel, Schoenfeld, Lampert, Greeno, Hanna, Tall, Vinner, Marrioti, Dreyfus, etc). Por esta razón la identificación de algunos obstáculos, dificultades y errores ligados a la demostración, así como propuestas para librarlos nos parecen importantes en nuestra investigación, así como base de futuras investigaciones.

Aunque se abordaron todos los objetivos antes mencionados y trazados al principio de la investigación, dándose respuestas (más o menos parciales) a todos ellos, también quedaron abiertas muchas cuestiones, que motivarán el desarrollo de posteriores investigaciones.

5.3.1 En relación con las hipótesis ímplicitas y los objetivos trazados

Con la finalidad de ofrecer argumentos para validar las hipótesis de este trabajo (ver p. 14) seguiremos el modelo de Toulmin (para una descripción ver pp. 33-34), presentando los datos de partida de nuestra ID, las evidencias o garantías en relación con el uso de estos datos que nos permitan sustentar las hipótesis y finalmente algunas objeciones relacionadas para que el lector se haga una idea de la medida en que se cumplen. Para un mejor seguimiento hemos numerado los datos y ligado las garantías y objeciones poniendo como primer número el correspondiente al dato y como segundo identificador un orden ascendente.

Datos

D1 Diseño basado en las dificultades de los estudiantes detectadas en el estudio exploratorio del medio y en la revisión de la literatura (e.g. manejo parcial de las definiciones, componentes de una implicación y su función, uso de cuantificadores, ausencia del conocimiento estratégico y del aparato lógico, transposición del significado cotidiano al significado matemático,..).
D2 El diseño de las actividades no fomenta la competitividad, no se trata de ganar o perder sino de participar con sus ideas y negociar una producción en equipo.
D3 Trabajo en pequeños grupos con monitoreo del profesor.
D4 Espacio de discusión en gran grupo para negociar una producción grupal compartida.
D5 Diseño basado en la práctica del matemático profesional y en la metáfora del estudiante como matemático.

D6 Diseño planeado para instrumentar en 10 sesiones de 60 minutos cada una y con el grupo de primer semestre.

Evidencia o garantías

G11 Este diseño al no dar por supuesto que los estudiantes "deben" cumplir con cierto conocimiento para acceder a la tarea de demostrar en matemáticas reduce notablemente los errores que cometen. Esto en virtud de que los prepara para que sean ellos quienes construyan ese conocimiento base, desde experiencias previas en lo cotidiano y en su historia escolar, y, por supuesto apoyados por el profesor para socializar las ideas y formalizar los conceptos construidos.
G12 En cuanto al manejo de las definiciones, crucial en la demostración matemática, encontramos, en el estudio exploratorio, evidencia de las dificultades con su manejo. Dichas dificultades, fueron consideradas para el diseño de la intervención didáctica y durante la implementación de la ingeniería presenciamos con asombro, la lucha de los estudiantes para lograr reconstruir definiciones básicas (e.g. triángulo isósceles, número par, número primo, etc) y poder construir definiciones aceptables en la comunidad matemática. Podemos resumir que: desde el estudio exploratorio hasta el final de la implementación de la ingeniería, el diseño ha permitido que se transite desde un manejo parcial de las definiciones, hacia la reconstrucción de definiciones "conocidas", se establezcan acuerdos para dar una "buena definición" aceptada por la comunidad de práctica y de ahí puedan extraer su significado para utilizarla como entrada conceptual en una demostración matemática. Esta trayectoria nos permite discutir cómo pueden los estudiantes no sólo entender las definiciones, sino darse cuenta de la necesidad de ciertas maneras de definir, cuál es el papel de las definiciones al realizar una demostración, y cómo pueden darse cuenta de este papel para adoptar la necesidad de definiciones precisas o "correctas" en el área.

G21 Los estudiantes en pequeño grupo expresan con sus pares, en igualdad de condiciones, su pensamiento reduciendo el miedo al error al no tratarse de actividades en las que se pida un resultado y este sea catalogado como bien o mal.
G22 En un ambiente no competitivo pudimos observar que se promueven el desarrollo de habilidades sociales como escuchar y cooperar, así como habilidades cognitivas de atención, concentración, razonamiento y lenguaje. Todas ellas necesarias para un buen desempeño en la demostración matemática y en la práctica profesional.
G23 La persistencia en la tarea es una habilidad que se va desarrollando y vemos como ellos se mostraron cada vez más dispuestos a intentar y a probar diferentes estrategias para concluir la tarea.
G24 El todo es mayor que las partes, así la producción del equipo es mejor que la producción individual, aún y cuando sea equivalente a la de un integrante del grupo. Esto pasa por el cuestionamiento y/o aprobación de todo el equipo.
G25 El modelo RBC-C nos permitió documentar y capturar la complejidad del trabajo en pequeños grupos para la construcción del conocimiento (e.g. construir la definición de un concepto u objeto, construir ejemplos desde una definición matemática, construir una negación, realizar una demostración, etc.). Gracias a este modelo como herramienta teórico-metodológica pudimos identificar las acciones epistémicas (de reconocimiento, edificación, construcción y consolidación) ocurridas durante el proceso.

G31 En el pequeño grupo los estudiantes discuten para caracterizan el objeto o concepto a definir, traen ejemplos, argumentan o demandan explicación para aprobar o descartar sus aportaciones logrando con ello librar algunas concepciones erróneas y avanzar depurando su producción
G32 El profesor monitorea el trabajo de los pequeños grupos y puede anticipar la trayectoria de la discusión en gran grupo
G33 El profesor se forma una idea del pensamiento de los estudiantes y a partir de él busca extenderlo hacia el conocimiento formal y darle una aproximación estructural.
G34 Se obtienen las producciones de los estudiantes y se pueden caracterizar. En este caso, por ejemplo, el profesor se da cuenta de que las producciones, de acuerdo a la clasificación realizada en la sección 5.1.1.1 Sesión 1, pp. 302-303, se caracterizan por a), b), c), d), e), f) y g) y puede secuenciarlas y entrelazarlas para la socialización en gran grupo.
G35 Las producciones finales de los pequeños grupos constituyen una muestra del conocimiento base compartido y logrado en el equipo.
G36 El conocimiento base compartido del pequeño grupo, como ha sido construido por ellos y está basado en argumentos convincentes aceptados por el equipo, son incorporados al cuerpo de conocimientos de cada uno de los integrantes. Esto lo podemos ver cuando usan argumentos o hechos establecidos por alguno de sus compañeros para construir nuevos argumentos y dan tal reconocimiento al igual que en la práctica profesional del matemático.
G37 La posibilidad de comparar sus producciones con otros equipos cercanos ayuda a cuestionarse y depurar sus producciones.

G41 Los estudiantes comparten las producciones negociadas en su pequeño grupo y cada equipo tiene una producción que representa su conocimiento compartido.
G42 El profesor selecciona el orden en que se van depurando las producciones iniciando con aquellas que presentan mayores debilidades y dejando al último las que tienen menores debilidades o bien son las aceptadas dentro de la comunidad matemática.
G43 La secuenciación descrita en *G32* permite la participación de todas las producciones y también que sean los estudiantes mismos los que vayan mejorando las producciones, encontrando equivalencias entre ellas y juntos lograr avanzar.
G44 Con la participación del profesor en la discusión se puede construir una explicación o producción que posiblemente no puede producirse de manera individual o en los pequeños grupos. «Juntos llegan al conocimiento ganado y compartido» (Voigt, 1995 p. 183).

G51 El estudiante gana confianza y motivación al transmitirle la idea de que en matemáticas no se puede leer linealmente (por ejemplo una demostración) como ocurre en otras disciplinas, aún y cuando se sea matemático profesional. Es necesario leer, meditar, releer, usar lápiz y papel para ir rehaciendo lo que el autor hizo. Esto implica, estar regresando a partes anteriores o bien a otras fuentes escritas o consulta con pares para lograr, elaborar o reformular las ideas para la comprensión cabal del texto. Esto se ha podido observar principalmente en las sesiones 9 y 10.
G52 El estudiante participa en la construcción compartida del conocimiento (como ocurre en la práctica de los matemáticos profesionales) y es capaz de enfrentar y comprender la tarea de demostrar como forma de avance un una disciplina no acabada.

G61 La instrumentación fue de 12 sesiones con un tiempo promedio de 91.25 minutos cada una con un total de 18.25 horas (8.25 horas más de lo planeado).
G62 La instrumentación se realizó de la siguiente manera: una sesión (sobre definiciones) con 23 alumnos de los diferentes semestres de la licenciatura incluido el primer semestre (sujetos de

estudio para los cuales se realizó el diseño), una sesión con 12 alumnos de primer semestre, 5 sesiones con 8 alumnos del primer semestre y 5 sesiones con 5 alumnos del primer semestre.

Objeciones

O11 En la ingeniería se deberían haber incluido actividades de demostración que involucraran cuantificadores por las dificultades detectadas para construir negaciones. En los métodos indirectos no había situaciones en que los que la negación se estableciera en un enunciado que tuviera cuantificadores.
O12 En la Ingeniería no se incluyó como técnica de prueba la inducción matemática, por creer que pudiera ser más cercana a los alumnos y dado que se aborda en una de sus primeras materias. No obstante, intentaron utilizarla para justificar si la expresión $f(n)=n^2+n+41$ siempre generaba números primos, dejando ver que es una técnica que les resulta artificial y más que una línea de razonamiento insisten en acomodar cálculos para conseguir la expresión requerida (p. 242 y pp. 324-325).

O31 En el bloque IV hoja 8 con la intención de ahorrar tiempo no se respetó la dinámica propuesta de presentar la tarea a los estudiantes en pequeño grupo y darles oportunidad de discutir y negociar su producción para posteriormente socializarla en gran grupo (ver pp. 338-344, 5.1.3.3 Sesión 8b: Leyendo y entendiendo demostraciones). La actividad propuesta se les anticipó para que la trabajaran en sus casas y la discutieran en su pequeño grupo al día siguiente y fue muy notorio que no estaban en igualdad de circunstancias y un estudiante juega el rol de autoridad al presentar su producción y explicarla. No obstante, aún en estas circunstancias los demás estudiantes contribuyen, ya que muestran madurez al atender la exposición y demandar mayor explicación. Por su parte, quien explica al tener que convencer, logra una mayor comprensión.
O32 No siempre se realiza un monitoreo adecuado por parte del profesor al trabajo en pequeños grupos y en consecuencia en tareas que fueron muy estimulantes para los estudiantes no se explota la riqueza durante la socialización en gran grupo.

O41 El profesor al no estar habituado a la dinámica de trabajo impuesta en esta Ingeniería Didáctica, en repetidas ocasiones se muestra impaciente y no espera el tiempo suficiente para que sean los estudiantes quienes propongan una mejora a la producción y es él quien lleva a cabo acciones que permiten avanzar en el proceso de construcción del conocimiento.
O42 Con el modelo RBC-C hemos identificado acciones epistémicas en el profesor y creemos que tiene mayor valor para el avance del aprendizaje que sean los alumnos quienes efectúen tales acciones.

O61 El nivel de conocimientos de los estudiantes, que se mostró más bajo del esperado a nivel conceptual, aún en conceptos básicos provocó que se extendieran los tiempos previstos por sesión, tanto en la parte de trabajo en pequeño grupo como en las discusiones en gran grupo. También, teniendo en cuenta la extensión de nuestra Ingeniería y la complejidad del tema abordado, se multiplican las dificultades en su implementación y análisis.
O62 El profesor al notar la deficiencia de los estudiantes en el manejo de la definición decide invitar a otros estudiantes de diferentes semestres, no contemplados en principio, a fin de explorar diferencias.
O63 Cuatro de los doce estudiantes del grupo participante en la instrumentación sólo asisten a la primera sesión y abandonan la ingeniería por dos motivos: no cuenta para sus calificaciones y por la dificultad del tema.

O64 Un elemento de gran importancia que afectó el (re)diseño de diversas situaciones y actividades resultó ser que un gran porcentaje de los estudiantes eran foráneos y al acercarse el período vacacional y descargarse de los compromisos de las materias oficiales, tomaron la decisión de regresar a sus lugares de origen a tomar sus vacaciones, abandonando de forma anticipada nuestra Ingeniería y ocasionando que el grupo se redujera de ocho a cinco en las últimas sesiones modificando en gran medida la conformación y trabajo en equipos.
De manera global, podemos afirmar que, a partir del análisis de los datos recogidos a lo largo de la investigación, que nos ayudan a dar respuesta a las expectativas iniciales, que las hipótesis de partida que habíamos considerado son válidas, por lo que afirmamos, en general, que:

1. Es posible mejorar las competencias demostrativas de los estudiantes si entienden los conceptos involucrados en el enunciado a probar y pueden extraer significado y derivar información relevante.

2. La educación y ejercitación de un pensamiento matemático deductivo y flexible requiere el desarrollo de la capacidad de utilizar al menos las cuestiones básicas: identificación de hipótesis y conclusión y su función en el proceso de demostrar; desenvolver definiciones de conceptos presentes en la proposición en juego; uso adecuado de cuantificadores y conectivos lógicos; y, técnicas y procedimientos para demostrar.

3. Entender la importancia de las fórmulas, objetos, notación y su función como parte inherente al lenguaje matemático ayuda a no alejarlo de la lectura en matemáticas y lo acerca para comprender mejor las ideas.

4. La discusión entre pares con la finalidad de construir los conceptos juega un papel fundamental en la actividad matemática, ya que se exhiben concepciones e interpretaciones erróneas e imágenes poco elaboradas que interactúan en un proceso dinámico en el cual las representaciones mentales se pueden ir fortaleciendo para construir conocimiento compartido.

5. Las variaciones en la organización usual de la clase fomentando el trabajo y discusión entre pares y posteriormente compartir en gran grupo en una discusión mediada por el profesor pueden provocar una mejora en la actitud y rigor matemático de los estudiantes e incentivar un aprendizaje más activo. Particularmente hemos podido observar como el lenguaje se va refinando cada vez más a medida que avanza la discusión tanto en pequeños grupos como en la clase completa. Dicho refinamiento es provocado por la necesidad de comunicar ideas a otros.

6. El uso activo de ejemplos y contraejemplos enriquece las experiencias de los estudiantes, los ayuda a: extraer características propias de los objetos en juego; distinguir gradualmente la diferencia entre verificar y demostrar; los prepara para tareas no rutinarias; y, para la construcción de sus propias conjeturas.

7. Es posible transmitir a los estudiantes universitarios una visión de las Matemáticas como una ciencia, que permite la observación, la experimentación, el descubrimiento, las formas de probar verdades irrefutables y comunicarlas, y sobre todo que es una ciencia en la que constantemente se genera nuevo conocimiento.

8. Un uso responsable de tecnología (computadoras y calculadoras) puede contribuir a una mejora de la significatividad del aprendizaje y la posibilidad de manipular objetos dinámicos en geometría los apoya a encontrar relaciones y conexiones entre diferentes representaciones o registros.

También en la posibilidad de programar algoritmos como un mecanismo de control de prueba les permite construir conjeturas y argumentos como respaldo para convencer de su validez.

9. Gana confianza y motivación el estudiante, al transmitirle la idea de que en matemáticas no se puede leer linealmente (por ejemplo una demostración) como ocurre en otras disciplinas, aún y cuando se es matemático profesional. Es necesario leer, meditar, releer, usar lápiz y papel para ir rehaciendo lo que el autor hizo. Esto implica, estar regresando a partes anteriores o bien a otras fuentes escritas o consulta con pares para lograr, elaborar o reformular las ideas para la comprensión cabal del texto.

5.3.2 Aportaciones

Hacemos a continuación referencia a las aportaciones que hemos hecho con nuestra investigación, organizadas en torno a cada uno de los objetivos generales planteados al comienzo de este trabajo. Se establecerán entonces nuestras conclusiones apoyándonos en los datos obtenidos tras el análisis e interpretación de las sesiones y del material recogido.

5.3.2.1 Realizar una aproximación socio-epistemológica de la DM y de su lugar en la práctica profesional del matemático

En la sección 2.3 La construcción social del conocimiento y la práctica del matemático, hemos realizado una aproximación socio-epistemológica para comprender la naturaleza de la demostración matemática y los elementos que tienen relación con este conocimiento como concepto y como proceso, así como su desarrollo, desde donde se puede apreciar que ha sufrido múltiples cambios desde el nacimiento del método deductivo (cuya función era la de explicar como sinónimo de demostrar) hasta nuestros días. Estos cambios se han dado a nivel estructural abanderados por célebres matemáticos y esta labor científica ha tenido grandes repercusiones en el papel de la demostración en el aula.
La dimensión epistemológica nos permitió reconocerla como un objeto de naturaleza extremadamente compleja que satisface la necesidad de contar con un medio para explicar, justificar y comunicar de manera convincente ideas, fenómenos, hechos, etc., también nos permitió reconstruir una secuencia que estuviera más acorde con los orígenes de la demostración matemática, tomando en cuenta su evolución en el ámbito matemático y en consecuencia su lugar en el aula. De esta forma, se le dio un rol más activo al estudiante para que al discutir, compartir o discrepar en las ideas con sus compañeros, comprendiera, la definición como objeto, como proceso y como elemento crucial para avanzar en la demostración matemática, ya sea por extracción de significado o dotando de significado a los conceptos involucrados en el enunciado de la proposición o teorema. Para la extracción o el dar significado a los objetos, el uso de ejemplos, no ejemplos y contraejemplos, se impone de manera natural. La necesidad de comunicar de manera convincente a sus compañeros o al profesor les lleva a refinar cada vez más su lenguaje, haciendo énfasis en el uso adecuado de conectivos lógicos, cuantificadores, apariencia y estado del enunciado de la proposición en juego, así como del papel de sus componentes. El uso de tecnología, al igual que el diseño de las tareas propuestas en cada hoja de trabajo nos permitió también recurrir a la conjetura como una actividad preponderante en la noción de generar nuevo conocimiento, buscando generalizar resultados susceptibles de prueba, utilizando inicialmente el recurso de la búsqueda de contraejemplos para refutar ciertas intuiciones erróneas y condicionados por la dificultad para exhibirlos se imponen argumentos que pueden conducir una demostración de la verdad de su conjetura.

También, motivados por las sugerencias de estudiar la práctica de los matemáticos a fin de encontrar información acerca de cómo han desarrollado habilidades para tratar con los conceptos estructuralmente definidos (Edwards, Dubinsky y Mc Donald, 2005, pp. 17-18; Harel, Selden y Selden, 2006, p. 156), en el apartado 2.2 Pensamiento matemático avanzado y demostración matemática, describimos trabajos que muestran la corriente reciente en pensamiento matemático avanzado que se ocupa de la práctica del matemático en aras de comprender su forma de organizar y construir el conocimiento, y con el propósito de traducirlo en estrategias para la enseñanza de la matemática. Entre los trabajos descritos del pequeño grupo de investigación interesado en la práctica del matemático particularmente encontramos los siguientes temas: la forma de escritura (Misfeldt, 2003), la resolución de problemas (Carlson, 2000; Carlson y Bloom, 2005), la demostración (Weber y Alcock, 2004) y la forma de comunicar el conocimiento entre los matemáticos (Weber, 2001).

En relación a la enseñanza de la matemática en los diferentes niveles encontramos un grupo de investigadores que defienden que los procesos de conocimiento de los matemáticos constituyen pensamiento matemático genuino y de manera similar se debería establecer un estándar para emular en los estudiantes, es decir la metáfora de los estudiantes como matemáticos. Para Schoenfeld (1988) los estudiantes deben desarrollar la estética del matemático o bien ver el mundo con ojos de matemático; Lampert (1990) quiere que sus estudiantes conozcan la matemática igual que se conoce en la matemática como disciplina; y Brown, Collins, & Duguid (1989) consideran que los estudiantes pueden verse como "aprendices cognitivos" bajo la tutela de un matemático. Dentro de esta corriente encontramos trabajos de Beberman, 1958; Begle, 1970; Piaget, 1970,1973; Bruner, 1977; Schwab, 1978; Romberg, 1983; Schoenfeld 1985, 1988; Lave, Smith, & Murtaugh, 1988; Brown, Collings, Duguid, 1988,1989; Feurzeig, 1988; Greeno, 1988; Ball, 1988; Romberg, 1983; Lampert, 1990.

5.3.2.2 Aproximarnos a la naturaleza cognitiva de la DM

Para cumplir con este objetivo, documentamos en la sección 2.4.4 Dimensión cognitiva, que se han realizado múltiples investigaciones en el campo, que nos dan cuenta de la necesidad de cierto tipo de conocimiento y aproximación para la construcción de demostraciones en el nivel superior. Como ejemplos podemos mencionar, el conocimiento estratégico para manejar definiciones, reconocer la estructura de proposiciones (cuantificadores, conectivos lógicos, hipótesis, conclusión, etc) y técnicas de demostración. En principio, para aproximarnos a la demostración, los estudiantes deben ser capaces de manejar los conceptos y definiciones implicadas y su estructura. Selden & Selden (1995) hablan de la dificultad que presentan los estudiantes para desenvolver los conceptos y definiciones, incluyendo su estructura lógica. En esta misma dirección Harel, Selden & Selden (2006, p. 156) sugieren que una aproximación estructural a los conceptos es esencial para la construcción de demostraciones y nos da paso a los cursos universitarios, y ahí aparece como inadecuado introducir la mayor parte de conceptos por otro camino que no sea estructural. Ya que los matemáticos rápidamente entienden nuevos conceptos estructuralmente definidos, sería interesante investigar cómo desarrollaron la capacidad para hacerlo. No obstante, en la ingeniería diseñada para este trabajo intentamos introducirlos dando vuelta a la aproximación estructural, partiendo primero de las intuiciones y discusiones de los estudiantes y acercándolos poco a poco a la formación estructural.

Existe la necesidad de mostrar las definiciones, teoremas y conceptos *formalmente operables* para un individuo, es decir, los estudiantes deben ser capaces de usarlo para crear o reproducir (significativamente) un argumento formal (Bills y Tall, 1998). Para Pinto y Tall (1999) los estudiantes exhiben dos modos distintos de manejo de definiciones formales, uno *dando significado* a través de consideración de ejemplos (frecuentemente visuales) y otro por *extracción de significado* a través de la manipulación y reflexión sobre la definición misma. Para tener éxito con la primera forma se requiere dirigir la reconstrucción de ideas personales y centrarse sobre las propiedades esenciales de la definición para integrarlas en la teoría formal. La segunda forma evitó algunas dificultades respecto a la primera, y los estudiantes terminan construyendo una teoría formal no relacionada a imágenes informales. Más aún, los alumnos pueden tener éxito o no con cualquiera de las dos formas descritas. Alcock y Weber (2005) obtienen resultados similares de estas dos aproximaciones, pero referidas como *referencial* y *sintáctica* observando construcciones de demostraciones. En nuestro diseño didáctico, para evitar que los estudiantes construyan una teoría formal relacionada con imágenes informales pobres de los conceptos, se incluye una discusión en gran grupo, en la cual el profesor conecta las ideas que los estudiantes conforman en el trabajo en los pequeños grupos y apoya la discusión para que sean extendidas y formalizadas.

Dorier et al (2000) se ocupan del *obstáculo del formalismo*, es decir, del razonamiento erróneo de los estudiantes en relación con su insuficiente competencia principalmente en el manejo de lógica y teoría elemental de conjuntos, pero también de la manipulación de expresiones algebraicas y del lenguaje formal. Después de varios estudios de diagnóstico, encuentran que dicho obstáculo prevalece en diferentes generaciones sucesivas, y para casi todos los modos de enseñanza. Concluyen que la ausencia de conocimientos previos en lógica y teoría elemental de conjuntos contribuye a la producción de errores y, además el tipo de respuestas revelan un mal uso de las implicaciones matemáticas, caracterizados por la confusión entre hipótesis y conclusión. En la conformación de nuestra propuesta didáctica se ha dado un lugar importante al manejo de cuantificadores y conectivos lógicos, tablas de verdad y se han propuesto ejemplos que permiten a los estudiantes comprender la diferencia entre su uso cotidiano y su uso en el contexto matemático. Las discusiones en pequeños grupos y en gran grupo detonan la necesidad de un uso adecuado del lenguaje formal para ser comprendidos por la comunidad de práctica. Fortalecer el aparato lógico y su conocimiento de la teoría de conjuntos apoya los errores cometidos con mucha frecuencia por los estudiantes en torno a la confusión de hipótesis y conclusión y a la no distinción de su función.

En la sección 2.2.2 Ejemplos y contraejemplos, discutimos acerca del papel preponderante que los ejemplos y contraejemplos tienen en la enseñanza y aprendizaje de la matemáticas ya sea para entender o explicar definiciones y procedimientos, para generalizar o para la construcción de argumentos y demostraciones de teoremas. Los ejemplos son un elemento importante de conocimiento matemático especializado (Risslan-Michener, 1978). En ese sentido, describimos algunos trabajos que hablan del papel de los ejemplos para la formación, clarificación y dotar de significado a los conceptos (Vinner, 1983; Dahlbeg y Houseman, 1997; Wason y Mason, 2002). A través de los ejemplos los profesores transmiten la esencia de los conceptos y técnicas matemáticas (Tall y Vinner, 1981), los ejemplos poseen aspectos pedagógicos que los posicionan como elemento central en la práctica de los profesores (Zaslavsky, 2010; Figueiredo, 2010) y la principal razón para presentarlos es que los alumnos los interiorizan como una herramienta que utilizarán posteriormente para resolver problemas de ese tipo (Bills et al, 2006) y el uso de ejemplos ayudará al estudiante a una posterior generalización -construyendo espacios de ejemplos-, abstracción y razonamiento analógico (Watson y Mason, 2005; Zaslavsky, Harel y Manaster, 2006). Principalmente se observan dos tipos de generalizaciones en correspondencia con dosmaneras de pensamiento distintas: la *generalización de patrones del proceso (PPG)* y la *generalización de patrones de los resultados* (RPG) (Harel, 2001, p. 191). Mientras que la primera se centra en las regularidades en los procesos y son requeridos para la construcción de demostraciones matemáticas inductivas y deductivas (Harel, 2008; Pedemonte, 2007; Martínez y Pedemonte, 2011), la segunda se enfoca en la regularidad de los resultados.

Por otro lado, diversas investigaciones alertan acerca de trabajar la distinción entre verificación y demostración desde el manejo de los ejemplos, esto porque los estudiantes usualmente los utilizan para las demostraciones, dado que éstas son entendidas como simples verificaciones y aún cuando tienen una demostración, siguen sintiendo la necesidad de una verificación (Hoyles, 1997; Fishbein y Kedem,1982 y Vinner, 1983; Healy y Hoyles, 2000; Fischbein, 1982). Para Mariotti (1998) la discrepancia entre la verificación empírica y el razonamiento deductivo es un obstáculo para la comprensión del significado de la prueba. En la práctica educativa, es común confundir esos dos puntos de vista y, como consecuencia, desorientar a los estudiantes quienes ven que los 'ejemplos' juegan un rol fundamental a la hora de establecer axiomas y 'descubrir' teoremas, pero que están prohibidos cuando se les pide que prueben un enunciado: uno o unos cuantos ejemplos no son aceptables como "prueba."
Muchos estudiantes creen que mostrar que un teorema general es válido en un ejemplo específico, o quizás en varios ejemplos, es suficiente como demostración (Weber, 2001). Los profesores con sus actuaciones refuerzan esta idea al omitir las pruebas de los teoremas y, en su lugar, ofrecer ejemplos a modo de justificación (Harel y Sowder, 1998 y Goetting, 1995) y así aun sin ser conscientes de ello, pueden estar dando la impresión de que bastan las pruebas empíricas para establecer la verdad de proposiciones matemáticas. En relación con las conjeturas relativas a la generalización o el establecimiento de un contraejemplo, si las pruebas se realizan a partir de datos concretos las estrategias que utilizan los estudiantes son principalmente empíricas (Coe y Ruthven, 1994), sustituyendo el argumento deductivo por una comprobación suficientemente diversa de casos. En nuestro diseño didáctico a lo largo de la ingeniería hemos incluido diferentes tareas que los confrontan para distinguir la verificación de la demostración y aunque es una confusión que persiste y pudimos ver tanto en el estudio exploratorio como en la implementación de la propuesta, en las últimas sesiones se puede observar que los ejemplos son usados para intuir argumentos y explorar su validez y no como una prueba.

En relación con el rol de los contraejemplos, una dificultad evidente en los estudiantes, es el hecho de que un gran número de ejemplos no logre demostrar una proposición, sin embargo, un sólo ejemplo puede invalidar un teorema. Wason (1966), observó en sus estudios que los sujetos mostraban el sesgo de la confirmación, es decir, el principal error que tienen los estudiantes es que intentan encontrar evidencia que confirme la regla en lugar de buscar una evidencia que la falsee. Por otra parte, en los estudios realizados por Lehrer & Romberg (1999), la ausencia generalizada para encontrar un contraejemplo fue tomada por los alumnos como una verificación. El utilizar ejemplos, no ejemplos y contraejemplos casi en todas las hojas de trabajo de la ingeniería, ha permitido que al no encontrar evidencia inmediata para avanzar en probar verdad, a la par o enseguida intentan buscar evidencia de falsedad. También hemos encontrado que en repetidas ocasiones la imposibilidad por encontrar el contraejemplo constituye para ellos un argumento para buscar probar que es verdadero el resultado, y de igual manera el no encontrar contraejemplos los lleva a intentar su búsqueda con números "grandes". No obstante, creemos que el diseño y la forma de trabajo han permitido que emprendan búsquedas de igual manera de argumentos o evidencia que los ayuden a demostrar que es válido o falso el resultado.

5.3.2.3. Realizar un estudio exploratorio con estudiantes del medio

El estudio exploratorio fue realizado en el medio con tres grupos de la licenciatura, de semestres inicial, medio y avanzado en tres clases asociadas (lógica matemática, álgebra lineal y álgebra moderna respectivamente). Para ello se diseñaron instrumentos que comprendían la resolución de problemas asociados con la materia, algunos de cálculo, y otros en los que se requerían diferentes niveles de presentar evidencia de verdad, por ejemplo: explique, exhiba ejemplos, muestre, demuestre. Los resultados de los instrumentos fueron analizados, codificados e interpretados. Además, en el caso del primer grupo se realizaron estudios de caso en los que se aplicaban otros instrumentos y entrevistas a fin de obtener mayor información acerca de su desempeño en el primer instrumento. En el estudio exploratorio caracterizamos el medio en el que se desarrollaría la ID. Por ejemplo, encontramos que durante el programa de estudios de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas de la UJED, no se habían establecido momentos específicos en los que se abordara la demostración matemática como objeto principal de estudio y elemento clave para el estudio de la matemática. Más aún, en los niveles de formación previos tampoco se abordaba el aparato lógico y lingüístico necesario para dotar a los estudiantes de los conocimientos necesarios para iniciarse en la demostración. Encontramos también que la aproximación a los conceptos se daba por la vía estructural, notando que no se establecía una conexión o distinción entre la intuición y conocimiento y experiencias previas de los estudiantes con el conocimiento formal en matemáticas. El carácter expositivo predominaba en los profesores y la organización en el aula era siempre la del alumno como receptor pasivo con intervenciones cuando el profesor se las demandaba. En el mismo estudio, se realizó una descripción de las dificultades y errores que cometen los estudiantes al enfrentar la tarea de demostrar, desde un recorrido por diferentes investigaciones reportadas en medios académicos. También, derivado del análisis de las respuestas de los estudiantes a los diferentes instrumentos aplicados en los tres grupos participantes detectamos dificultades, obstáculos y errores típicos que fueron tomados como directrices para el diseño de la ID propuesta en este trabajo (ver 3.1 Estudio Exploratorio. Descripción), con el propósito de impulsar el desarrollo de competencias demostrativas que respondieran a las exigencias del contexto y a la construcción del conocimiento base necesario.

Un informe completo del estudio exploratorio lo encontramos en el capítulo III de este trabajo, además de que los resultados se han documentado en otros informes académicos (Alvarado y González, 2009; 2010; 2011).

5.3.2.4 Diseñar e implementar una ID para impulsar el desarrollo de competencias demostrativas que respondieran a las exigencias del contexto y a la construcción del conocimiento base necesario para enfrentar la demostración matemática.

Dada la metodología de la ingeniería didáctica encontrada adecuada para nuestro trabajo, el propósito principal de nuestra investigación comprende dos partes; una de ellas, analizar los procesos de pensamiento matemático avanzado involucrados en el desarrollo y manipulación de la demostración matemática (y de manera implícita, localizar dificultades, obstáculos y errores que surgen y persisten en este contexto) y, por otro lado, desarrollar una secuencia de enseñanza que modifique el esquema de enseñanza habitual de este procepto (como proceso y como concepto en el sentido de Gray y Tall (1991), acorde con algunos resultados de la investigación. Nuestra secuencia se diseñó bajo la idea general de que la demostración matemática debe tener lugar como objeto de estudio y reconocer que tiene asociados otros conceptos y procesos fundamentales que deben estudiarse para evitar errores inducidos por el uso del contexto cotidiano como referente principal y que difiere del uso en el contexto matemático. Así, en nuestro diseño consideramos que:

- ✓ Se ordenan y contextualizan los contenidos a enseñar tanto en la parte matemática como en la situación cognitiva del grupo, es decir no importa el nivel de conocimiento previo, todos pueden acceder a las tareas y lograr avanzar en la construcción del conocimiento al interactuar con la tarea, con sus pares y con el profesor.
- ✓ Aunque resulta difícil pensar en aproximarnos por una vía distinta a la estructural en el nivel superior, no seguimos el orden de una organización deductiva, es decir se da un acercamiento informal al concepto, siendo los alumnos quienes construyen su definición a partir de las imágenes disponibles y los ejemplos conocidos, antes de formalizar la teoría. También, son los estudiantes quienes se aproximan a la demostración de un resultado a partir de ciclos de refinamiento de sus intuiciones, interpretaciones, reinterpretaciones extraídas de la discusión en pequeños grupos y posteriormente extendidas en gran grupo con el profesor.
- ✓ La evaluación no queda condensada en un examen escrito rutinario, sino que se realiza analizando la evolución personal de los estudiantes y la construcción, evolución y consolidación del conocimiento compartido en equipos o grupo en las sesiones.
- ✓ Se rompe con la clase tradicional donde el profesor es mero expositor del conocimiento, poniendo énfasis en el pensamiento del estudiante, de manera que los estudiantes perciban las Matemáticas no como un conocimiento que se recibe pasivamente, sino como un conocimiento construido activamente. Esto conduce a compartir responsabilidad entre el profesor y los estudiantes sobre el conocimiento compartido generado.
- ✓ Acerca a los estudiantes sin una formación matemática previa a captar el significado, la belleza y la dificultad de un resultado matemático.

En este sentido, podemos afirmar que la propuesta generada ha cumplido con sus dos funciones principales: 1) ser una alternativa para cambiar la noción paramatemática de la demostración matemática en el nivel universitario; 2) ser un instrumento de investigación que permita: observar y documentar el aprendizaje y evolución de los estudiantes; localizar algunas dificultades, obstáculos y errores que su aprendizaje conlleva; y vislumbrar estrategias para mejorar el acceso democrático de los estudiantes a la tarea de demostrar, de leer y comprender una demostración y a la tarea de escribir y comunicar una demostración.
Algunas de las dificultades no previstas en su implementación se han debido más a factores externos que a factores de organización. Un elemento de gran importancia que afectó el (re)diseño de diversas situaciones y actividades resultó ser que un gran porcentaje de los estudiantes no participó en todas las sesiones por diversas razones: 1) eran foráneos y al acercarse el período vacacional y descargarse de los compromisos de las materias oficiales, tomaron la decisión de regresar a sus lugares de origen de vacaciones, abandonando en forma anticipada su participación en nuestra Ingeniería; 2) en la sesión acerca de la definición el profesor incluyó a estudiantes de otros grupos; y, 3) algunos alumnos dejaron de participar al saber que no influiría en su calificación y por temor a la complejidad del tema. La deserción de estudiantes provocó que en las últimas tres sesiones sólo se formara un equipo y se diera menos tiempo para el trabajo entre pares, usando en ocasiones más tiempo el profesor para guiar la sesión. Por otro lado, el nivel de conocimientos de los estudiantes, que se mostró más bajo del esperado a nivel conceptual, aún en conceptos básicos provocó que se extendieran los tiempos previstos por

sesión, tanto en la parte de trabajo en pequeño grupo como en las discusiones en gran grupo. También, teniendo en cuenta la extensión de nuestra Ingeniería y la complejidad del tema abordado se multiplican las dificultades en su implementación y análisis.
Sin embargo, en líneas generales la Ingeniería diseñada ha cumplido con las expectativas, a pesar de las dificultades señaladas, y se ha podido documentar el pensamiento y evolución de los estudiantes que permanecieron hasta el final de la implementación. También, independientemente de estos factores, se ha logrado crear una secuencia que incorpora los elementos novedosos que habíamos previsto:

Dar un papel preponderante al manejo de definiciones para avanzar en la demostración: Nuestra propuesta ofrece un papel privilegiado a la construcción y manejo de definiciones de los objetos y conceptos matemáticos y a su uso para comprender afirmaciones o proposiciones matemáticas, favoreciendo en gran medida la extracción o dotación de significado para construir deducciones y argumentos que permitan avanzar en el proceso de demostrar un resultado. Afirmamos que los estudiantes a lo largo de la Ingeniería han mostrado una madurez en el manejo de las definiciones de objetos o conceptos al repetirlas, reconstruirlas, reformularlas y mostrar diferentes ejemplos que las satisfacen. En particular, al enfrentarse a la tarea de demostrar una afirmación, a fin de comprenderla primero identifican todos los conceptos y objetos implícitos y explícitos en el enunciado y discuten acerca de la definición de ellos. Tal afirmación se puede sustentar al observar la trayectoria de la definición durante la ID (ver 5.2.1 Definición como Objeto de Estudio). También es conveniente comentar que a raíz de este trabajo, algunos profesores del medio en el que se implementó la ID, han reservado en sus prácticas tiempo para que los estudiantes antes de intentar demostrar un resultado puedan discutir acerca de la definición de los conceptos que aparecen en el resultado y tomen acuerdos sobre ella antes de involucrarse en demostrar el resultado. Esto ha permitido que se puedan detectar algunos malos entendidos previos y confusiones con los conceptos y los ayuden a superarlos para que no representen un obstáculo a la hora de demostrar el resultado en juego.

Además, tal como se muestra en los análisis *a posteriori*, los alumnos han ido aceptando, en líneas generales, el uso de la demostración para validar los resultados en la actividad matemática cotidiana, junto con el cuidado en el manejo de lenguaje y definiciones, cuidado en los conectivos y cuantificadores lógicos, forma, componentes, función y estado de las implicaciones, forma no lineal de la lectura de demostraciones y cuidado en la escritura de versiones condensadas para comunicar. Además, comprender la tarea e importancia de definir, les ha ayudado a entender muchos conceptos teóricos y a madurar en tareas inherentes a la demostración como es el caso de la conjetura y del manejo de ejemplos, no ejemplos y contraejemplos.
Podemos decir, como consecuencia de todo lo anterior, que la demostración matemática ha recibido una revaloración positiva por parte de la mayoría de los estudiantes participantes y una diferenciación de situaciones en el contexto matemático y en el contexto cotidiano, al igual que un mayor cuidado del lenguaje y en general de la actitud y rigor matemático que ha reducido notablemente los errores, dificultades y obstáculos con el manejo de la demostración. También ha desarrollado competencias demostrativas que le permiten sustentar y argumentar el valor de verdad de un resultado y comunicarlo, tanto como leer y comprender una demostración de otros.

Usar de forma activa ejemplos y contraejemplos, para la construcción de demostraciones: El uso de ejemplos, no ejemplos y contraejemplos asociados a la construcción de una demostración y, de manera implícita, a actividades asociadas a esta práctica como: definir, conjeturar y argumentar, ha sido utilizado y revisado en diferentes momentos de la ingeniería. En la sección 5.2.4 Uso de ejemplos, no ejemplos y contraejemplo en la demostración y en tareas inherentes, se traza la trayectoria seguida de la función de los ejemplos y contraejemplos a través de la implementación. Ahí podemos ver cómo los estudiantes transitan desde: recurrir a un ejemplo para intentar probar que una proposición es verdadera estableciendo una simetría con lo que se hace para probar que es falsa (usar un contraejemplo); aún y cuando se les presenta una demostración o la realizan ellos mismos necesitaban verificarla para algunos casos; recurren a ejemplos de manera natural como entradas conceptuales para construir, afinar y comprender definiciones; usan ejemplos y no ejemplos para establecer conjeturas; y al final son utilizados apropiadamente para demostrar verdad a través del método exhaustivo y para probar falsedad a través de un contraejemplo.

Formación del concepto de implicación: En el diseño de la ID se ha puesto énfasis en ello, dado que en el estudio exploratorio observamos que no se reconocía el papel condicional de la hipótesis y en consecuencia en repetidas ocasiones se pudo comprobar el error de la recíproca. En las primeras sesiones el desempeño de los estudiantes mostró que cuando el *si* y el *entonces* no aparecían de manera explícita, discrepaban en su elección de la hipótesis y la conclusión, se presentaron múltiples oportunidades para distinguir las componentes de una implicación en diferentes formatos de escritura. Posteriormente, en las siguientes sesiones constantemente se identificaban componentes y se revisaba el papel de la hipótesis. En la sección 5.2.3 Formando el concepto de Implicación, se puede ver el énfasis que se ha puesto en la formación del concepto de implicación y en atender la resistencia notada a superar el error de la recíproca. Para superarlo, el trabajo en pequeños grupos ha permitido que entre los mismos estudiantes reconozcan cuándo uno de ellos lo cometen y se apoyan entre ellos para corregir y avanzar.

Fortalecer las pruebas deductivas, para ello, la estrategia utilizada fue trabajar con el método de avance y retroceso buscando primero que: a) reconocieran la importancia de las definiciones y pudieran verlas como una doble implicación. Eso les permitió extraer significado y construir o derivar al menos dos deducciones directas, una para avanzar en la construcción de un enunciado equivalente a la hipótesis y otra para retroceder en un enunciado equivalente a la conclusión; b) distinguieran entre las diferentes formas en que puede aparecer enunciada una implicación así como entre sus componentes (hipótesis y conclusión) y su función en el proceso de construir su demostración; c) evitaran recurrir a las pruebas empíricas, dándose cuenta de que por más ejemplos que verifiquen la proposición si no se corresponden con la totalidad, esto no constituye garantía de verdad en matemáticas. Y que un contraejemplo es suficiente garantía de que la proposición en juego es falsa, además de que la dificultad para encontrarlo no es suficiente para asegurar que no exista; d) afinaran sus esquemas de prueba con cierto nivel de sofisticación en las técnicas de demostración disponibles por la insatisfacción (disonancia cognitiva) generada con las pruebas enfrentadas previamente; y e) que manejaran adecuadamente los conectivos lógicos de las proposiciones y las tablas de verdad asociadas. En la sección 5.2.5 Pruebas deductivas, podemos ver como evolucionaron los alumnos desde esta estrategia, al igual que podemos ver como se falla pensando que la idea de pregunta clave los pudiera apoyar en el avance de la demostración. No obstante, se logra el avance cuando ellos mismos modifican su comprensión de esta idea de generar deducciones o información cierta a partir de la información disponible.

5.3.3.5 Estudiar hasta qué punto las modificaciones en el contrato didáctico cambian la actitud de los estudiantes en la aproximación a la actitud y rigor matemático.

La Teoría de Situaciones toma en cuenta que un estudiante no experimentado en el funcionamiento a-didáctico ha de ser preparado poco a poco. En nuestro caso, el funcionamiento a-didáctico implica que debe construir con sus pares en pequeño grupo el conocimiento a partir de discutir y analizar todos los referentes que tienen a la mano desde su conocimiento previo, intuición y experiencia en el lenguaje cotidiano, para posteriormente compartirlo con un grupo más amplio y con el profesor. Para implicar al estudiante y comprometerlo en el trabajo y discusión en pequeño grupo, éste no debe conocer de antemano las respuestas esperadas; el profesor debe conseguir que el estudiante acepte la responsabilidad, dentro de su grupo, de buscar una resolución a los problemas, ejercicios o tareas de los que ignora la respuesta, para después poderlos compartir en gran grupo.

En el desarrollo de la ingeniería, desde la primera sesión hemos podido observar que la participación de los estudiantes ha sido muy activa. La interacción con sus pares disminuye el miedo al error y expresan libremente su pensamiento provocando que se vayan depurando las ideas de la confianza con la que son sometidas a la discusión. Al principio, cuando pasan a la fase de ampliar el grupo de discusión incluyendo al profesor, comienzan con poca participación pero paulatinamente se va incrementando y al final se muestran con mucha confianza en estas discusiones y podemos observar como exponen y defienden sus argumentos ante el cuestionamiento del profesor en el grupo. El participar ellos de la construcción del conocimiento ha sido muy motivador y aún fuera de las sesiones se muestran comprometidos con extender sus producciones y mostrar lo conseguido fuera del aula al profesor.

También se pone de manifiesto la responsabilidad y compromiso con las tareas propuestas, dado que los estudiantes rellenan siempre las hojas de trabajo concentrando los resultados convenidos en los pequeños grupos para después compartirlos. Cabe señalar que el hecho de que la ingeniería tomara más del doble de tiempo previsto es la fuerza y extensión de las discusiones e interacciones tanto en pequeño grupo como en gran grupo para lograr acordar y construir conocimiento compartido o resolver las cuestiones planteadas y otras que surgían de manera imprevista y natural a manera de conjeturas como extensiones de las tareas.

Nuestro diseño favoreció también el trabajo grupal y la oportunidad de que el profesor apoyara la conexión de ideas entre pequeños grupos y, que a su vez, se propiciara la extensión y formalización del conocimiento compartido. Diversos autores, en los libros editados por Cobb y Bauersfeld (1995) y Dreyfus y Hershkowitz (2009), puntualizan la importancia de enfrentar a los alumnos a situaciones conflictivas reconociendo la importancia de las interacciones en clase y remarcan que el éxito de diversas situaciones didácticas no sólo se debe a las características de los problemas elegidos y al diseño de las actividades, sino también a las características de los escenarios, en particular cuando participan del carácter social de los procesos de aprendizaje.

5.4 Apuntes finales y perspectivas de futuro

Una gran fortaleza de esta ingeniería didáctica fue la estructura social para favorecer la emergencia y construcción de estructura matemática en pequeños grupos de estudiantes, que posteriormente se afina, extiende y formaliza en un grupo mayor, caracterizado por requerir mayor grado de convencimiento (se integra el profesor a la discusión y otros equipos que previamente han discutido sobre los temas y realizado las tareas).
En relación a los contenidos y procesos matemáticos, el abordaje de las definiciones fortalece y apoya el desarrollo de competencias demostrativas en los estudiantes. Una motivación es que son

ellos mismos quienes las construyen desde su conocimiento previo, estableciendo relaciones con situaciones donde han sido utilizados los objetos y conceptos a definir, ejemplos o representaciones de ellos, etc. Las definiciones establecidas por los estudiantes de diferentes semestres de la licenciatura, en la primera sesión de trabajo, causó gran sorpresa al profesor que implementó la ingeniería, e incluso a otros lectores de los resultados. Esta sorpresa nos conduce a diferentes cuestiones para discutir: Si son conceptos u objetos que los estudiantes han estudiado o conocen desde los ocho años de edad *¿por qué aún producen definiciones parciales?* La respuesta, no debe llevar a cuestionar la capacidad de los estudiantes. Entonces se puede plantear la siguiente pregunta *¿en qué momento de sus estudios (desde nivel básico hasta licenciatura) se les ha enseñado a definir?* más aún, *¿en qué momento aprenden a distinguir, cuándo una definición se puede considerar buena?* No hay momentos durante la formación escolar de los estudiantes que ofrezcan momentos o lugar para la definición como objeto de estudio, por lo que esta ingeniería trató de dar oportunidades a los estudiantes para enfrentarse con la tarea de aprender a definir. El proceso realizado en esa tarea produjo un avance sustancial cuando abordaron la demostración.

Al igual que la práctica de definir, las actividades para reconocer los componentes de una implicación y su función en el proceso de la demostración, así como el manejo de ejemplos y contraejemplos son fortalezas que se ven reflejadas en la segunda mitad de la ingeniería didáctica, cuando se pone en juego este conocimiento en actividades de demostración formal. El diseño de la ingeniería ha permitido que en una sesión se puedan entrelazar nociones y conceptos desarrollados previamente lo que constituye una oportunidad para poder evaluar la transición y avance de los conceptos e ideas desarrolladas previamente por los estudiantes y que les permiten llegar a realizar y comunicar sus propias demostraciones.

En este misma sentido además de "realizar sus demostraciones", el tener la oportunidad de escribir en forma condensada y comunicable sus producciones los ayuda a entender el proceso de demostración. Así, han de entenderlo como un proceso que parte desde ideas intuitivas y perceptivas, que se van formalizando a partir de la consideración de ciertos hechos establecidos dentro de una teoría axiomática, realizando las deducciones lógicas necesarias para llegar a la conclusión identificada desde el principio. El producto final es una versión comunicable en la que se omiten los detalles y se priorizan los elementos principales. Así mismo, en el proceso inverso, es decir, para leer una demostración realizada por otros, teniendo a mano lápiz y papel para registrar los detalles que elucidan el pensamiento del autor, pueden reconstruir una versión detallada que les permita comprender el proceso de razonamiento. Esto les ha llevado a tener una visión global del proceso de la demostración, que es la principal actividad de un matemático.

La Ingeniería ha tratado, desde el principio, de favorecer la transición de esquemas de prueba empíricos de los alumnos a esquemas deductivos, logrando como producto demostraciones para ser comunicadas. También han sido capaces de enfrentar tareas de demostración en situaciones extramatemáticas mostrando un dominio del método directo de prueba, *avance-retroceso*.

En cuanto al modelo teórico usado para analizar las producciones de los alumnos, abstracción en contexto, ha servido para documentar la emergencia y construcción de los diferentes conceptos en el trabajo tanto en pequeños grupos como en gran grupo a partir de las acciones epistémicas, de reconocimiento, de edificación, de construcción y de consolidación (RBC-C). Se ha podido constatar que los alumnos realizan R-acciones como reconocimiento de axiomas, errores, hipótesis, conclusiones así como el papel que cumplen cada uno de estos elementos en la demostración y además son capaces de establecer conjeturas. Las B-acciones se caracterizan por la generación de ejemplos con los cuáles van avanzando en el proceso de demostración. Y en las C-acciones muestran cómo organizan las ideas para explicarlas, para comunicarlas a otros y cuál es el resultado de sus razonamientos.

Es significativo que, hacia la segunda mitad de la ingeniería, se han podido identificar acciones de consolidación (***C***-*acción*) relacionadas con la adquisición de las habilidades necesarias para la práctica profesional matemática, es decir, una consolidación del *registro matemático.* También los estudiantes han dado muestra de manejo de los métodos directos e indirectos de prueba.

El profesor que apoyó la implementación de la Ingeniería Didáctica pudo atender al mismo grupo en un curso posterior y observó que tenían mucho cuidado en el manejo de ejemplos y contraejemplos, y en la extracción de significado de las definiciones, al igual que en el abordaje de la demostración utilizando las técnicas y los medios trabajados en esta ingeniería. Se requiere de un seguimiento con mayor detalle para poder reportar aprendizaje significativo a largo plazo.

Como acciones derivadas de este trabajo, en la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas de la UJED el ciclo escolar 2012-2013, se implementó en un curso preparatorio de acceso al primer semestre, esta ingeniería didáctica con algunas modificaciones derivadas de un análisis detallado realizado junto con el profesor que implementó la Ingeniería. Entre esas mejoras, se incluyeron más tareas para fortalecer la idea de que un gran número de ejemplos no prueba que una proposición sea verdad, o bien, para extender la comprensión de que generalizar requiere demostrar. Un ejemplo de las tareas agregadas fue probar si es falso o verdad la proposición, *cada número impar mayor que 1 puede expresarse como la suma de una potencia de 2 y un número primo*. La expresión algebraica funciona para muchos números impares pero falla con el 127.

La insistencia en la construcción de ejemplos para probar conjeturas fueron el motivo por el que se incluyeron actividades similares a las de los números felices, dándoles pie a que buscaran argumentos para convencer por qué funcionaba su conjetura. También se construyeron nuevas situaciones que incluían cuantificadores para fortalecer esta parte que resulta ser la más débil en esta ingeniería. Al construir negaciones con cuantificadores se producen errores asociados sobre todo en las técnicas de demostración indirecta, donde es necesario construir negaciones.

En este trabajo no se incluyó como técnica de prueba la inducción matemática, por creer que pudiera ser más cercana a los estudiantes, dado que se aborda en una de sus primeras materias (Álgebra Superior). No obstante, en la tarea en la que se les pedía justificar si la expresión $f(n)=n^2+n+41$ siempre generaba números primos, cuando buscan contraejemplos sin éxito, y encuentran un buen número de ejemplos que verifican que la expresión genera un primo, intentan utilizar inducción matemática. En ese caso, se comprobó que es una técnica que les resulta artificial y más que una línea de razonamiento insisten en acomodar cálculos para conseguir la expresión requerida. Con la intención de fortalecer la ingeniería didáctica para el curso preparatorio, se hicieron algunas exploraciones que van más allá de este trabajo de tesis (e.g. Encontrar la suma de puntos del dominó de 9, ensayar generalización de expresiones derivadas de las procesos de conteo propuestos por los estudiantes para el dominó y finalmente introducirlos a probar por inducción matemática) y en el futuro resultaría interesante una mayor exploración con actividades que sean cercanas al estudiante, en las que los ejemplos tengan un papel preponderante y se pueda motivar la necesidad de una demostración.

Por último, podemos destacar que este trabajo de tesis se ha centrado totalmente en el pensamiento de los estudiantes, pero bien se puede observar desde el pensamiento del profesor y estudiar las acciones o movimientos que producen momentos de avance en el conocimiento de los estudiantes. Es difícil separar las dos aproximaciones y es por eso que en muchos momentos del análisis no hemos podido evitar fijarnos en las acciones del profesor.

5.4.1 Pertinencia de las herramientas metodológicas para el análisis

Inicialmente como herramienta teórica-metodológica para el análisis de la construcción del conocimiento derivado del trabajo en equipos, su extensión y formalización, posteriormente en gran grupo, utilizamos el modelo de Toulmin para el análisis de argumentos. La razón para ello, fue que lo encontramos en principio apropiado, dado que antes lo utilizamos para documentar y analizar la actuación y pensamiento de los estudiantes en estudios de caso durante el estudio exploratorio. No obstante, desistimos de esta herramienta por considerar que no capturaba la complejidad del proceso de construcción y consolidación del conocimiento generado, tampoco la evolución en el pensamiento del estudiante y en el conocimiento compartido.
Por lo anterior, encaramos la necesidad de buscar o generar herramientas que nos permitieran extraer la riqueza y complejidad en el aula con las modificaciones y alternativas propuestas para la enseñanza aprendizaje de la demostración matemática. En esta dirección encontramos que *Abstracción en Contexto* (Schwarz, Dreyfus & Hershkowitz, 2009), nos permitía revisar y documentar los procesos de abstracción para caracterizar la emergencia de un nuevo constructo, desde el análisis de las interacciones en pequeños grupos y en gran grupo. Como lo explicamos ampliamente en 2.3.2 Procesos de abstracción desde la construcción de conocimiento compartido o de grupo y en 4.2 El modelo RBC como herramienta teórica para el análisis, el proceso pasa por tres etapas: la necesidad de un nuevo constructo, su emergencia y su consolidación al utilizarlo en diferentes contextos. Las acciones epistémicas ocurridas durante la segunda etapa son: *Recognizing, Building with, Constructing* o bien *R-acciones*, *B-acciones* y *C-acciones.* Así el modelo asociado se conoce como *modelo RBC* y modelo *RBC-**C*** con la segunda C correspondiente a la etapa de consolidación.
Una de las razones por las cuales lo consideramos apropiado, es el isomorfismo que establecemos con la tarea de definir, al igual que con el método avance-retroceso y otros contenidos cruciales dentro de esta Ingeniería. Volviendo al isomorfismo con el método avance-retroceso, podemos identificar de manera natural con el método RBC-**C**, considerando que las *R-acciones* se dan al reconocer la información que se supone cierta, así como las definiciones y conceptos implicados, las *B-acciones* surgen a partir del enunciado, por extracción de su significado, o cuando se realizan cálculos, para obtener deducciones y comprender el significado que tiene demostrar el enunciado, para finalmente construir la demostración solicitada y organizarla (*C-acción*). La *C-acción* se da una vez que consideran el enunciado de la proposición y su demostración como una unidad. Las **C**-acciones o acciones de consolidación, que ocurren cuando el aprendiz es capaz de presentar una versión condensada y/o elegante de la demostración, cuando es capaz de generar otras maneras de demostrar el mismo hecho, utiliza el lenguaje matemático de manera apropiada y finalmente utiliza la proposición con su demostración como una unidad para la construcción y demostración de nuevas proposiciones o bien para la resolución de problemas. Cabe mencionar que cuando se divide la tarea en subtareas, una vez concretada cada subtarea, su verbalización o registro escrito constituye la C-acción asociada a la subtarea.

Anexo A

En este apartado se presentan las hojas de trabajo que conforman la ingeniería didáctica propuesta. Las hojas entregadas a los estudiantes tenían los espacios justos para contestar, mismos que hemos reducido en esta versión por ahorrar espacio. También cabe mencionar que los recuadros remarcados en gris son notas para el profesor y tampoco aparecían en la versión entregada a los alumnos.

Anexo A. Hojas de Trabajo de la ID

Hoja de trabajo #1 (30 minutos): Definiciones

Objetivos: Establecer la diferencia de trabajo con los objetos en matemáticas avanzadas con respecto a las matemáticas elementales, esto es, en las primeras se "definen" mientras que en las segundas se "describen".
Educar progresivamente los hábitos de los estudiantes de forma que las definiciones formen parte de su experiencia y de sus esquemas conceptuales.

En matemáticas, una definición es una convención o acuerdo al que llegan todas las partes interesadas en cuanto al significado de un término particular.

Intenta definir con tus compañeros de la manera más precisa los siguientes conceptos.

Pedirles que se integren por equipos, negocien las definiciones y las escriban hasta estar todos de acuerdo.

Número par:
Número impar:
Triángulo isósceles:
Número primo:
Cuadrilátero:
Un círculo es
Un número *a* divide a un número *b* cuando …
Dos triángulos ABC y DEG son semejantes cuando….
Número racional:
Se dice que *A* es subconjunto de *B* si….
Ortocentro de un triángulo

Definición: Un *número* es *feliz* cuando la suma reiterada de los cuadrados de sus dígitos acaba siendo 1.
Proporcionen ejemplos de números felices y justifiquen.

Intenten definir *número primo feliz.*

Proporcionen al menos dos ejemplos de *números primos felices*.

–Discusión en grupo –

En esta discusión a propósito de las "definiciones" proporcionadas por los estudiantes se recomienda poner en juego la importancia de definir, de tal manera que no se admitan ambigüedades y exhibir la utilidad de una buena definición con por ejemplo, el papel de una definición adecuada al intentar persuadir al grupo de que «el producto de dos números impares es impar».
Otro punto importante a destacar en esta discusión es el de interpretar definiciones, es decir, dada la definición poder proporcionar ejemplos apegados a la misma. Concienciar al grupo de que saberse de memoria las definiciones no garantiza en absoluto comprender su significado.
Al acordar en grupo las definiciones pedidas hay que procurar que la definición se exprese en la forma más corta, directa posible y que incluya en su totalidad y sólo a los objetos deseados. Para ello es conveniente exhibir en la discusión

diferentes casos que propicien el conflicto por ejemplo: al revisar la definición de cuadrilátero mostrar figuras no cerradas de cuatro lados, o con lados curvos, con dos lados que se intersectan más de una vez y presentar tanto ejemplos de cuadriláteros cóncavos como convexos.
Para el cierre se puede realizar alguna construcción geométrica en Cabri de algunos de los conceptos definidos, por ejemplo el ortocentro.

Hoja de trabajo #2 (40 minutos): Definiciones geométricas de las cónicas.

(Uso de Cabri Geometry directamente en la computadora o en la calculadora TI)

Objetivo: Establecer y comprender la definición geométrica de las cónicas y las relaciones entre sus elementos, partiendo de la imagen del concepto que tengan los estudiantes.
Al igual que con la hoja anterior se pretende educar progresivamente los hábitos de los estudiantes de forma que las definiciones formen parte de su experiencia y de sus esquemas conceptuales.

Parte 0. Explorando conceptos

Discute con tus compañeros y una vez que estén de acuerdo escriban la definición de mediatriz y describan las situaciones en que la han utilizado.

A continuación realicen en Cabri lo siguiente

a) Un segmento y etiqueta los extremos con *A* y *B*.
b) Encuentren un punto C que se encuentre a la misma distancia tanto de *A* como de *B.*
c) ¿Pueden encontrar otros puntos que cumplan esta propiedad?_____________
d) Describan como encontraron los puntos.

e) Apliquen la herramienta mediatriz en el segmento *AB.* ¿Qué ocurre?

Si consideran necesario realicen algún ajuste a la definición de mediatriz que escribieron al inicio.

Nota: Es importante observar el trabajo del grupo en esta parte, pues constituye un elemento de autorregulación de los conceptos a establecer.

Parte I. Sigan las indicaciones para realizar la construcción con Cabri.

a) Dibujen un punto arbitrario en la pantalla y etiquétenlo como *F*.
b) Dibujen una recta arbitraria que no pase por *F* y etiquétela como *l*.
c) Con la herramienta punto sobre objeto, dibujen un punto sobre la recta *l* y etiquétalo como *Q*.
d) Dibujen el segmento $\overline{FQ}$ y tracen su mediatriz. Etiquétenla como *m*.
e) Tracen una perpendicular a *l* que pase por *Q* y llámenla *t*.
f) Marquen el punto de intersección de *t* con *m*, y nómbrenlo *P.*

Parte II. Manipulación, observación y conceptualización.

Muevan el punto *Q* y observen que sucede con el punto *P*. Reproduzcan la trayectoria que sigue *P* cuando mueven *Q.*

Comprueben lo observado activando la herramienta traza para *P* y muevan *Q*.
Si conocen el nombre de la trayectoria descrita por el punto *P* escríbanlo.

Desactiva la traza de *P*. Obtén ahora el lugar geométrico de *P* cuando se mueve *Q*. ¿Qué sucede?

Si *P* está en la mediatriz del segmento $\overline{FQ}$, ¿qué propiedad tiene respecto a *Q* y a *F*?

¿Cómo se mide la distancia de *P* a la recta *l*?

Muevan el punto *Q* para mover *P*. ¿Qué cumple *P* respecto a la recta *l* y al punto *F*?

De acuerdo al punto anterior, ¿cómo definen la trayectoria obtenida?

La trayectoria estudiada es conocida como *parábola* con foco *F* y directriz *l.*
Discutan y expliquen que significa lugar geométrico.

Tracen ahora una recta perpendicular a *l* que pase por *F*. Nómbrenla *s*. Obtengan también la intersección de *s* con la parábola y llamen a ese punto *V* que es el vértice.
Tracen una perpendicular a *s* que pase por *F* y etiquétenla como *k*. Marquen los puntos de intersección de *k* con la parábola como *R* y *R'.*
Midan los segmentos $\overline{RR'}$ y $\overline{VF}$. Muevan *Q*. ¿Hay alguna relación entre sus medidas? Justifica.
¿Qué relación hay entre la medida de $\overline{VF}$ y la distancia entre *V* y *L*?

–Discusión en grupo –

En esta parte se recomienda realizar en grupo las construcciones y reforzar la idea de las definiciones obtenidas por los estudiantes para cerrar con una definición acordada por el grupo, además de destacar las relaciones encontradas.
Es importante antes de pasar a otro tópico dejar claro con diferentes ejemplos de definiciones que en matemáticas por convención *si* significa *si y sólo si* –reforzar posteriormente esto cuando se trabaje con la implicación y la doble implicación –.
Finalmente ayudado con los ejemplos producidos enumerar los atributos de una buena definición: debe ser concisa, precisa, consistente con otras definiciones y sin ambigüedades.

Parte VI (tarea de desafío): a). A partir de las siguientes definiciones intenten las construcciones en Cabri.
Definición 1. Se llama *elipse* al lugar geométrico de los puntos tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos, llamados focos, es una constante.

Expliquen los pasos que siguieron para lograr la construcción.

Reproduzcan en el siguiente espacio la construcción lograda en Cabri II plus y ubiquen los siguientes elementos de la elipse a partir de su descripción.
La línea que une los dos focos se llama eje principal de la elipse.
La mediatriz de los mismos eje secundario.
Se llaman vértices de la elipse a los puntos donde ésta corta a sus ejes.
El punto medio de los dos focos se llama centro de la elipse y la distancia entre ellos se llama distancia focal.

Se llama *hipérbola* al lugar geométrico de los puntos del plano tales que la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos, llamados focos, es una constante (se representa por 2a).
Expliquen los pasos que siguieron para lograr la construcción.

Reproduzcan en el siguiente espacio la construcción lograda y ubiquen los siguientes elementos de la hipérbola a partir de su descripción.
La recta que une los dos focos se llama eje real de la hipérbola.
La mediatriz se llama eje imaginario de la hipérbola.
El punto donde se cortan ambos ejes (que es el punto medio de los focos) se llama centro de la hipérbola.
Los puntos donde la hipérbola corta a los ejes se llaman vértices de la hipérbola.
Al igual que en la elipse, se llama distancia focal a la distancia entre los dos focos y a las distancias desde un punto cualquiera de la hipérbola a ambos focos se les llama radios vectores del punto.

–Discusión en grupo –

Los grupos regularmente son de naturaleza heterogénea y algunos estudiantes terminan las tareas designadas en menor tiempo y necesitan explorar “más allá” y dar tiempo a sus compañeros a concluir la tarea propuesta, es por eso que se plantean estas tareas de desafío para atender a la diversidad. Estas tareas de desafío además nos permiten que los estudiantes que no las trabajan durante la clase puedan llevarlas de tarea (tomando el tiempo necesario) para retomarlas en la discusión inicial de la siguiente clase.

Hoja de trabajo # 3: Proposiciones matemáticas (60 minutos)

Parte I (con papel y lápiz): reconociendo proposiciones matemáticas.

Objetivo: Reconocer una proposición matemática y sus componentes, destacando que lo característico y fundamental de una proposición matemática es su valor de verdad o falsedad.

a) Comenta con tus compañeros qué es una *proposición matemática* y una vez de acuerdo escriban su definición.

b) ¿Cuáles de los siguientes enunciados son proposiciones matemáticas?

Encierren las proposiciones matemáticas.	Expliquen el por qué de su respuesta.
1) $ax^2 + bx + c = 0$ 2) $\left(\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)$ 3) Los triángulos *XYZ* y *RST* son semejantes. 4) $3 + n + n^2$ 5) $sen\dfrac{\pi}{2} < sen\dfrac{\pi}{4}$ 6) Para todo ángulo *t*, $sen^2 t + \cos^2 t = 1$	

–Discusión en grupo –

Parte II (con papel, lápiz y tecnología): reconociendo proposiciones matemáticas verdaderas.

b) ¿Cuáles de las siguientes proposiciones matemáticas son verdaderas?
Subrayen los enunciados matemáticos verdaderos y expliquen el porqué de su respuesta en los dos casos.

1) La raíz cúbica de cualquier entero es un número real
2) $x^2 + y^2 > 1$ (donde *x* e *y* son números reales)
3) Si *x*>0, entonces $\log_7 x > 0$ (donde *x* es un número real)
4) Para todo ángulo *t*, $\sec^2 t - \tan^2 t = 1$
5) Sean *a* y *b* enteros con *a≠0*. Si *a* no divide a *b,* entonces $ax^2 + bx + b - a$ no tiene una raíz entera positiva

–Discusión en grupo –

Parte III (papel y lápiz): reconociendo las partes de una implicación.

a) Después de discutirlo en equipo escriban lo que entienden por *hipótesis y conclusión*.

–Discusión en grupo (construcción social) –

b) En cada una de los siguientes afirmaciones, identifiquen la hipótesis y la conclusión.

1) Si el triángulo rectángulo *XYZ* con catetos de longitud *x* e *y* e hipotenusa de longitud *z* tiene área $\frac{z^2}{4}$, entonces el triángulo *XYZ* es isósceles.

2) *n* es un entero par⌢n^2 es un entero par.

3) Es posible resolver las dos ecuaciones lineales $ax + by = e$ y $cx + dy = f$ para *x* e *y* cuando *a, b, c. d* y *f* son números reales con *ad-bc≠0.*

4) La suma de los *n* primeros enteros positivos es $\frac{n(n+1)}{2}$.

5) *r* es un número irracional si *r* es real y satisface $r^2=2$.

6) Si *p* y *q* son números reales positivos con $\sqrt{pq} \neq \frac{p+q}{2}$, entonces *p≠q.*

7) Cuando *x* es un número real, el valor mínimo de *x(x-1)* es al menos $-\frac{1}{4}$.

–Discusión en grupo –

Hoja de trabajo # 4: Conectivos lógicos (90 minutos)

Objetivo: Destacar la importancia de los conectivos lógicos para obtener nuevas proposiciones compuestas de otras proposiciones simples previas.

Parte I. Convenciones en matemáticas

a) Negación: En los siguientes enunciados escriban el enunciado con el significado opuesto correspondiente.

Enunciado P:	*Enunciado con significado opuesto ¬P:*
A Sofía le gustan mucho las fresas,	
A Oscar no le gusta la mayonesa,	
Hoy es un día lluvioso,	
Cada aula tiene una silla que no esta rota,	
Todos los estudiantes son buenos,	
Al menos uno de mis compañeros está casado,	
Sofía es alta y delgada	
1≤x≤3	

Con ayuda de los enunciados anteriores determine los valores de verdad de la negación del enunciado *P*.

P	*¬P*
Verdadero	
Falso	

b) <u>Conjunción:</u> Consideren los enunciados *P: hoy está lloviendo* y *Q: hoy hace frío;* el enunciado que indica ambas cosas quedaría como *P y Q:* en matemáticas *P y Q* se expresa como *P^Q* y se conoce como *conjunción.* Completen la siguiente tabla considerando los valores dados para *P* y para *Q,*

P	*Q*	*P^Q*
Verdadero	*Verdadero*	
Verdadero	*Falso*	
Falso	*Verdadero*	
Falso	*Falso*	

c) <u>Disyunción:</u> En el lenguaje cotidiano tenemos dos usos del conectivo *'o'* (conocido como disyunción): uno no excluyente y otro excluyente. Veamos los dos casos:

I. <u>No excluyente (o bien *P* o bien *Q* o ambas)</u>: en el escaparate de la librería de la universidad aparece escrito: «Nuestros clientes en posición de la credencial de estudiante o de empleado de la universidad tendrán derecho al 15% de descuento ».

En este caso *P: estudiantes con credencial tienen 15% de descuento,* y

Q:

P o Q:

P	*Q*	*P v Q*
Verdadero	*Verdadero*	
Verdadero	*Falso*	
Falso	*Verdadero*	
Falso	*Falso*	

Nota: en matemáticas el símbolo ' v' significa 'o'.

II. <u>Excluyente (o bien *P* o bien *Q* no ambas)</u>: una niña se empeña en que su padre la lleve el domingo por la mañana al parque y por la tarde al cine de su barrio. El padre le dice: «No. Saldremos por la tarde e iremos al cine o al parque».

En este caso *P: por la tarde iremos al cine,* y

Q:

P o Q:

P	*Q*	*P o Q*
Verdadero	*Verdadero*	
Verdadero	*Falso*	
Falso	*Verdadero*	
Falso	*Falso*	

Nota: en matemáticas siempre el significado de 'o' será <u>no excluyente</u>, es decir como en el primer caso.

–Discusión en grupo –

d) <u>Implicación o condicional:</u> Consideren *P: hoy está lloviendo, Q: Sofía y Oscar esta tarde verán una película.* Otra forma de conectivo entre enunciados es la implicación cuya forma es *si P entonces Q,* esta expresión es equivalente a *P□Q,* es decir '→' sustituye al si, entonces; también es común sustituir el entonces por una coma, pero sin omitir el si, es decir, *si P, Q*.

6) Escriban a continuación el significado de lo que se les pide y contesten.

P→Q:

Q→ P:

¿Son iguales o diferentes los significados de las expresiones? Explica.

7) Existen otras formas que son equivalentes a este enunciado. Enseguida se dan algunas, intenten completar con otras.

Q sólo si *P*

Si *Q* no sucede, tampoco sucede *P*

8) Llenen la siguiente tabla, para ello nos interesa saber, por ejemplo, cuándo es falso el enunciado *P implica Q*, así que, en los cuatro casos conviene preguntarnos cuando el enunciado es mentira. No pierdan de vista que este es un enunciado condicional se dice qué ocurrirá en caso de que llueva nada dice en caso de que no llueva.

P	*Q*	$P \rightarrow Q$	$Q \rightarrow P$
Verdadero	*Verdadero*		
Verdadero	*Falso*		
Falso	*Verdadero*		
Falso	*Falso*		

9) Veamos por ejemplo; Eduardo dijo: «voy al banco y si está abierto traeré mil pesos», si viene con los mil pesos ¿qué deducen?

e) Equivalencia o bicondicional: Este conectivo se utiliza en matemáticas para indicar que se dan de manera simultánea los casos *P □Q* y *Q □P;* esto lo denotaremos por *PˆQ*, y se leerá como *P si y sólo si Q* o bien *P es necesario y suficiente para Q.* Con ayuda de las tablas anteriores completen la tabla siguiente:

P	*Q*	*P□Q*	*Q□P*	*P□Q y Q□P*	*PˆQ*

f) Completen la siguiente tabla, que llamaremos *conectivos lógicos.* Con lo anterior definiremos las operaciones mencionadas en la primera columna por sus valores de verdad en la última columna.

Nombre	*Notación*	*Significado*	*Cuándo es verdadero(tautología)*
Negación			
	P^Q		
		"P o Q"	
Bicondicional			*P, Q* tienen el mismo valor de verdad.
			Excepto cuando *P* es verdadero y *Q* es falso.

–Discusión en grupo –

Tarea de desafío

Una *ley lógica* es una proposición verdadera cualquiera que sea el valor de verdad o falsedad de sus componentes. Por ejemplo la ***ley de no-contradicción***: *no-(A y no-A)* o bien con símbolos *¬(A^¬A)* dado que su tabla de verdad es

A	***¬A***	***A^¬A***	***¬(A^¬A)***
V	*F*	*F*	***V***
F	*V*	*F*	***V***

Comprueben que las siguientes son leyes lógicas

1. *Ley del tercero excluido*: *A o no-A*
2. *Ley del método de demostración por contraposición: (A implica B) equivale a (no-B implica no-A)*
3. *No-(A o B) equivale a (no-A) y (no-B)*
4. *(o bien A o bien B) equivale a [(A y no B) o (no-A y B)]*
5. *Ley del método por reducción al absurdo: (A implica B) equivale [(A y no-B) implica (P y no-P)*

Hoja de trabajo #5: Uso de ejemplos y contraejemplos (90 minutos)

Parte I. Consideren la afirmación *en este salón todos tienen menos de 19 años.* Si queremos saber si este enunciado es falso o verdadero, ¿qué podemos hacer?

Para probar que un enunciado es falso que se necesita.

Para probar que es verdadero, que se necesita.

Parte II. Prueben la falsedad (refuten) de las siguientes afirmaciones con un contraejemplo.

Afirmación	**Contraejemplo**
Para todo número real x, $x^2>x$	
Todo número primo es par	
Para todo p primo, existe un entero k tal que $p=2k+1$	

Parte III. Cómo demostrarían la verdad o falsedad del siguiente enunciado.
Para todo número n, se tiene que n^2+n+41 es primo.
Ensayen con diferentes números y justifiquen. Pueden usar alguna herramienta tecnológica.

Número n=	**Resultado de $f(n)=n^2+n+41$**	**Primo/ No primo**
2	F(2)=47	47 es primo

Qué pueden concluir de lo anterior. Justifiquen.
–Discusión en grupo –
Parte IV. Después de ver el video mostrado por el profesor o disponible en http://www.youtube.com/watch?v=ee2If8jSxUo intenten contestar el acertijo que ahí aparece: ¿qué número sigue en la serie 313, 331, 367,…?
¿Qué características tienen en común los números de la serie?

¿Qué número sigue? Justifiquen.
–Discusión en grupo –
Después de revisar nuevamente el video, contesten lo siguiente (pueden usar calculadora o cualquier pieza tecnológica si así lo desean).
Recuerdan la definición de primo feliz. Anótenla.

Prueben que 313 es número primo feliz.

Qué pueden decir acerca de 331 y 367. Justifiquen.

Volviendo a la serie 313, 331, 367,…¿Qué número sigue?, coincide tu respuesta con la dada antes.
–Discusión en grupo –
Para verificar cuándo un número primo es feliz construyan una *función,* como la que aparece en la parte III, que les devuelva la suma de los cuadrados de los dígitos, apóyense en la calculadora o en una hoja electrónica de cálculo en la computadora. Escuchen las sugerencias del profesor y escriban la función adecuada.

Para demostrar la verdad o falsedad de una proposición o enunciado matemático. ¿Cuándo es suficiente exhibir un caso y cuándo no lo es? Expliquen de la manera más organizada posible.

Hoja de trabajo # 6: Demostrando con el método avance-retroceso

Antes de iniciar con esta hoja de trabajo se introducirán un par de ejemplos que ilustren el método y los elementos implicados. Pregunta clave: pregunta específica obtenida al cuestionarse cómo se puede probar que un enunciado dado es verdadero.

Proceso avanzar: derivar a partir de un enunciado verdadero P otro enunciado verdadero P_1 Proceso retroceder: proceso de derivar a partir de un enunciado Q (en este caso la conclusión) un nuevo enunciado, Q_1, con la propiedad de que si Q_1 es verdadero, entonces Q también lo es. Esto se hace formulando una pregunta clave y respondiendo

Ejemplo
Demostrar que dados a, b y c enteros. Si a divide a b y b divide a c, entonces a divide a c.

Primero nos aseguramos de entender el lenguaje,

Definición Para *a* y *b* enteros. Decimos que *a* divide a *b* si existe un entero *q* tal que *aq=b*. Si *a* divide a *b*, se escribe $a|b$, y decimos que *a* es **factor** de *b*, y que *b* es **divisible** por *a.*

Para un análisis de la demostración se determinan los elementos que componen el enunciado a probar y buscando las preguntas claves y sus respuestas se aplica el proceso avanzar y el proceso retroceder para organizar la demostración (no se sigue un orden en el avance y el retroceso).

Preguntas clave	Organizando la demostración
¿Qué información se supone cierta? ¿Qué se deduce a partir de la información P?	**P** a **P_1**
¿Qué significa probar Q? ¿Qué se pretende probar?	**Q1** **Q** Nuestra meta es mostrar que $a|c$.

Proposición 1 *Si el triángulo rectángulo XYZ con catetos de longitudes x e y e hipotenusa de longitud z tiene área* $\frac{z^2}{4}$*, entonces el triángulo XYZ es isósceles.*

Parte I. Entendiendo la proposición

En el siguiente recuadro escriban las definiciones y esquemas auxiliares a utilizar:

Triángulo rectángulo: Triángulo isósceles: Cateto: Hipotenusa:

Parte II. Análisis de la demostración

Determinen los elementos que componen el enunciado a probar y buscando las preguntas claves y sus respuestas organicen la demostración.

Preguntas clave	Organizando la demostración
¿Qué información se supone cierta? ¿Qué se deduce a partir de la información P?	P: $P_{1:}$
¿Qué significa probar Q? ¿Qué se pretende probar?	Q1: Q:

Parte III. Escribiendo la versión condensada de la demostración – en grupo y con la ayuda del profesor –.

Reforzando la idea de *pregunta clave* para retroceder en el método avance-retroceso

1) Para demostrar que *"Si x es un número real, entonces el valor máximo de -* x^2 *+2 x + 1 es mayor o igual que 2"*. ¿Cuál de las siguientes preguntas clave es incorrecta?
   a. ¿Cómo pueden probar que el valor máximo de una parábola es mayor o igual que un número?
   b. ¿Cómo pueden probar que un número es menor o igual que el valor máximo de un polinomio?
   c. ¿Cómo pueden probar que el valor máximo de la función - x^2 +2 *x* + 1 es mayor o igual que un número?
   d. ¿Cómo pueden probar que un número es menor o igual que el máximo de una función cuadrática?

Expliquen su respuesta.

2) Para los problemas siguientes, elaboren una lista con las preguntas claves que puedan formular (al menos 2). Las preguntas no deben contener símbolos ni notación del problema tratado.
   a. Si *n* es un entero par, entonces n^2 es un entero par
   b. Si *n* es un entero dado que satisface $-3n^2 + 2n + 8 = 0$, entonces $2n^2 - 3n = 2$

3) Para la pregunta clave: *"¿cómo pueden probar que dos rectas en un plano son paralelas?"* ¿cuál de las siguientes respuestas es incorrecta?
   a) Probar que las pendientes de las rectas son iguales,
   b) probar que cada una de las dos rectas es paralela a una tercera recta,
   c) probar que cada una de las dos rectas es perpendicular a una tercera recta, y
   d) probar que cada una de las dos rectas están en lados opuestos de un cuadrilátero.

   Expliquen su respuesta.

4) Para cada una de las preguntas clave siguientes, elaboren una lista con todas las respuestas que les sea posible (al menos tres).
   a. ¿Cómo se puede probar que dos números reales son iguales?
   b. ¿Cómo se puede probar que dos triángulos son congruentes?
   c. ¿Cómo se puede probar que dos conjuntos son iguales?
   d. ¿Cómo se puede probar que un conjunto es subconjunto de otro conjunto?

Reforzando la idea de *deducción* para el avance en el método avance-retroceso

1) Para cada una de las hipótesis siguientes, formulen tantos enunciados como les sea posible (al menos dos) que sean resultado de aplicar el primer paso del proceso avanzar a partir de la hipótesis.
   a. El número real *x* satisface $x^2 - 3x + 2 < 0$
   b. El seno del ángulo *X* en el triángulo *XYZ* de la figura es $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$
   c. El rectángulo ABCD es un cuadrado

d. El entero $n^2 - 1$ es impar

e. La circunferencia *C* consta de todos los valores de *x* e *y* que satisfacen la ecuación $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 25$

2) Para demostrar que: "Si *x* e *y* son números reales tales que $x^2 + 6y^2 = 25$ e $y^2 + x = 3$, entonces *y=2"*. Al aplicar el proceso avanzar a partir de la hipótesis, ¿cuál de los enunciados siguientes no es válido?

a) $y^2 = 3 - x$

b) $y^2 = \dfrac{25}{6} - \left(x\sqrt{6}\right)^2$

c) $\left(3 - y^2\right)^2 + 6y^2 - 25 = 0$

d) $x + 5 = \dfrac{-6y^2}{x-5}$

Expliquen su respuesta.

2) Supongan que quieren probar que:" Si *R* es un subconjunto de *S* y *S* es un subconjunto de *T,* entonces *R* es un subconjunto de *T"*. Expliquen por qué el siguiente enunciado en el proceso avanzar es incorrecto: "puesto que *R* es un subconjunto de *S*, se sigue que todo elemento de *S* también es elemento de *R"*.

–Discusión en grupo –

Hoja de trabajo #7: Práctica del método avance-retroceso para demostrar

Proposición 2 *Si a, b y c son números reales para los que a>0, b<0 y* $b^2 - 4ac = 0$*, entonces la solución de la ecuación* $ax^2 + bx + c = 0$ *es positiva.*

Parte I. Entendiendo la proposición

Si es necesario usen el siguiente recuadro para escribir las definiciones y esquemas auxiliares a utilizar:

Parte II. Análisis de la demostración

Determinen los elementos que componen el enunciado a probar y buscando las preguntas claves y sus respuestas organicen la demostración.

Preguntas clave	Organizando la demostración
¿Qué información se supone cierta? ¿Qué se deduce a partir de la información P?	P: $P_{1:}$

¿Qué significa probar Q? ¿Qué se pretende probar?	Q1: Q:

Parte III. Escribiendo la versión condensada de la demostración

– Discusión en grupo –

Hoja de trabajo # 8: Leyendo y entendiendo demostraciones

1. Consideren el problema de demostrar que: "Si *x* y *y* son números reales no negativos que satisfacen *x+y=0*, entonces *x=0* y *y=0".*
   a. Para la siguiente demostración condensada, escriban un análisis indicando los pasos del método avance-retroceso, así como las preguntas clave y sus respuestas.

   Demostración: Primero se probará que *x≤0*, porque entonces, como *x≥0* por hipótesis debe cumplirse que *x=0*. Para ver que *x≤0*, por hipótesis *x+y=0,* de donde *x=-y*. Asimismo*,* como *y≥0*, se sigue que *-y≤0,* de donde *x=-y≤0*. Por último, para ver que *y=0,* como *x=0* y *x+y=0,* se sigue que *0=x+y=0+y=y.*□

   b. Vuelvan a hacer la demostración condensada del inciso (a) con el proceso retroceder.

2. Consideren el problema de demostrar que: " Si *n* es un entero mayor que 2, *a* y *b* son las longitudes de los catetos de un triángulo rectángulo, y *c* es la longitud de la hipotenusa, entonces $c^n \rangle a^n + b^n$ ". Justifiquen cada afirmación de la siguiente demostración condensada.

   Demostración: Se tiene que $c^n = c^2 c^{n-2} = (a^2+b^2)c^{n-2}$ Al observar que $c^{n-2} \rangle a^{n-2}$ y que $c^{n-2} \rangle b^{n-2}$, se sigue que $c^n \rangle a^2(a^{n-2}) + b^2(b^{n-2})$. Por consiguiente, $c^n \rangle a^n + b^n$.□

3. Consideren el problema de demostrar que: a) "Dado un triángulo *RST*, s*i SU* es un bisector perpendicular de *RT* y *RS=2RU*, entonces el triángulo es equilátero", y b) que el triángulo *SUR* es congruente con el triángulo *SUT.* Para la siguiente demostración condensada, escriban un análisis indicando los pasos del método avance-retroceso, así como las preguntas clave y sus respuestas. Enseguida escriban el enunciado de la proposición que prueba.

Demostración: Se probará que $\overline{RU} = \overline{UT}$, porque entonces, se tiene también que *∠RUS=∠TUS=90º* y $\overline{SU} = \overline{SU}$. Para ello, se observa que $\overline{RU} = \overline{UT}$ porque *SU* es bisector perpendicular de *RT,* y por tanto la demostración está completa.□

4. Demuestren la parte que no quedó demostrada en el ejercicio anterior.

5. Demuestren que si el triángulo del ejercicio 3 a) es equilátero y *SU* es un bisector perpendicular de *RT,* entonces el área del triángulo *RUS* es $\dfrac{\sqrt{3}\left(\overline{RS}\right)^2}{4}$

6. Consideren un alfabeto que consta de las dos letras *s* y *t*, junto con las siguientes reglas –que pueden aplicarse en cualquier orden – para crear nuevas 'palabras' a partir de las anteriores.
   ix. Se duplica la palabra
   x. Se borra *tt* de la palabra
   xi. Se sustituye *sss* por *t* en la palabra
   xii. Se agrega la letra *t* en el extremo derecho de la palabra si la última letra es *s.*

a) utilicen el proceso avanzar para derivar todas las palabras posibles que se puedan obtener en tres pasos al aplicar repetidamente las reglas anteriores en cualquier orden a la palabra inicial *s*,

b) apliquen el primer paso del proceso retroceder a la palabra *tst.* Específicamente, realicen una lista de todas las palabras para las que la aplicación de una de las reglas anteriores da como resultado *tst,*

c) demuestren que: "Si *s*, entonces *tst*", y

d) demuestren que: "Si *s*, entonces *ttst".*

Tarea de desafío

1. Sea el triángulo *ABC* con ortocentro *H*. Demostrar que *C* es el ortocentro del triángulo *ABH*.

–Discusión en grupo –

Hoja de trabajo # 9: Reducción al absurdo

Objetivo: Introducir el método de reducción al absurdo a partir del método avance-retroceso y establecer la conexión con su correspondiente tabla de verdad para comprender la equivalencia lógica y utilizar este hecho para demostrar proposiciones de la forma *si P entonces Q*.

El método avance-retroceso no siempre nos conduce a una demostración exitosa, para esos casos es necesario otro método: el de **reducción al absurdo**.
Este método se empieza suponiendo que *P* es verdadero como hasta ahora. Sin embargo, para llegar a la conclusión deseada de que *Q* es verdadero, se procede formulando la pegunta: ¿Porqué *Q* no puede ser falso? Después de todo, si se supone que *Q* es verdadero, entonces debe haber una razón por la que *Q* no puede ser falso. El objetivo del método es descubrir esa razón.
Resumiendo en este método **se supone P verdadero y NO Q verdadero**. Se procede con el proceso de avanzar utilizando la información anterior para llegar a una **contradicción** en un enunciado fuera de toda duda.

Ejemplo: Demostrar que los números primos nunca se acaban, siempre hay más.
En principio parece no tener la forma *si P entonces Q*. Notemos que el enunciado puede transformarse en:
Demostrar que los hechos conocidos sobre los números primos implican que dichos números son infinitos.

Demostremos aplicando el método de reducción al absurdo.

Preguntas clave	Organizando la demostración
¿Qué información se supone cierta?	P: Hechos conocidos sobre los números primos No Q: Los números primos son finitos
¿Qué deducimos de esta información?	Podemos ordenar los números primos en la lista *2,3,5,7,11,…,N*, donde *N* es el último primo.
¿Cómo construir una contradicción?	Formemos el número $M=2x3x5x7x11x\ldots xN+1$
¿Qué deducimos?	*M* tiene dos opciones: ser número primo o ser compuesto. Si ocurre el primero ya tenemos la contradicción pues *M* sería un primo mayor que *N.* Si es compuesto entonces uno de sus factores es un número primo de la lista, a ese factor primo podemos llamarlo *K* y entonces *M=HK.* $HK=2x3x5x7x11x13x\ldots xN+1,$ como K es número primo de la lista pertenece a los dos lados de la igualdad, así que $1=K(H-2x3x5x11x13x\ldots xP)$ Pero la igualdad es **imposible**, ya que el número primo *K* no divide a *1*. Hemos encontrado la contradicción y por lo tanto,

¿Qué se pretende probar?	Q: los números primos son infinitos.

En equipo demostrar utilizando el método de reducción al absurdo que:

a) $\sqrt{2}$ es un número irracional

Preguntas clave	Organizando la demostración
Versión final de la demostración	

b) El conjunto de los números primos de la forma 4k+3 es infinito, siendo k un número natural.

Preguntas clave	Organizando la demostración
Versión final de la demostración	

Tarea de desafío

c) Demostrar que es imposible escribir números, utilizando cada uno de los diez dígitos una sola vez y de modo que su suma sea 100.

Preguntas clave	Organizando la demostración
Versión final de la demostración	

Hoja de trabajo # 10: Contrapositivo

Objetivos: Introducir el método del contrapositivo a partir de los anteriores, establecer la conexión con su correspondiente tabla de verdad para comprender la equivalencia lógica y utilizar este hecho para demostrar proposiciones de la forma *si P entonces Q*.
Comparar los tres métodos vistos hasta el momento para distinguir las diferencias.

El método del **contrapositivo** es similar al de reducción al absurdo, ya que empieza suponiendo que P y NO Q son verdaderos, pero a diferencia del método de reducción únicamente se aplica el proceso de avance a NO Q. El objetivo aquí es llegar a la contradicción de que P es falso (es decir a NO P).
El método puede verse como de contradicción pasiva, en el sentido de que suponer P verdadero proporciona pasivamente la contradicción. Una ventaja del método del contrapositivo a diferencia del de reducción al absurdo es que ya sabemos de antemano a que contradicción llegar (P y NO P).

Ejemplo: Sean *a* y *b* enteros con *a≠0*. Si *a* no divide a *b,* entonces $ax^2 + bx + b - a$ no tiene una raíz entera positiva. Demostremos aplicando el método del contrapositivo.

Preguntas clave	Organizando la demostración
¿Qué información se supone cierta?	***P:*** ***No Q***: Suponemos que *x>0* es un entero que cumple con $ax^2 + bx + b - a = 0$

¿Qué deducimos de *NO Q*? ¿Cómo ligamos el avance y retroceso? ¿Cómo encontrar el número *c*?	Si aplicamos a la ecuación la fórmula general para resolver ecuaciones de segundo grado, se tiene que $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4a(b-a)}}{2a}$ y simplificando obtenemos $x=\frac{-b\pm(b-2a)}{2a}$ y las soluciones son *x=-1* y $x=1-\frac{b}{a}$ Como *x>0,* descartamos a -1 y debe tenerse que $x=1-\frac{b}{a}$ Luego *b=(1-x)a*
¿Cómo se prueba que un número divide a otro?	Un número a divide a b si existe un número *c* tal que *b=ca*
¿ A dónde se desea llegar?	***No P***: *a* divide a *b (a|b).*
¿Qué se demostró?	Como no es posible *P* y *No P* entonces $ax^2+bx+b-a$ no tiene una raíz entera positiva. O bien como se verifica que *si No Q, entonces No P*, se verifica también que *si P entonces Q.*

Versión final de la demostración:

Supongamos que *x>0* es un entero con $ax^2+bx+b-a=0$. Luego se tiene que $x=\frac{-b\pm(b-2a)}{2a}$ y como *x>0,* debe tenerse que $x=1-\frac{b}{a}$, así *b=(1-x)a* y por lo tanto *a* divide a *b* .

En equipo demostrar utilizando el método del contrapositivo:
a) Sea *n* un número entero. Demostrar que si n^3 es par, entonces *n* es par.

Preguntas clave	Organizando la demostración
Versión final de la demostración	

b) Demostrar que, de acuerdo a las reglas del ajedrez un peón se mueve, a lo más, 6 veces.

Preguntas clave	Organizando la demostración
Versión final de la demostración	

Tarea de desafío

c) Demostrar que si c es un número impar, la ecuación $n^2+n-c=0$ no tiene solución entera.

Preguntas clave	Organizando la demostración
Versión final de la demostración	

Bibliografía

Alcock, L., & Simpson, A. (1999). The rigour prefix. En O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23 PME International Conference . 2*, págs. 17-24. Haifa: PME.

Alcock, L., & Weber, K. (2005). Referencial and syntactic approaches to proof: Case studies from a transition course. En H. L. Chick , & J. L. Vincent (Ed.), *Proceedings of the 29 PME International Conference. 2*, págs. 33-40. Melbourne Australia: PME.

Alibert, D. (1991). Sur le róle du groupe-classe pour obtenir et resoudre une situation a-didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques , 11* (1).

Alibert, D., & Thomas, M. (1991). Research on mathematical proof. En D. Tall, & D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (págs. 215-230). Dordrecht,, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Alvarado, A., & González, M. T. (2010). La implicación lógica en el proceso de demostración matemática: estudio de un caso. *Enseñanza de las Ciencias , 28* (1), 73-.

Alvarado, A., & González, M. T. (2009). A study of university students' performance with proof. *Proceedings CIAEM 61. Quaderni di ricerca in didattica (Scienze Mathematiche) of G.R.I.M., 2-19*, págs. 348-352. Palermo,.

Alvarado, A., & González, M. T. (2013b). Interactive Reconstruction of a definition. *Congress of European Research in Mathematics. Cerme 8.* Turquía: Cerme.

Alvarado, A., & González, M. T. (2014). Definir, buscar ejemplos, conjeturar… para probar si un número es feliz . *Avances de Investigación en Educación Matemática, , 1* (5), 5-24.

Alvarado, A., & González, M. T. (2013c). El método de demostración directo aplicado a una situación extramatemática. *Encontro de Investigação em Educação Matemática.* Portugal.

Alvarado, A., & González, M. T. (2013a). Generación interactiva del conocimiento para iniciarse en el manejo de implicaciones lógicas. *RELIME. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa , 16* (1), 37-63.

Anderson, C. A., & Owens, J. (1990). *Propositional attitudes: The role of content in logic, language, and mind* (Vol. 20). Center for the Study of Language (CSLI).

Artigue, M. (1995). Ingeniería Didáctica. En M. Artigue, R. Douady, L. Moreno, P. Gómez, M. Artigue, R. Douady, L. Moreno, & P. Gómez (Edits.), *Ingeniería Didactica en Educación Matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas* (págs. 33-59). Bogotá, Colombia: Grupo Editorial Iberoamérica.

Asiala, M., Brown , A., DeVries, D., Dubinsky, E., Mathews , D., & Thomas, K. (1996). A Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education. (J. Kaput, A. Schoenfeld, & E. Dubinsky, Edits.) *Research in Collegiate Mathematics Education , 2* (3), 1-32.

Asiala, M., Dubinsky , E., Mathews, D. M., Morics, S., & Oktaç, A. (1997). Development of students' understanding of cosets, normality, and quotient groups. *The Journal of Mathematical Behavior , 16* (3), 241-309.
Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation . *Educational Studies in Mathematics , 18*, 147-176.
Bell, A. W. (1976). A study of pupils' proof-explanations in mathematical situations. *Educational Studies in Mathematics , 7*, 23-40.
Bell, A. W. (1979). The learning of process aspects of mathematics. *Educational Studies in Mathematics , 10*, 361-387.
Beberman, M. (1958). *An emerging program of secondary school mathematics.* Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press.
Behr, M., Erlwanger, S., & Nichols, E. (1976). *How Children view equality sentences .* PMDC Technical Report No. 3, Florida State University, Tallahassee.
Berger, M. (1998). Graphic calculators: an interpretative framework. *For the Learning of Mathematics* , 13-20.
Bills, L., & Tall, D. (1998). Operable Definitions in Advanced Mathematics: The case of the Least Upper Bound. *Proceedings of PME 22th Intertational Conference. 2*, págs. 104-111. Stellenbosch, South Africa: PME.
Bills, L., Mason, J., Watson, A., Zaslavsky, O., Goldenberg, P., Rowland, T., y otros. (2006). Exemplification: The use of examples in teaching and learning mathematics. *30th International Conference of Psychology of Mathematics Education. 30 (1)*, pág. 1. Prague (Czech Republic) : PME.
Boero, P., Dapueto, C., Ferrari, P., Ferrero, E., Garuti, R., & Lemus, E. (1995). Aspects of the mathematics-culture relashionship in mathematics teaching-learning in compulsory school. En L. Meira , & D. Carraher (Ed.), *Proceedings of the 19 PME International Conference. 1*, págs. 151-166. Recife, Brazil: PME.
Boero, P., Garuti, R., & Mariotti , M. A. (1996). Some dynamic mental processes underlying producing and proving conjectures. En L. Puig, & A. Gutierrez (Ed.), *Proceedings of the Twentieth Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education PMEXX. 2*, págs. 121–128. Valencia: PME.
Brown, J. S., Collins, A., & Duguid, P. (1989). Situated cognition and the culture of learning. *Educational researcher , 18* (1), 32-42.
Cañón, C. (1993). *La matemática, creación y descubrimiento.* Madrid: Publicaciones de la Universidad Pontificia Comillas.
Carlson, M. P. (2000). A study of the mathematical behaviors of mathematicians: The role of metacognition and mathematical intimacy in problem solving. En Nakahara, & M. Koyama (Ed.), *Proceedings of the 24 International PME Conference. 2*, págs. 137-144. Hiroshima, Japan: PME.
Carlson, M. P., & Bloom, I. (2005). The cyclic nature of problem solving: An emergent multidimensional problem solving framework . *Educational Studies in Mathematics , 58*, 45-76.
Chevallard, Y. (1982). Sur l'ingénierie didactique. *XII Ecole d' Eté de Didactique des Mathématiques.* Órleans.
Chevallard, Y. (1991). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné* (2da edición ed.). Grenoble: La Pensée Sauvage.

Chin, E.-T., & Tall, D. O. (2000). Making, having and compressing formal mathematical concepts. En Nakahara, & M. Koyamal (Ed.), *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *2*, págs. 177-184.

Chin, E.-T., & Tall, D. (2002). Proof as a Formal Procept in Advanced Mathematical Thinking. *International Conference on Mathematics: Understanding Proving and Proving to Understand* (págs. 212-221). Taipei, Taiwan: National Taiwan Normal University,.

Cobb, P. (1999). Individual and collective mathematical development: The case of statistical data analysis. *Mathematical thinking and learning , 1* (1), 5-43.

Cobb, P. (1995). Mathematical learning and small-group interaction: Four case studies. En P. Cobb, H. Bauersfeld, P. Cobb, & H. Bauersfeld (Edits.), *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* (págs. 25-129). Hillsdale: Laurence Erlbaum.

Cobb, P., & Bauersfeld, H. (1995). *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures.* Hillsdale: Lawrence Erlbaum.

Coe, R., & Ruthven, K. (1994). Proof practices and constructs of advanced mathematics students. *British Educational Research Journal , 20* (1), 41–53.

Dahlberg, R. P., & Housman, D. L. (1997). Facilitating learning events through example generation. *Educational Studies in Mathematics , 33*, 283-299.

D'Amore, B., Font, V., & Godino, J. D. (2007). La dimensión metadidáctica en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática. *Paradigma , 28* (2), 49-77.

Davis, P. J., & Hersh, R. (1981). *The mathematical experience.* Boston: Birkhauser.

Davydov, V. V. (1990). Types of Generalization in Instruction: Logical and Psychological Problems in the Structuring of School Curricula . *Soviet Studies in Mathematics Education , 2*.

De Guzmán, M. (2004). *Cómo hablar, demostrar y resolver en matemáticas.* Madrid, España: Anaya.

De Guzmán, M. (1997). Madurez de la Investigación en Educación Matemática. El papel del ICMI. En L. Puig, & L. Puig (Ed.), *Investigar y Enseñar. Variedades de la Educación Matemática* (págs. 1-5). Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica.

de Villiers, M. (1993). El papel y la función de la demostración en Matemáticas. *Epsilon , 26*, 15-30.

de Villiers, M. (1998). To teach definitions in geometry or to teach to define? En A. Olivier , & K. Newstead (Ed.), *Proceedings of the 22nd Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. 2*, págs. 248-255. Stellenbosch, ZA: PME.

Dhombres, J. (1985). French Mathematical Textbooks from Bézout to Cauchy . *Historia Scientiarum , 28*, 91-137.

Dorier, J.-L., Robert, A., Robinet, J., & Rogalsky, M. (2000). The obstacle of formalism in linear algebra. En J.-L. Dorier (Ed.), *On the Teaching of Linear Algebra.* Dordrecht:: Kluwer Academic Publisher.

Dorier, J. (2000). *On the teaching of linear algebra.* Dordrecht:: Mathematics Education Library, Kluwer Academic Publisher.

Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes. En D. Tall, & D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Dreyfus, T. (1999). Why Johnny can't prove. *Educational Studies in Mathematics , 38*, 85-109.

Dreyfus, T., & Hadas, N. (1996). Proof as Answer to the Question Why . *Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik/International Reviews on Mathematical Education, , 28* (1), 1-5.

Dreyfus, T., Hershkowitz, R., & Schwarz, B. (2015). The nested epistemic actions model for abstraction in context: theory as methodological tool and methodological tool as theory. In *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education* (pp. 185-217). Springer Netherlands.

Dreyfus, T., & Eisenberg, T. (1990). On difficulties with diagrams: Theoretical issues. En G. Booker, P. Cobb, & T. N. Mendicuti (Ed.), *Proceedings of the 14th PME International Conference*, *1*, págs. 27-34. Oaxtepec México.

Dreyfus, T., & Eisenberg, T. (1986). On visual versus analytical thinking in mathematics. En I. o. University of London (Ed.), *Proceedings of the 10th PME Internacional Conference. 1*, págs. 152-158. London UK: PME.

Dreyfus, T., & Tsamir, P. (2004). Ben's consolidation of knowledge structures about infinite sets. *Journal of Mathematical Behavior, , 23*, 271-300.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking . En D. Tall, & D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (págs. 95-123). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Dubinsky, E., Hawks, J., & Nichols, D. (1989). Development of the Process Conception of Function by Pre-Services Teachers in a Discrete Mathematics Course. En G. Vergnoud, J. Rogalski, & M. Artigue (Ed.), *Proceedings of 13th International Conference of PME. 1*, págs. 291-298. París: PME.

Dushl, R. A. (1997). *Renovar la Enseñanza de las Ciencias. Importancia de las Teorías y Desarrollo.* Madrid: Narcea.

Edwards, B. (1997). An undergraduate student's understanding and use of mathematical definitions in real analysis. *Proceedings of the 19th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *1*, págs. 17-22.

Edwards, B. S., Dubinsky, E., & McDonald, M. A. (2005). Advanced Mathematical Thinking . *Mathematical Thinking and Learning , 7*, 15-25.

Edwards, B., & Ward, M. (2004). Surprises from Mathematics Education Research: Student (Mis)use of Mathematical Definitions. *The Mathematical Association of America Monthly , 111*, 411-424.

Epp, S. (2003). The role of logic in teaching proof. *American Mathematical Monthly , 110*, 890-899.

Evans, J. S. (1982). *The psychology of deductive reasoning.* (P. Kegan, Ed.) London: Routledge.

Evans, J. S., & Newstead, S. E. (1995). *Perspectives on Thinking and Reasoning. Essays in Honour of Peter Wason.* Hove, UK: Lawrence Erlbaum Associates Ltd.

Evans, J. S., Newstead, S. E., & Byrne, R. M. (1993). *(1993). Human reasoning: The psychology of deduction.* Hove, UK: Lawrence Erlbaum Associates Ltd.

Feurzeig, W. (1988). Feurzeig, W. (1988). Apprentice tools: Students as practitioners 97-120. *Technology in education: Looking toward, 2020* , 97-120.
Figueiredo (2010). *O Conhecimento do Professor entendido à luz da sua Exemplificação, en su investigación.*
Finlow-Bates, K., Lerman, S., & Morgan, C. (1993). 'A survey of current concepts of proof held by first year mathematics students'. En I. Hirabayashi, N. Nohda, & K. Shigematsu (Ed.), *Proceedings of the Seventeenth International Conference on the Psychology of Mathematics Education. 1*, págs. 252–259. Japan: University of Tsukuba.
Fischbein, E. (1982). Intuition and proof. *For the Learning of Mathematics , 3* (2), 9-24.
Fishbein, E., & Kedem, I. (1982). Proof and certitude in the development of mathematical thinking. En A. Vermandel (Ed.), *Proceedings of the 6th Conference of the Psychology of Mathematics Education* (págs. 128-131.). Antwerpen: PME.
Forman, E. A. (1996). Learning mathematics as participation in classroom practice: Implications of sociocultural theory for educational reform. En L. P. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, & J. A. Goldin (Edits.), *Theories of mathematical learning* (págs. 115-130). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
Forman, E. A. (2003). A sociocultural approach to mathematics reform: Speaking, inscribing, and doing mathematics within communities of practice. *A research companion to principles and standards for school mathematics* , 333-352.
Franklin, J., & Daoud, D. (1988). *Introduction to proofs in mathematics.* London: Prentice Hall.
Garuti, R., Boero, P., & Lemut, E. (1998). Cognitive unity of theorems and difficulty of proof. *Proceedings of the International Group for the Psychology of Mathematics Education PME-XXII . 2*, págs. 345–352. Stellenbosch: PME.
Gilboa, N., Dreyfus, T., & Kidron, I. (2011). A construction of a mathematical definition – the case of parabola. En B. Ubuz (Ed.), *Proceedings of the 35th Conference of the PME*, *2*, págs. 425-432.
Goldwasser, S., Micali, S., & Rackoff, C. (1989). The knowledge complexity of interactive proofs systems. *SIAM Journal on computing , 18* (1), 186-208.
Goetting, M. (1995). *The College Students' Understanding of Mathematical Proof.* Doctoral dissertation, University of Maryland, Maryland.
Gonzalez Astudillo, M. T. & Alvarado Monroy, A. (2015) Proof by reductio ad absurdum: an experience with university students. *Congress of European Research in Mathematics. CERME 9, Febrero 2015, Praga. Available in* *http://www.cerme9.org/products/wg1/*
González-Martín, A. S. (2005). *La generalización de la integral definida desde las perspectivas numérica, gráfica y simbólica utilizando entornos informáticos: problemas de enseñanza y aprendizaje.* Doctoral dissertation, Universidad de La Laguna.
Gray, E. M., & Tall, D. (1991). Duality, ambiguity and flexibility in successful mathematical thinking. En F. Furinguetti (Ed.), *Proceedings of the 15th PME International Conference. 2*, págs. 72-79. Assisi, Italy: PME.

Gray, E. M., & Tall, D. O. (1994). Duality, ambiguity and flexibility: a proceptual view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education , 26* (2), 115-141.
Greeno, J. (1994). Comments on Susanna Epp's chapter. En A. Schoenfeld, & A. Schoenfeld (Ed.), *Mathematical Thinking and Problem Solving* (págs. 270-278). Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.
Greeno, J. G. (1988). The situativity of knowing, learning, and research. *American psychologist, 53(1), 5. , 53* (1), 5.
Gómez-Chacón, I. (2009). Actitudes Matemáticas: propuestas para la transición del bachillerato a la universidad. *Educación Matemática , 21* (3), 5-32.
Gutiérrez, A. (2001). Estrategias de investigación cuando los marcos teóricos existentes no son útiles. *Actas del 5° Simposio de la SEIEM.* Almería: SEIEM.
Hanna, G. (2000). Proof, Explanation and Exploration: An Overview. *Educational Studies in Mathematics , 44* (1/2), 5-23.
Hanna, G. (1996). The Ongoing Value of Proof. *Proceedings of PME 20th International Conference. 1*, págs. 21-34. Valencia, Spain: PME.
Hanna, G., & De Villiers, M. (2012). *Proof and proving in mathematics education: The 19th ICMI Study* (Vol. 15). Springer Science & Business Media.
Harel, G. (2008). Mathematical induction: Cognitive and instructional considerations. En M. P. Carlson, & C. Pasmussen (Edits.), *Making the connection: Research and teaching in undergraduate mathematics education* (Vol. 73, págs. 111-124). Washington, DC: Mathematical Association of America.
Harel, G. (2001). The development of mathematical induction as a Proof Scheme: A Model for DNR-based Instruction. En S. Campbell, & R. Zaskis (Edits.), *Learning and Teaching Number Theory: Research in cognition and instruction* (págs. 185-212). Norwood, New Jersey: Ablex Publishing Corporation.
Harel, G. (2000). Three Principles of Learning and Teaching Mathematics. En J. L. Dorier, & J. L. Dorier (Ed.), *On the Teaching of Linear Algebra* (págs. 177-189). Kluwer Academic Publishers.
Harel, G., & Sowder, L. (1998). Students´ proof schemes: Results from exploratory studies. En A. H. Schoenfeld, J. Kaput, E. Dubinsky, A. H. Schoenfeld, J. Kaput, & E. Dubinsky (Edits.), *Research in Collegiate Mathematics Education III* (págs. 234-283). Providence: American Mathematical Society.
Harel, G., Selden, A., Selden, A., & Selden, J. (2006). Advanced Mathematical Thinking. En Á. Gutiérrez, P. Boero, Á. Gutiérrez, & P. Boero (Edits.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (págs. 147-172). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.
Hazzan, O., & Leron, U. (1996). Students' use and misuse of mathematical theorems: The case of Lagrange's theorem. *For the Learning of Mathematics* , 23-26.
Healy, L., & Hoyles, C. (2000). A study of proof Conceptions in Algebra. *Journal for Research in Mathematics Education , 31* (4), 396-428.
Hershkowitz , R., Schwarz, B. B., & Dreyfus, T. (2001). Abstraction in context: Epistemic actions. *Journal for Research in Mathematics Education , 32* (2), 195-222.

Hershkowitz, R., Hadas, N., Dreyfus, T., & Schwarz, B. (2007). Abstracting processes, from individuals' constructing of knowledge to a group's "shared knowledge". *Mathematics Education Research Journal , 19* (2), 41-68.
Hoyles, C. (1997). The curricular shaping of students' approaches to proof. *For the Learning of Mathematics , 17*, 7-16.
Hoyles, C., & Küchemann, D. (2002). Students' understading of logical implication. *Educational Studies in Mathematics , 51* (3), 193-223.
Ibañes, M. (2001a). *Aspectos cognitivos de la demostración matemática en alumnos de primer curso de bachillerato.* Tesis Doctoral, Universidad de Valladolid.
Ibañes, M. (2001b). Un ejemplo de demostración en geometría como medio de descubrimiento. *SUMA Revista sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas , 37*, 95, 98.
Ibañes, M., & Ortega, T. (2004). Un análisis del tratamiento de la demostración matemática en los libros de texto de Bachillerato. *Números , 57*, 19-32.
Ibañes, M., & Ortega, T. (2001). Un estudio sobre los esquemas de prueba en el alumnado de primer curso de bachillerato. *UNO , 28*, 39-59.
Inglis, M., & Mejia-Ramos, J. P. (2005). La fuerza de la aserción y el poder persuasivo en la argumentación en matemáticas. *Revista EMA: Investigación e Innovación en Educacion Matematica , 10*, 327-352.
Inglis, M., Mejía-Ramos, J. P., & Simpson, A. (2007). Modelling mathematical argumentation: The importance of qualification. *Educational Studies in Mathematics , 66*, 3-21.
Jacobs, V. R., & Ambrose, R. C. (2008). Making the most of story problems. *Teaching children mathematics , 15* (5), 260-266.
Johnson-Laird, P. N. (1983). *Mental models.* Cambridge, UK: Cambridge University Press.
Kline, M. (1973). *Why Johnny can't add: the failure of the new math.* New York: St. Martin's Press.
Kidron, I. (2008). Abstraction and consolidation of the limit precept by means of instrumented schemes: the complementary role of three different frameworks. *Educational Studies in Mathematics , 69*, 197-216.
Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics , 12*, 317-326.
Krummheuer, G. (1995). The ethnography of argumentation. En P. Cobb, H. Bauersfeld, P. Cobb, & H. Bauersfeld (Edits.), *The Emergence of Mathematical Meaning* (págs. 229-269). Hillsdale, NJ: L.E.A.
Lakatos, I. (1978). *Pruebas y refutaciones.* (J. Worral, E. Zahar, Edits., & C. Solis, Trad.) Madrid: Alianza.
Lampert, M. (1990). Connecting inventions with conventions. *Transforming children's mathematics education* , 253-265.
Lampert, M. (1990a). When the problem is not the question and the solution is not the answer: Mathematical knowing and teaching. *American educational research journal , 27* (1), 29-63.
Lave, J., Smith, S., & Butler, M. (1988). Problem solving as an everyday practice. *The teaching and assessing of mathematical problem solving , 3*, 61-81.

Legrand, M. (1988). Genèse et étude sommaire d'une situation co-didactique: le débat scientifique en situation d'enseignement'. *Proceedings of the Premier Colloque Franco-Allemand de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique.* Grenoble: La Pensée Sauvage.
Lehrer, R., & Romberg, T. A. (1999). Springboards to geometry. En V. Villani, C. Mammana, V. Villani, & C. Mammana (Edits.), *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century* (págs. 62-71). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
Mcclure, E., Mason, J., & Barnitz, J. (1979). An exploratory study of story structure and age effects on children's ability to sequence stories. En *Discourse Processes* (Vol. 2, págs. 213-249).
Maher, C. A., & Martino, A. M. (1996). The development of the idea of mathematical proof: A 5-year case study. *Journal for Research in Mathematics Education* , 194-214.
Marilier, M. C., Robert, A., & Tenaud, I. (1987). Travails en Petit groupes en terminale C. *Cahier de didactique des mathématiques , 40*.
Mariotti, M. A. (1998). *http://www.lettredelapreuve.it/Newsletter/981112Theme/981112ThemeES.html.* Recuperado el 5 de enero de 2009, de Lettre de la Preuve.
Mariotti, M. A. (2001). Introduction to proof: The mediation of a dynamic software environment (special issue). *Educational Studies in Mathematics , 44* (1-2), 25–53.
Mariotti, M. A. (2006). Proof and proving in mathematics education. En Á. Gutiérrez, P. Boero, Á. Gutiérrez, & P. Boero (Edits.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (págs. 173-204). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.
Mariotti, M. A., Bartolini, B. M., Boero, P., Franca, F. F., & Rosella, G. M. (1997). Approaching Geometry theorems in contexts: from history and epistemology to cognition.
Martin, W. G., & Harel, G. (1989). Proof frames of preservice elementary teachers. *Journal for Research in Mathematics Education,* , 41-51.
Martínez, M. V., & Pedemonte, B. (2014). Relationship between inductive arithmetic argumentation and deductive algebraic proof. *Educational Studies in Mathematics , 86* (1), 125-149.
Misfeldt, M. (2003). Mathematicians' Writing. *International Group for the Psychology of Mathematics Education , 3*, 301-308.
Moore, R. C. (1990). *College Students' Difficulties in Learning to Do Mathematical Proofs.* University of Georgia. University of Georgia.
Moore, R. C. (1994). Making the transition to formal proof. *Educational Studies in Mathematics , 27* (3), 249–266.
Movshovitz-Hadar, N. (1988). Stimulating presentation of theorems followed by responsive proofs. *For the learning of mathematics* , 12-30.
Planas, N., & Morera, L. (2011). La argumentación en la matemática escolar: dos ejemplos para la formación del profesorado. En E. Badillo, L. García, A. Marbà, & M. Briceño (Edits.), *El desarrollo de competencias en las clases de ciencias y matemáticas* (págs. 275-300)). Mérida: Fondo Editorial Mario Briceño Iragorry.

Pedemonte, B. (2002). *Etude didactique et cognitive des rapports de l'argumentation et de la démonstration dans l'apprentissage des mathématiques .* Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble I.
Pedemonte, B. (2007). How can the relationship between argumentation and proof be analysed? *Educational Studies in Mathematics , 66*, 23-41.
Pedemonte, B. (2005). Quelques outils pour l'analyse cognitive du rapport entre argumentation et démonstration. *Recherches en Didactique des Mathématiques , 25* (3), 313-348.
Pedemonte, B., & Buchbinder, O. (2011). Examining the role of examples in proving processes through a cognitive lens: the case of triangular numbers. *ZDM Mathematics Education , 43*, 257-267.
Pinto, M., & Tall, D. (1999). Student constructions of formal theory: giving and extracting meaning . En O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23rd International Conference of PME. 4*, págs. 65-73. Haifa, Israel: PME.
Ponte, J. P. (1994). Mathematics Teachers'professional knowledge. En J. Ponte, & J. P. Matos (Ed.), *Proceedings of the eighteenth International Conference for PME* (págs. 195-210). Lisboa: PME.
Presmeg, N. C. (1986a). Visualisation and mathematical giftedness. *Educational studies in mathematics , 17* (3), 297-311.
Presmeg, N. C. (1986). Visualisation in high school mathematics. . *For the learning of mathematics* , 42-46.
Reid, D. A. (1996). The role of proving: students and mathematicians. En T. A. Africa, & M. de Villiers (Ed.), *Proofs and Provings: Why, when and how?* (págs. 185-199). South Africa.: AMESA.
Reid, D. A., & Knipping, C. (2010). *Proof in mathematics education. Reserach, learning and teaching.* Rotterdam: Sense Publisher.
Rodríguez, L. I. (31 de 01 de 2004). *El modelo argumentativo de Toulmin en la escritura de artículos de investigación educativa*. Recuperado el 18 de 03 de 2009, de Revista Digital Universitaria: http://www.revista.unam.mx/vol.5/num1/art2/art2.htm
Romberg, T. A., & Kaput, J. J. (1999). Mathematics worth teaching, mathematics worth understanding. En E. Fennema, & T. A. Romberg, *Mathematics classrooms that promote understanding* (págs. 3-17). Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving.* New York: Academic Press.
Schoenfeld, A. H. (1988). When good teaching leads to bad results: The disasters of'well-taught'mathematics courses. *Educational psychologist , 23* (2), 145-166.
Schoenfeld, A. (1994). What do you know about curricula. *Journal of Mathematical Behavior , 13* (1), 55-80.
Schwarz, B., Dreyfus, T., & Hershkowitz, R. (2009). The nested epistemic actions model for abstraction in context. En B. Schwarz, T. Dreyfus, R. Hershkowitz, B. Schwarz, T. Dreyfus, & R. Hershkowitz (Edits.), *Transformation of Knowledge through Classroom Interaction* (págs. 11-42). London, UK: Routledge.
Sardà, A., & Sanmartí, N. (2000). Enseñar a argumentar científicamente: un reto de las clases de ciencias . *Enseñanza de las Ciencias , 18* (3), 405-422.

Selden, A. (2012). Transitions and proof and proving at tertiary level. In *Proof and Proving in Mathematics Education* (pp. 391-420). Springer Netherlands.
Selden, A., & Selden, J. (1995). Unpacking the logic of mathematical statements. *Educational Studies in Mathematics , 29*, 123-151.
Senk, S. L. (1985). How well do students write geometry proofs? *The mathematics teacher* , 448-456.
Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational studies in mathematics , 22* (1), 1-36.
Sfard, A. (1998). On two metaphors for learning and the dangers of choosing just one. *Educational researcher , 27* (2), 4-13.
Sfard, A. (1992). Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification – the case of function. En E. Dubinsky, & G. Harel (Edits.), *The concept of function. Aspects of epistemology and pedagogy* (Vol. 25, págs. 59-84). Washington: MAA Notes.
Sfard, A. (1989). Transition from operational to structural conception: the notion of function revisited. En G. Vergnaud, J. Rogalsky, & M. Artigue (Ed.), *Proceedings of 13 th Intertational Conference of PME. 3*, págs. 151-158. París: PSYDEE, Laboratoire.
Silver, E. A. (1994). On mathematical problem posing. *For the Learning of Mathematics, , 14* (1), 19-28.
Skemp, R. (1979). Goals of Learning and Qualities of Understanding. *Mathematics Teaching, , 88*, 44-49.
Skemp, R. (1985). PMP: A progress report. *Proceedings of the 9th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (págs. 447-452). Noordwijkerhout: PME.
Solow, D. (2004). *Cómo entender y hacer demostraciones.* (J. A. Amor, Trad.) México, México: Limusa Noriega Editores.
Sohmer, R., Michaels, S., O'Connor, M. C., & Resnick, L. (2009). Guided construction of knowledge in the classroom. En *Transformation of knowledge through classroom interaction* (pág. 105).
Steffe, L. P., & Wiegel, H. G. (1992). On reforming practice in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics , 23* (5), 445-465.
Tall, D. (1991). *Advanced Mathematical Thinking .* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
Tall, D. (2002). Differing Modes of Proof and Belief in Mathematics. *International Conference on Mathematics: Understanding Proving and Proving to Understand* (págs. 91-107). Taipei, Taiwan: National Taiwan Normal University,.
Tall, D. O., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics , 12*, 151-169.
Tall, D., & Chin, E. T. (2002). University students' embodiment of quantifier. En A. Cockburn, & E. Nardi (Ed.), *26th International Conference of PME. 4*, págs. 273-280. Norwich: UK: PME.
Tarski, A. (1960). La concepción semántica de la verdad . En M. Bunge, *Antología semántica.* Buenos Aires, Argentina: Nueva visión.

Tarski, A. (1956). *Logic, Semantics, Metamathematics: Papers from 1923 to 1938.* (J. Woodger, Trad.) Oxford: Oxford Univ. Press.

Thompson, A. G. (1992). Teacher's beliefs and conceptions: a synthesis of the research. En D. A. Grouwns (Ed.), *Handbook on mathematics teaching and learning* (págs. 127-146). New York: Macmillan.

Thompson, D. R. (1996). Learning and teaching indirect proofs. *Mathematics Teacher , 89*, 474-482.

Thurston, W. P. (1994). On proof and progress in mathematics. *Bulletin (New Series) of the AMS, , 30* (2), 16 -177.

Toulmin, S. E. (1958). *The use of arguments.* Cambridge:: University Press.

Tyson, P. A. (1994). *The metaphor of students as mathematicians: Issues and implications (Doctoral dissertation).* Stanford: Stanfort University.

van Asch, A. (1993). To prove, why and how? *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology , 24* (2), 301-313.

Vega, L. (1992). ¿Pruebas o demostraciones? Problemas en torno a la idea de Demostración Matemática. *Mathesis , 8*, 155-177.

Vega, L. (1992). ¿Pruebas o demostraciones? Problemas en torno a la idea de Demostración Matemática. *Mathesis , 8*, 155-177.

Vergnaud, G. (1984). Understanding mathematics at the secondary-school level. En A. Bell, B. Low, & J. Kilpatrick (Ed.), *Theory, research and practice in mathematical education (Report of ICME 5 Working Group on Research in Mathematics Education* (págs. 27-35). ICME.

Vinner, S. (1989). The Avoidance of Visual Considerations in Calculus Student. *Focus on learning problems in mathematics , 11*, 149-156.

Vinner, S. (1983). The notion of proof –some aspects of students' views at the senior high level . En R. Hershkowitz (Ed.), *Proceedings of the 7th Conference of the Psychology of Mathematics Education* (págs. 289-294). , Shoresh, Israel.: PME.

Vinner, S. (1983). The notion of proof –some aspects of students' views at the senior high level. En R. Hershkowitz (Ed.), *Proceedings of the 7th Conference of the Psychology of Mathematics Education* (págs. 289-294). Shoresh, Israel: PME.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in teaching and learning mathematics. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (págs. 65–81). Dordrecht: Kluwer:.

Vinner, S. (2011). The role of examples in the learning of mathematics and in everyday thought processes. *ZDM , 43* (2), 247-256.

Vinner, S., & Hershkowitz, R. (1980). Concept images and common cognitive paths in the development of some simple geometrical concepts. *In Proceedings of the fourth international conference for the psychology of mathematics education* (págs. 177-184). Berkeley California: PME.

Voigt, J. (1995). Thematic patterns of interaction and sociomathematical norms. En *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* (págs. 163-201).

Wason, P. C. (1966). Reasoning. En B. M. Foss (Ed.), *New Horizons in Psychology I.* Penguin: Harmondswort.

Wason, P. C. (1969). Regression in reasoning? *British Journal of Psychology , 60*, 471-480.

Wason, P. C., & Golding, E. (1974). The language of inconsistency. *British Journal of Psychology , 65*, 537-546.
Wason, P. C., & Jonhson-Laird, P. N. (1972). *Psychology of reasoning: Structure and Content.* London: Batsford.
Watson, A., & Mason, J. (2005). *Mathematics as a constructive activity: learners generating examples .* Mahwah, NewJersey: Lawrence Erlbaum Associates, publishers.
Watson, A., & Mason, J. (2002). Extending example spaces as a learning/teaching strategy in mathematics. *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. 4*, págs. 378-385. Norwich (UK): PME.
Webb, N. M. (1991). Task-related verbal interaction and mathematics learning in small groups. *Journal for research in mathematics education* , 366-389.
Weber, K. (2001). Student difficulty in constructing proofs: The need for strategic knowledge . *Educational Studies in Mathematics , 48* (1), 101-119.
Weber, K., & Alcock, L. (2004). Semantic and syntactic proof productions . *Educational Studies in Mathematics , 56* (2-3), 209-234.
Yackel, E. (2001). Explanation, justification and argumentation. En M. Van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. 4*, págs. 33-40. Utrecht: PME.
Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for research in mathematics education* , 458-477.
Yackel, E., & Rasmussen. (2002). Beliefs and norms in the mathematics classroom. En G. Toerner, E. Pehkonen, & & G. Leder (Edits.), *Beliefs: A hidden variable in mathematics education?* (págs. 313-320). Dordrecht: Kluwer.
Zaslavsky, O. (2010). The explanatory power of examples in mathematics: Challenges for teaching. En *In Instructional explanations in the disciplines* (págs. 107-128). US: Springer.
Zaslavsky, O., Harel, G., & Manaster, A. (2006). A teacher's treatment of examples as reflection of her knowledge-base. En J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká, & N. Stehliková (Ed.), *Proccedings of 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. 5*, págs. 457-464. Prague, Czech Republic: PME.
Zazkis, R., Dubinsky, E., & Dautermann, J. (1996). Coordinating Visual and Analytic Strategies: A study of students' understanding of the group D 4. *Journal for research in Mathematics Education* , 435-457.